Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones diferenciales

Los fenómenos electromagnéticos se pueden describir a partir de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Ley de Ampère
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ley de Faraday
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ley de Gauss
$$\nabla \cdot \vec{D} = r$$

Ley de Gauss
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Unidades

$\vec{E}$	Campo eléctrico	Voltios/m
$\vec{H}$	Intensidad del campo magnético	Amperios/m
$\vec{D}$	Desplazamiento del campo eléctrico	Culombios/m^2
$\vec{B}$	Flujo del campo magnético	Weber/m^2=tesla
$\vec{J}$	Densidad de corriente	Amperios/m^2
r	Densidad de carga	Culombios/m^3

Ecuación de continuidad

De las ecuaciones anteriores se deduce la ecuación de continuidad. Para ello se toma la divergencia de la ley de Ampère. Teniendo en cuenta que la divergencia del rotacional es cero, se obtiene la relación entre las cargas y las corrientes.

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

Casos particulares de las Ecuaciones de Maxwell

En el espacio libre las corrientes y las cargas son cero y las ecuaciones de Maxwell se pueden simplificar eliminando los términos correspondientes. Asimismo si las fuentes varían armónicamente con el tiempo, las ecuaciones electromagnéticas y sus soluciones se simplifican, utilizando para ello una notación fasorial, de forma que las derivadas respecto al tiempo se transforman en productos por el factor jw. Finalmente para casos sin variación temporal, las ecuaciones toman las formas de electrostática y magnetostática.

Diferencial	Ley de Ampère	Ley de Faraday	Ley de Gauss	Ley de Gauss
Caso general	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\nabla\cdot\vec{D}=r$	$\nabla\cdot\vec{B}=0$
Espacio libre	$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\nabla\cdot\vec{D}=0$	$\nabla\cdot\vec{B}=0$
Armónica	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+(s+jwe)\vec{E}$	$\nabla\times\vec{E}=-jwm\vec{H}$	$\nabla\cdot\vec{D}=r$	$\nabla\cdot\vec{B}=0$
Estacionario	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$	$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\cdot\vec{D}=r$	$\nabla\cdot\vec{B}=0$

Ecuaciones en forma integral

Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en forma integral, aplicando para ello los teoremas de Stokes y de la divergencia

$$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$\oint\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$\iint\vec{D}\cdot\overrightarrow{ds}=\iiint r\,dv$$

$$\iint\vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}=0$$

En medios materiales hay que considerar la relación entre los vectores intensidad $\vec{E},\vec{H}$ e inducción $\vec{D},\vec{B}$ utilizando la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, que en el espacio libre toman los valores

e_0 = 10^{-9} / 36π F / m

m_0 = 4π10^{-7} H / m

En general

$$\vec{D} = e\vec{E} = e_r e_0 \vec{E}$$
$$\vec{B} = m\vec{H} = m_r m_0 \vec{H}$$

Los valores relativos de la permitividad y permeabilidad pueden ser reales o complejos, escalares o matrices , constantes o variables(dependientes de la posición). En cada caso los medios se denominan como:

Permitividad, permeabilidad	**Tipo de medio**
Real	Sin pérdidas
Compleja	Con pérdidas
Escalar	Isótropo
Matriz	Anisótropo
Constante	Homogéneo
Variable	Inhomogéneo

Finalmente, las antenas se estudiarán en medios lineales, homogéneos e isótropos.

En este caso las ecuaciones de Maxwell para campos variables sinusoidalmente se pueden escribir como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r}{e}$$
$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -jwm\vec{H}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + jwe\vec{E}$$

Ecuaciones de Onda para los Campos

Ecuaciones de Maxwell (variación armónica)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r}{e}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -jwm\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + jwe\vec{E}$$

Ecuación de continuidad

De las ecuaciones anteriores se deduce la ecuación de continuidad, tomando para ello la divergencia de la Ley de Ampère, y teniendo en cuenta que la divergencia del rotacional es cero.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + jwe\vec{E}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = \nabla \cdot \vec{J} + jwe\nabla \cdot \vec{E}$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + jwe\left(\frac{r}{e}\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + jwr = 0$$

Las ecuaciones de Maxwell, desde un punto de vista matemático son un sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden, apareciendo entremezclados los campos eléctricos y magnéticos. A continuación se van a obtener unas nuevas ecuaciones diferenciales, de segundo orden donde se encuentren separados los campos.

Ecuación de onda para el campo eléctrico

Tomando el rotacional de la Ley de Faraday se obtiene la ecuación de onda para el campo eléctrico

$$\nabla \times \vec{E} = -jwm\vec{H}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -jwm\nabla \times \vec{H}$$

$$\nabla\nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2\vec{E} = -jwm(\vec{J} + jwe\vec{E})$$

$$\nabla^2\vec{E} + w^2me\vec{E} = jwm\vec{J} + \nabla\left(\frac{r}{e}\right)$$

Ecuación de onda para el campo magnético

Tomando el rotacional de la Ley de Ampère se obtiene la ecuación de onda para el campo magnético.

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+jwe\vec{E}$$
$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\vec{J}+jwe\nabla\times\vec{E}$$
$$\nabla\nabla\cdot\vec{H}-\nabla^2\vec{H}=\nabla\times\vec{J}+w^2me\vec{H}$$
$$\nabla^2\vec{H}+w^2me\vec{H}=-\nabla\times\vec{J}$$

Definición de los potenciales

Para simplificar el cálculo de los campos eléctricos y magnéticos se puede recurrir a una funciones potenciales escalar y vector, que simplifiquen los cálculos.

Definición del potencial vector

El potencial vector se puede definir teniendo en cuenta la ley de Gauss para el flujo magnético. Si se define $\vec{B}$ como el rotacional de un vector, automáticamente se cumple que la divergencia es cero.

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

Definición del potencial escalar

El potencial escalar se puede definir a partir de la Ley de Faraday y de la definición del potencial vector. Teniendo en cuenta que el rotacional del gradiente de una función es cero, se puede definir el potencial escalar como:

$$\nabla\times\vec{E}=-jwm\vec{H}$$
$$\nabla\times\vec{E}=-jw(\nabla\times\vec{A})$$
$$\nabla\times(\vec{E}-jw\vec{A})=0$$
$$\vec{E}-jw\vec{A}=-\nabla\Phi$$
$$\vec{E}=-jw\vec{A}-\nabla\Phi$$

Ecuación de onda para el potencial vector eléctrico

La ley de Ampère y las definiciones anteriores nos permiten obtener la siguiente ecuación de onda para el potencial vector eléctrico.

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + jwe\,\vec{E}$$
$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = m\vec{J} + jwme\,(-\nabla\Phi - jw\vec{A})$$
$$\nabla\nabla\cdot\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = m\vec{J} + jwme\,(-\nabla\Phi - jw\vec{A})$$
$$\nabla^2\vec{A} + w^2 me\vec{A} = -m\vec{J} + \nabla(\nabla\cdot\vec{A} + jwme\Phi)$$

Ecuación de onda para el potencial escalar eléctrico

Utilizando la Ley de Gauss para el campo eléctrico se obtiene la ecuación de onda para el potencia escalar

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{r}{e}$$
$$\nabla\cdot(-jw\vec{A} - \nabla\Phi) = \frac{r}{e}$$
$$\nabla^2\Phi + w^2 me\Phi = -\frac{r}{e} + (-jw\nabla\cdot\vec{A} + w^2 me\Phi)$$

Definición de la condición de Lorentz

Se ha definido el campo magnético a partir del rotacional del potencial vector, pero es necesario definir también su divergencia. Esta relación se denomina condición de Lorentz.

$$\nabla\cdot\vec{A} + jwme\Phi = 0$$

Es posible simplificar las expresiones de las ecuaciones de onda para los potenciales.

Ecuaciones de onda de los potenciales

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = -\frac{r}{e}$$
$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -m\vec{J}$$

Ondas planas, cilíndricas y esféricas

Los campos eléctricos y magnéticos y los potenciales están relacionados mediante la ecuación de onda vectorial inhomogénea.

La ecuación de onda escalar homogénea, (en ausencia de fuentes) se puede escribir como

$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$

La ecuación de onda se puede resolver de forma analítica en diversos sistemas de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esféricas, etc). Se puede resolver mediante el método de separación de variables, en forma de productos de series. Los coeficientes de las series se determinan a partir de las condiciones de contorno del problema.

Ondas planas

En algunos casos la ecuación de onda se puede resolver directamente. Por ejemplo en coordenadas cartesianas, cuando no existe variación respecto a x e y la ecuación de onda tiene la solución conocida de ondas planas unidimensionales.

$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + k^2\Omega = 0$$
$$\Omega = Ae^{-jkz} + Be^{jkz}$$

Ondas cilíndricas

La solución de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas, con la condición de no variación en las direcciones ϕ,z se puede obtener fácilmente a partir de la expresión de ∇^2 en cilíndricas y de las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel.

$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + k^2\Omega = 0$$

$$\Omega = AH_0^{(1)}(kr) + BH_0^{(2)}(kr)$$

Las funciones H que se obtienen son las funciones de Hankel modificadas de primera y segunda especie, que tienen un comportamiento asintótico como

$$H_0^{(2)}(kr) \simeq \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}$$

$$H_0^{(1)}(kr) \simeq \frac{e^{jkr}}{\sqrt{r}}$$

Representan ondas cilíndricas que se propagan en la dirección radial en el sentido de radios crecientes y decrecientes

Ondas esféricas

En coordenadas esféricas en el caso de que haya simetría en trono al origen, sin variación respecto a las variables angulares, la solución de la ecuación de onda en con la condición de no variación en las direcciones θ,ϕ es

$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + k^2\Omega = 0$$

$$\Omega = A\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} + B\frac{e^{jkr}}{4\pi r}$$

La solución se obtiene como superposición de dos ondas esféricas, progresiva (desde el origen a infinito) y regresiva, en sentido contrario.

Función de Green de la Ecuación de Onda

La ecuación de onda en coordenadas esféricas, con una fuente puntual en el origen de coordenadas se puede resolver teniendo en cuenta que la solución debe ser en forma de ondas progresivas.

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\partial(r)$$

$$\nabla \cdot \nabla G + k^2 G = -\partial(r)$$

$$G = A\frac{e^{-jkr}}{4p\,r}$$

Para determinar el valor de la constante A, se puede integrar en una esfera que encierre el origen de coordenadas, teniendo en cuenta que la superficie de la esfera es proporcional a r^2 , mientras que el volumen es proporcional a r^3. Calculando la divergencia de la solución e integrando se obtiene A=1.

$$\iint_s \nabla G \cdot \hat{r} r^2 \sin(q)\,dq\,df + k^2 \iiint_v G\,dv = -1$$

$$\iiint_v G\,dv \to -0$$

$$G(r) = \frac{e^{-jkr}}{4p\,r}$$

Si las fuentes están situadas en un punto distinto del origen, definido por el vector $\vec{r}\,'$, la solución es la misma que en el caso anterior, con un cambio en el sistema de referencia.

$$G(r,r') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4p\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Soluciones Integrales para los Potenciales

Una vez obtenida la solución de la ecuación de onda para una fuente puntual, para obtener la solución general se puede aplicar el principio de superposición, integrando el conjunto de todas las fuentes.

Potencial escalar

La ecuación de onda para el potencial escalar es

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

La función de Green para la ecuación de onda en coordenadas esféricas es

$$G(r,r') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

La solución para el potencial se puede obtener como la convolución de la respuesta impulsional (función de Green) con las fuentes (distribución volumétrica de cargas).

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{v'} G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\,dv'$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{v'} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\rho(\vec{r}\,')\,dv'$$

Potencial vector

Para obtener la solución para el potencial vector eléctrico, se puede partir de la ecuación de onda

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

La ecuación de onda anterior se puede descomponer en tres ecuaciones escalares, correspondientes a cada una de las componentes cartesianas del vector. La solución se obtiene sumando las soluciones escalares.

$$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = -m J_x$$
$$\nabla^2 A_y + k^2 A_y = -m J_y$$
$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -m J_z$$

Solución integral para la ecuación de onda del potencial vector

$$\vec{A} = m \iiint_{v'} G(\vec{r}, \vec{r}\,') J(\vec{r}\,') dv'$$

$$\vec{A} = m \iiint_{v'} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4p\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} J(\vec{r}\,') dv'$$

Soluciones Temporales de los Potenciales

La solución de la ecuación de onda para variación armónica es

$$G(r, r') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4p\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} e^{jwt}$$

Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de una función de módulo constante y fase lineal se puede escribir como un delta en el dominio del tiempo.

$$\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4p\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} e^{jwt} dw = \frac{\partial\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{4p\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

El potencial escalar se puede obtener a partir de la convolución de la respuesta impulsional con la distribución de cargas.

$$\Phi(\vec{r}, t) = \iiint_{v'} \frac{r\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{4pe\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv'$$

El potencial vector de una distribución de corrientes, en el dominio temporal es de la forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \iiint_{v'} \frac{m \vec{J}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{4p\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv'$$

Expresiones generales de los campos

Los campos eléctricos y magnéticos se pueden obtener a partir de los potenciales mediante las expresiones siguientes

$$\vec{H} = \frac{1}{m}\nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = -jw\vec{A} - \nabla\Phi$$

Las soluciones que se han obtenido para los potenciales en forma integral son

$$\Phi = \frac{1}{e}\iiint_{v'} G(\vec{r},\vec{r}\,')\,r(\vec{r}\,')dv'$$

$$\vec{A} = m\iiint_{v'} G(\vec{r},\vec{r}\,')J(\vec{r}\,')dv'$$

$$G(r,r') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4p\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

$$G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4p\,R}$$

Para calcular los campos es necesario calcular los gradientes y rotacionales de los potenciales.

$$\nabla\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{e}\iiint_{v'} \nabla G(\vec{r},\vec{r}\,')\,r(\vec{r}\,')dv'$$

$$\nabla G(r,r') = \nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{4p\,R}\right) = \frac{dG(R)}{dR}\hat{R}$$

$$\nabla G(r,r') = \left(-jk - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{-jkR}}{4p\,R}\hat{R}$$

$$\nabla\times\vec{A} = m\nabla\times\iiint_{v'} G(\vec{r},\vec{r}\,')J(\vec{r}\,')dv' = m\iiint_{v'} \nabla G(\vec{r},\vec{r}\,')\times J(\vec{r}\,')dv'$$

Finalmente, simplificando las anteriores expresiones se obtiene el campo eléctrico, válido en todos los puntos del espacio.

$$\vec{E} = \frac{1}{4pe}\iiint_{v'} \hat{R}\,r(\vec{r}\,')\frac{e^{-jkR}}{R^2}dv' + \frac{jk}{4pe}\iiint_{v'}\left(r(\vec{r}\,')\,\hat{R} - \frac{wme}{k}\vec{J}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$$

El campo magnético es

$$\vec{H} = -\frac{1}{4p}\iiint_{v'} \hat{R}\times \vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jkR}}{R^2}dv' - \frac{jk}{4p}\iiint_{v'}(\hat{R}\times \vec{J}(\vec{r}\,'))\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$$

A distancias muy cercanas a las fuentes predominan los campos que son proporcionales a $1/r^2$, mientras que a grandes distancias predominan los proporcionales a $1/r$

Campos inducidos

Son proporcionales a $1/r^2$ y corresponden a las leyes de Coulomb y Biot y Savart, con un término adicional de fase. Si k=0 se obtienen las expresiones conocidas de los campos de una distribución de cargas y de corrientes.

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4pe}\iiint_{v'} \hat{R} r(\vec{r}\,')\frac{e^{-jkR}}{R^2}dv'$$

$$\vec{H}_i = -\frac{1}{4p}\iiint_{v'} \hat{R}\times \vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jkR}}{R^2}dv'$$

Campos radiados

Los campos radiados son proporcionales a $1/r$ y son los que contribuyen a la radiación a grandes distancias de las fuentes.

$$\vec{E}_r = \frac{jk}{4pe}\iiint_{v'}\left(r(\vec{r}\,')\hat{R} - \frac{wme}{k}\vec{J}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$$

$$\vec{H}_r = -\frac{jk}{4p}\iiint_{v'}(\hat{R}\times \vec{J}(\vec{r}\,'))\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$$

Los campos magnéticos inducidos y radiados son iguales cuando se cumple la condición

$$\frac{1}{R^2} = \frac{k}{R}$$

$$R = \frac{l}{2p}$$

Campos radiados

Los campos radiados se pueden calcular a partir de las expresiones generales de los campos, realizando las correspondientes integrales. Si estamos a una distancia suficientemente grande de la antena, podemos hacer una serie de aproximaciones que nos simplificarán los cálculos.

Se puede considerar que todas las ondas originadas en la antena siguen trayectorias paralelas hasta el punto de campo, es decir

Al ser las trayectorias de los rayos paralelas, la diferencia de caminos recorridos por las diferentes ondas se puede calcular como

$$R \simeq r - \hat{r} \cdot \vec{r}\,'$$

Las ondas producidas en cada punto se pueden aproximar por una onda centrada en el origen de coordenadas con un desfase adicional equivalente a la diferencia de caminos.

Función de Green aproximada

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{e^{-jkR}}{4p\,R} \simeq \frac{e^{-jkr}}{4p\,r} e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}$$

El potencial vector eléctrico a grandes distancias se puede calcular a partir de la función de Green aproximada a grandes distancias

Potencial vector

$$\vec{A} = m \iiint_{v'} G(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,')dv'$$

$$\vec{A} = m \iiint_{v'} \frac{e^{-jkR}}{4p\,R} \vec{J}(\vec{r}\,')dv' = \frac{me^{-jkr}}{4p\,r} \iiint_{v'} J(\vec{r}\,')e^{jk\vec{r}\cdot\hat{r}'}dv'$$

Campo magnético

El campo magnético radiado se obtiene a partir de la expresión anterior, junto con la expresión aproximada del potencial.

$$\vec{H}=-\frac{jk}{4\pi}\iiint_{v'}(\hat{R}\times\vec{J}(\vec{r}\,'))\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$$

$$\vec{H}=-\frac{jk}{4\pi}\iiint_{v'}(\hat{r}\times\vec{J}(\vec{r}\,'))\frac{e^{-jkr}}{r}e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv'$$

$$\vec{H}=-\frac{jk}{\mu}\hat{r}\times\vec{A}$$

Se puede observar que el campo magnético es perpendicular a la dirección radial y al potencial vector.

Campo eléctrico

El campo eléctrico radiado se puede calcular a partir de los potenciales y la condición de Lorentz

$$\vec{E}=-j\omega\vec{A}-\nabla\Phi=-j\omega\vec{A}-\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\nabla\cdot\vec{A}$$

El gradiente y la divergencia en coordenadas esféricas es

$$\nabla\psi=\hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2A_r+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Se puede observar que todos los términos de la divergencia son proporcionales a la distancia, excepto el primero, la divergencia se puede aproximar por

$$\nabla\cdot\vec{A}\simeq\frac{\partial A_r}{\partial r}$$

Tomando el gradiente de la divergencia se llega a

$$\nabla\nabla\cdot\vec{A}=\hat{r}\frac{\partial^2A_r}{\partial r^2}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial^2A_r}{\partial r\partial\theta}+\hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2A_r}{\partial r\partial\phi}$$

Efectuando las operaciones indicadas, el sumando que decrece menos con las distancia es el debido a la componente radial

$$\nabla\nabla\cdot\vec{A} \simeq \hat{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} = -k^2(\hat{r}\cdot\vec{A})\hat{r}$$

Finalmente nos queda una expresión muy simple para el campo eléctrico radiado a grandes distancias

$$\vec{E} = -jw(\vec{A} - (\hat{r}\cdot\vec{A})\hat{r}) = jw(\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{A}))$$

El campo eléctrico es perpendicular a la dirección radial (sólo tiene componentes tangenciales).

Expresiones aproximadas para los campos radiados

Los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares entre sí y sólo tienen componentes tangenciales. La relación entre sus módulos es la impedancia característica del medio, que no debe confundirse con la eficiencia.

$$\vec{H} = -\frac{jk}{m}\hat{r}\times\vec{A}$$
$$\vec{E} = -jw(\vec{A} - \hat{r}\cdot\vec{A}) = jw(\hat{r}\times(r\times\vec{A}))$$
$$\vec{E} = h(\vec{H}\times\hat{r})$$

Desarrollando los productos vectoriales, se pueden obtener las componentes de los campos radiados

$$H_r = 0 \qquad H_q = -\frac{E_f}{h} \qquad H_f = \frac{E_q}{h}$$

$$E_r = 0 \qquad E_q = -jwA_q \qquad E_f = -jwA_f$$

El vector de radiación

Definición del vector de radiación

El potencial vector es el producto de dos términos, por una parte tenemos una onda esférica centrada en el origen de coordenadas, y por otra parte una integral que vamos a denominar vector de radiación $\vec{N}$.

$$\vec{A} = \frac{me^{-jkr}}{4p\, r} \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv'$$

$$\vec{A} = \frac{me^{-jkr}}{4p\, r} \vec{N}$$

$$\vec{N} = \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv'$$

El vector de radiación se puede considerar como la suma vectorial de todas las corrientes multiplicadas por un término que representa la diferencia de fase entre la onda que produce y la que tendría si la onda estuviera situada en el origen de coordenadas.

Interpretación como Transformada de Fourier tridimensional

El término de fase depende de la dirección del espacio que se esté considerando y de la distancia al origen. Descomponiendo el vector distancia en sus tres componentes

$$k\hat{r} = \vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

$$\vec{r}\,' = x'\,\hat{x} + y'\,\hat{y} + z'\,\hat{z}$$

Vemos que el vector de radiación se puede interpretar como una integral tridimensional.

$$\vec{N} = \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv' = \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}e^{jk_z z'}dv'$$

La integral se puede interpretar como una transformada de Fourier tridimensional entre las posiciones de las fuentes (x',y',z') y las frecuencias espaciales (k_x,k_y,k_z). El vector $\vec{k}$ depende de la longitud de onda y de las direcciones del espacio (q, f).

Si las corrientes se distribuyen a lo largo del eje z, la interpretación es más simple.

Vector de radiación de un hilo de corriente

$$\vec{N} = \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}e^{jk_z z'}dv'$$

$$\vec{J}(x', y', z') = I(z')\partial(x')\partial(y')\hat{z}$$

$$\vec{N} = \hat{z}\int e^{jk_x x'}\partial(x')dx' \int e^{jk_y y'}\partial(y')dy' \int I(z')e^{jk_z z'}dz'$$

$$\vec{N} = \hat{z}\int I(z')e^{jk_z z'}dz'$$

El vector de radiación se puede interpretar como la transformada de Fourier unidimensional de las corrientes.

Si el hilo de corriente uniforme, el vector de radiación se calcula como.

$$\vec{N} = \hat{z}\int I(z')e^{jk_z z'}dz'$$

$$I(z') = I$$

$$|z| \leq \frac{h}{2}$$

$$\vec{N}(k_z) = \hat{z}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ie^{jk_z z'}dz'$$

$$\vec{N}(k_z) = \hat{z}Ih\frac{\sin(k_z \frac{h}{2})}{k_z \frac{h}{2}}$$

$$k_z = k\cos(q)$$