Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción histórica

Los experimentos y escritos de **Leonardo da Vinci** (1452–1519) sobre la ley de la palanca, la descomposición de fuerzas y la resistencia de cables y vigas constituyen la primera investigación documentada acerca de la mecánica de sólidos.

Figura 1.1: Atl. 322r.b. Estudios de Leonardo sobre la flexión de una viga biapoyada

Galileo Galilei escribe *Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), el primer tratado en el que se aborda de forma científica la resistencia de vigas y columnas frente a la fractura. **Robert Hooke** responsable de la realización de experimentos de la institución científica ingles denominada *Royal Society*, sienta otro de los pilares de la mecánica de sólidos al establecer en *De potentia restitutiva* (1678) la proporcionalidad entre fuerzas y alargamientos en los cuerpos elásticos (ley de Hooke).

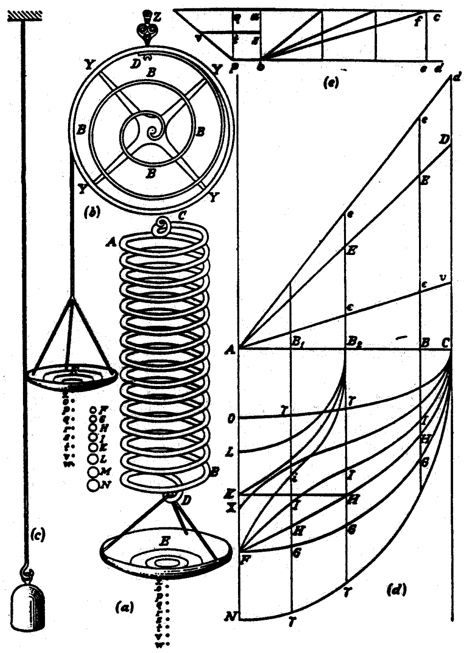


Figura 1.2: *De Potentia Restitutiva*, Robert Hooke, 1678

Dos problemas fundamentales ocupan a los científicos en la primera edad de esta disciplina:

- El problema de la obtención de una expresión para la resistencia a rotura de una viga en ménsula sometida a una carga en su extremo, en función de la resistencia de esa misma viga sometida únicamente a tracción, así como la determinación del eje de rotación de la pieza en la rotura (**problema de Galileo**).

- El problema de la determinación de la forma de la viga cuando está sometida a las acciones exteriores, también llamado **problema de la elástica**.

Galileo abordó el primer problema admitiendo que la resistencia de la ménsula es igual que la de la pieza sometida exclusivamente a tracción y se distribuye sobre su sección transversal, y que el eje de rotación de la pieza en el instante de la rotura se sitúa en la arista inferior de la sección empotrada (este eje fue denominado posteriormente *fibra neutra*. **Mariotte**(1620-1684)

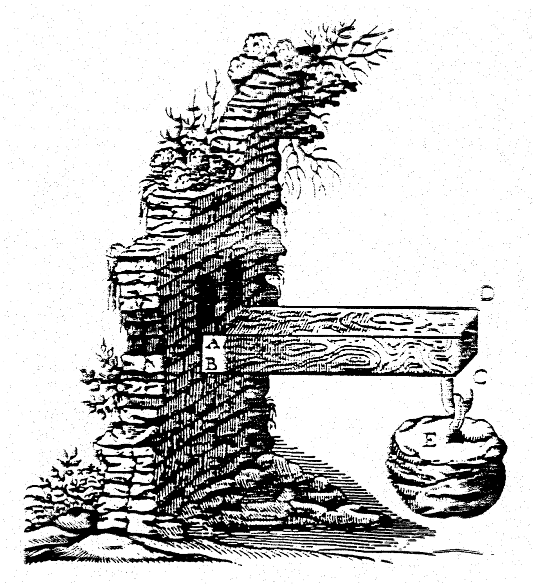


Figura 1.3: *Diálogo sobre dos Nuevas Ciencias* de Galileo Galilei

llegó a la conclusión de que la resistencia de la ménsula es la mitad de la resistencia de la pieza traccionada (variando desde 0 en el eje de rotación hasta un máximo en la arista opuesta), y mantuvo inicialmente la hipótesis de Galileo referente al eje de rotación. En 1713 **Parent** corrigió el error de Mariotte y situó la fibra neutra en el centro de la sección en ménsulas de sección simétrica. El trabajo de Parent supuso la introducción de la idea de una distribución de *fuerzas interiores* actuando sobre las fibras que forman la sección. El problema de Galileo fue resuelto finalmente por **Coulomb**, incluso para leyes de comportamiento no lineales, por medio de las ecuaciones de equilibrio estático en *Sur une Application des Régles de maxims et minims à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture* (1773).

La proporcionalidad entre el momento flector que actúa sobre cada sección de la viga y el radio de curvatura que une los ejes de rotación de las secciones fue establecida por **Jakob Bernoulli** (1654–1705). Posteriormente **Leonhard Euler** resolvió el problema de la elástica minimizando el funcional que representa la energía potencial de flexión (que había deducido a partir de la relación momento – curvatura propuesta por Bernoulli) en su *Methodus inveniendi lineas curvas...* (1744) [1]. Euler dedujo la ecuación diferencial de la elástica por medio del cálculo de variaciones, y estudió las soluciones de la ecuación, entre las que se encuentra la de la inestabilidad de una columna comprimida (pandeo de Euler). Love (1927) [2, epígrafe 262] recoge el análisis de Euler en su famoso tratado sobre elasticidad.

Los fundamentos de la teoría de la elasticidad fueron establecidos en 1822

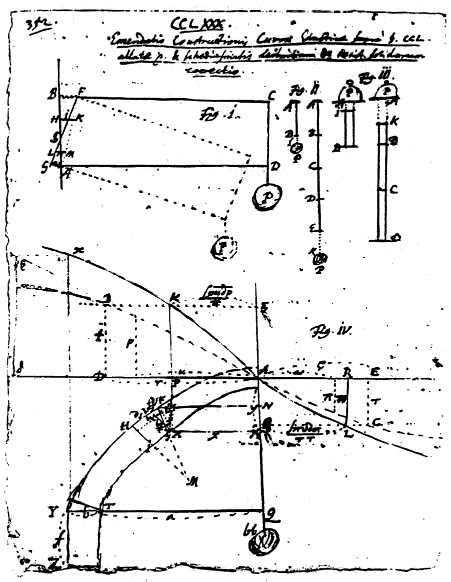
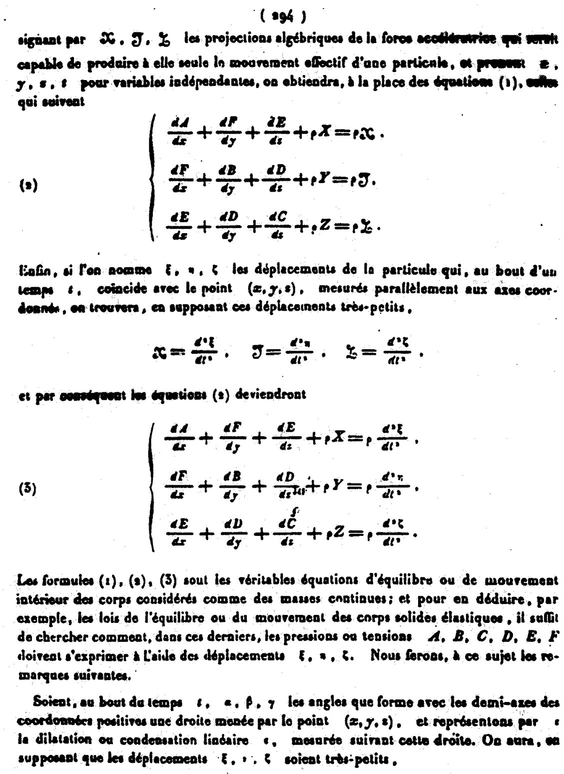


Figura 1.4: Investigaciones de Jakob Bernoulli acerca de la posición de la fibra neutra

por **Auguste Cauchy** (1789–1857), que introdujo de forma axiomática el concepto de tensión actuando sobre un plano y dedujo la expresión de esa tensión en función de la orientación del plano. Desarrolló las ecuaciones de equilibrio en la forma en la que hoy las conocemos y expresó el cambio de forma en el entorno de un punto en función de seis componentes de la deformación.

La teoría de la elasticidad tuvo un desarrollo muy rápido durante el s. XIX principalmente por las investigaciones llevadas a cabo en Francia por **Saint–Venant**, **Lamé** y **Clapeyron**, en Alemania con **Kirchhoff**, **Clebsch** y **Mohr**), y en Gran Bretaña por **Maxwell**, **Green** y **Love** entre otros muchos. Este avance se frena a principios del s. XX por la dificultad que suponía el no disponer de herramientas de cálculo que permitiesen obtener resultados prácticos. Sin embargo, después de la Segunda Guerra Mundial la investigación puntera en este campo se traslada hacia Estados Unidos y Gran Bretaña, que marcarán la pauta durante la segunda mitad del s. XX. El impulso necesario procede de la industria aeronáutica y la necesidad de resolver los complicados problemas que plantea la construcción de aeronaves, así como del desarrollo del ordenador. En este contexto surge el *Método de los Elementos Finitos* que permite la aplicación de los resultados teóricos de la mecánica de sólidos a la resolución de problemas aplicados, ideado prácticamente al mismo tiempo por dos grupos de investigación liderados por **Argyris** (1955), y por **Clough** (1956). Para concluir esta breve



(294)

signant par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les projections algébriques de la force accélératrice qui serait capable de produire à elle seule le mouvement effectif d'une particule, et prenant x, y, z, t pour variables indépendantes, on obtiendra, à la place des équations (1), celles qui suivent

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{dA}{dx}+\frac{dF}{dy}+\frac{dE}{dz}+\rho X=\rho\mathfrak{X}. \\ \frac{dF}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dD}{dz}+\rho Y=\rho\mathfrak{Y}. \\ \frac{dE}{dx}+\frac{dD}{dy}+\frac{dC}{dz}+\rho Z=\rho\mathfrak{Z}. \end{cases}$$

Enfin, si l'on nomme ξ, η, ζ les déplacements de la particule qui, au bout d'un temps t, coïncide avec le point (x, y, z), mesurés parallèlement aux axes coordonnés, on trouvera, en supposant ces déplacements très-petits,

$$\mathfrak{X}=\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \mathfrak{Y}=\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \mathfrak{Z}=\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

et par conséquent les équations (2) deviendront

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{dA}{dx}+\frac{dF}{dy}+\frac{dE}{dz}+\rho X=\rho\frac{d^2\xi}{dt^2}, \\ \frac{dF}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dD}{dz}+\rho Y=\rho\frac{d^2\eta}{dt^2}, \\ \frac{dE}{dx}+\frac{dD}{dy}+\frac{dC}{dz}+\rho Z=\rho\frac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{cases}$$

Les formules (1), (2), (3) sont les véritables équations d'équilibre ou de mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues; et pour en déduire, par exemple, les lois de l'équilibre ou du mouvement des corps solides élastiques, il suffit de chercher comment, dans ces derniers, les pressions ou tensions A, B, C, D, E, F doivent s'exprimer à l'aide des déplacements ξ, η, ζ. Nous ferons, à ce sujet les remarques suivantes.

Soient, au bout du temps t, α, β, γ les angles que forme avec les demi-axes des coordonnées positives une droite menée par le point (x, y, z), et représentons par ε la dilatation ou condensation linéaire ε, mesurée suivant cette droite. On aura, en supposant que les déplacements ξ, η, ζ soient très-petits,

Figura 1.5: Las ecuaciones de equilibrio interno en *Exercises de Mathématiques*, tomo 4, de Auguste Cauchy, 1829

revisión, es necesario citar a **C. Truesdell** como el investigador que durante la década de 1960 revisó y formuló los fundamentos de la Mecánica del Continuo a partir de todo el material generado hasta el momento.

El libro de **S.P. Timoshenko** (1953) [4] es una referencia clave en lo referente a la historia de la mecánica de sólidos, y ha servido de base para redactar este capítulo.

1.2. Medio continuo

El **medio** es la sustancia sólida o fluida en la que se desarrolla un fenómeno físico. La **continuidad** hace referencia a la hipótesis de que el medio no presenta vacíos en su interior, en oposición a la realidad discreta de la materia, que está constituida por átomos y moléculas. El medio continuo es, por lo tanto, un modelo o idealización de la realidad que sólo será válido para el análisis a escala macroscópica. La continuidad permite además el empleo de las herramientas del cálculo diferencial para el desarrollo de la teoría. La característica fundamental del medio es su **deformabilidad**. Esto es lo que diferencia la mecánica del medio continuo de la mecánica clásica, y en particular de la mecánica del sólido rígido.

De forma adicional se pueden introducir otras hipótesis que no son imprescindibles para el análisis pero lo simplifican en determinados casos:

- Homogeneidad
- Isotropía.

Clasificación de la mecánica del medio continuo en el ámbito de la mecánica racional.

1.3. Descripción lagrangiana y euleriana del movimiento

Hay dos planteamientos globales en el análisis del continuo, en función de la elección de variables independientes que se lleve a cabo.

La **descripción lagrangiana** del movimiento, también denominada descripción material, considera que existe una configuración inicial del medio (configuración de referencia). A cada punto material se le asocia un identificador, que es el vector posición $\boldsymbol{X}$ en la configuración inicial. Las coordenadas del punto en la configuración inicial son, por lo tanto, las variables independientes del problema. Durante el proceso de deformación el sólido cambia de forma y posición. En la configuración correspondiente al instante t, la posición del punto se expresa como función del tiempo y de su posición inicial.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t).$$

Este tipo de descripción es la usual en los problemas de mecánica de sólidos, y es la que adoptamos en lo que sigue.

La **descripción euleriana** o espacial adopta como variables independientes las posiciones $\boldsymbol{x}$ del espacio en las que se desarrolla el fenómeno. Un punto del espacio es recorrido por una infinidad de puntos materiales durante un intervalo de tiempo. Las variables que describen el movimiento, por ejemplo la velocidad, se expresan así

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t).$$

Cuando se emplea la descripción espacial resulta necesario definir un nuevo concepto de derivada para evaluar la medida en la que cambia una función asociada a un punto material del medio. Esta operación se denomina *derivada material* y se denotará mediante el operador D/dt. La descripción euleriana y la derivada material se usan habitualmente en la mecánica de fluidos. La referencia Malvern (1969) [3, sección 4.3] incluye más información.

1.4. Fuerzas

Las fuerzas de origen externo que actúan sobre el sólido se pueden clasificar en dos categorías

- Fuerzas de volumen. La fuerza sobre un diferencial de volumen en la configuración actual es $\boldsymbol{b}\,dV$. El vector $\boldsymbol{b}$ es la fuerza de volumen, que tiene unidades $[FL^{-3}]$.
- Fuerzas de superficie. La fuerza sobre un diferencial de superficie en la configuración actual es $\bar{\boldsymbol{t}}\,dV$. El vector $\bar{\boldsymbol{t}}$ es la fuerza de superficie, que tiene unidades $[FL^{-2}]$. La barra hace referencia a que el vector actúa sobre el contorno del sólido.

1.5. Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones de conservación se enuncian de forma natural en su forma espacial o euleriana.

1. Conservación de la **masa**
$$\frac{d}{dt} M = \frac{D}{dt} \int_V \rho(\boldsymbol{x}, t)\, dV = 0. \tag{1.1}$$
2. Conservación del **momento lineal**
$$\frac{D}{dt} \int_V \rho\, \boldsymbol{v}\, dV = \int_V \boldsymbol{b}\, dV + \int_{\partial V} \bar{\boldsymbol{t}}\, dA \tag{1.2}$$
3. Conservación del **momento angular**
$$\frac{D}{dt} \int_V (\boldsymbol{x} \times \rho\, \boldsymbol{v})\, dV = \int_V (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b})\, dV + \int_{\partial V} (\boldsymbol{x} \times \bar{\boldsymbol{t}})\, dA. \tag{1.3}$$

Estas ecuaciones se cumplen tanto para el conjunto del sólido, como para un volumen arbitrario V limitado por una superficie ∂V. Además de las ecuaciones de conservación se admite que el **principio de acción y reacción** se cumple tanto a nivel del conjunto del sólido, como punto a punto, a nivel de la interacción entre dos partes cualesquiera del sólido.

Bibliografía

[1] L. Euler, *Additamentum I de Curvis Elasticis, Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimivi Proprietate Gaudentes*, Opera Omnia, vol. 24, Füssli, Zürich, 1960, reedición del original publicado en 1744.

[2] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944, reimpresión del original publicado en 1927 por Cambridge University Press.

[3] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Engineering of the Physical Sciences, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

[4] S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Dover, 1983, (reimpresión del original publicado en 1953 por McGraw–Hill).