

Capítulo 2

Cinemática

El desarrollo de las expresiones contenidas en este capítulo se lleva a cabo en un sistema de referencia general cartesiano $\{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_3\}$. La notación es, con algunas diferencias, la empleada por Malvern (1969) [2] y Crisfield (1991) [1].

2.1. Gradiente de la deformación

El vector posición de un punto cualquiera del sólido en la configuración inicial o de referencia es \mathbf{X} . Este vector sirve, en la descripción lagrangiana del movimiento, como *etiqueta* del punto durante todo el cambio de configuración. Por ello, en la configuración actual, el vector posición \mathbf{x} del punto será una función de X^1, X^2, X^3 y del tiempo t .

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^1, X^2, X^3, t). \quad (2.1)$$

De forma abreviada escribiremos $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Diferenciando esta expresión en un instante t dado se tiene

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}.$$

El tensor $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ se denomina *tensor gradiente de la deformación*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.2)$$

y convierte el vector inicial $d\mathbf{X}$ en el vector $d\mathbf{x}$ resultado de la deformación

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.3)$$

2.2. Tensores de deformación de Cauchy y Green

Sea ds el módulo del vector $d\mathbf{x}$. Podemos calcular el cuadrado de su módulo a partir de (2.3)

$$(ds)^2 = d\mathbf{x}^\top \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^\top \mathbf{C} d\mathbf{X}, \quad (2.4)$$

donde

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.5)$$

es el denominado *tensor de deformaciones de Cauchy*, que, a diferencia del gradiente de la deformación, es un tensor simétrico.

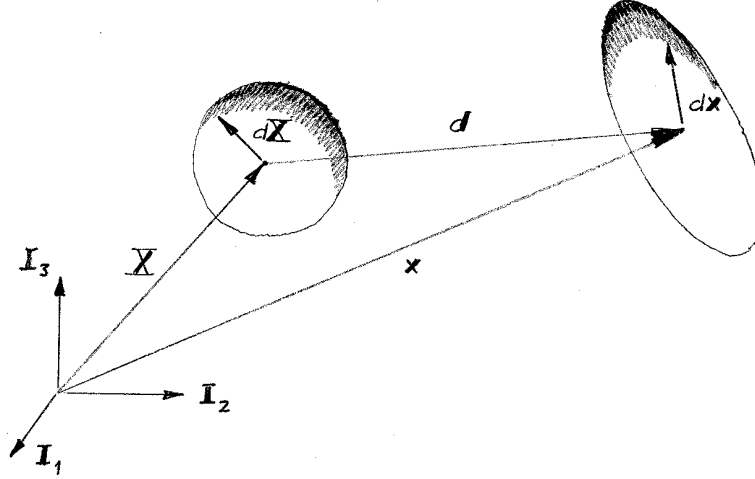


Figura 2.1: Deformación de una esfera elemental

Si denominamos dS al módulo de $d\mathbf{X}$, entonces

$$(dS)^2 = d\mathbf{X}^T \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{I} d\mathbf{X}.$$

Podemos introducir la siguiente medida de la deformación

$$\frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2} = d\mathbf{X}^T \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{I}] d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{E} d\mathbf{X}, \quad (2.6)$$

donde \mathbf{E} es el *tensor de deformaciones de Green*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{I}]. \quad (2.7)$$

2.3. Cinemática en la teoría no lineal

2.3.1. Descomposición polar del gradiente de la deformación

El teorema de descomposición polar de una matriz permite expresar el tensor gradiente de la deformación como producto de dos tensores

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}, \quad (2.8)$$

siendo \mathbf{R} un tensor ortogonal de determinante +1, y \mathbf{U} un tensor regular. El mismo teorema sirve para llevar a cabo la descomposición de forma que el tensor \mathbf{R} actúe en primer lugar.

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}. \quad (2.9)$$

En el ejemplo de la figura, tomado de Crisfield (1991) [1, sección 4.8], se puede observar la interpretación física del teorema de descomposición. En

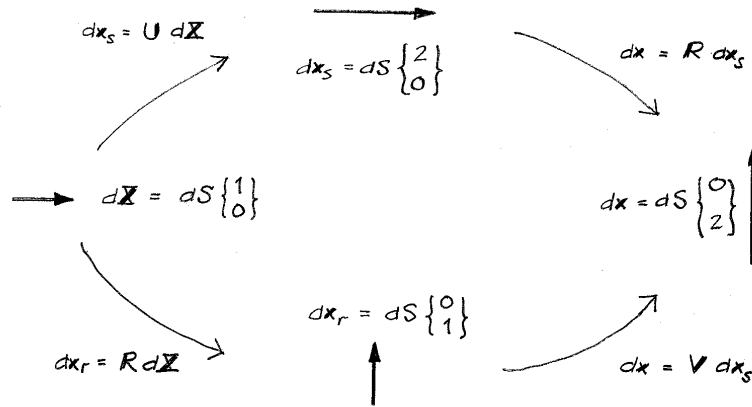


Figura 2.2: Descomposición polar

este caso

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

pero también se cumple

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} d\mathbf{X}$$

2.3.2. Interpretación física de los tensores de deformación

Si escribimos el diferencial de longitud inicial como $d\mathbf{X} = dS \mathbf{N}$, donde \mathbf{N} es un vector unitario en la dirección de $d\mathbf{X}$, entonces, la expresión (2.4) que define el tensor de Cauchy se puede transformar en

$$\mathbf{N}^T \mathbf{C} \mathbf{N} = \frac{(ds)^2}{(dS)^2} = \lambda^2, \quad (2.10)$$

donde $\lambda = ds/dS$ es el *alargamiento relativo* (*stretch*). Por otra parte, a partir de la expresión (2.6) correspondiente al tensor de Green se tiene

$$\mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{N} = \frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2} = \frac{\lambda^2 - 1}{2} \quad (2.11)$$

Para tener una interpretación física de esta última expresión podemos operar sobre la medida de la deformación

$$\frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2} = \frac{ds - dS}{dS} \frac{ds + dS}{dS + dS}. \quad (2.12)$$

La primera fracción es el *alargamiento unitario*, que en la literatura se denomina también *engineering strain* y es la medida usual de la deformación en aplicaciones de ingeniería. La segunda fracción es, en general, distinta de 1. Sin embargo, si las deformaciones del medio son pequeñas, su valor será próximo a la unidad. Por tanto, el tensor de Green \mathbf{E} mide el alargamiento unitario en la teoría de pequeñas deformaciones. Más adelante se demostrará cómo \mathbf{E} coincide en este caso con el tensor de deformaciones lineal.

Los autovalores y las direcciones principales del tensor \mathbf{C} se calculan a partir de la ecuación

$$\begin{aligned} [\mathbf{C} - \alpha \mathbf{I}] \mathbf{N} &= \mathbf{0} && \text{con} \\ \mathbf{N}^T \mathbf{N} &= 1. \end{aligned}$$

A partir de la expresión (2.10) es sencillo comprobar que los tres autovalores de \mathbf{C} coinciden con los cuadrados de los tres alargamientos relativos principales

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_1^2 \\ \alpha_2 &= \lambda_2^2 \\ \alpha_3 &= \lambda_3^2 \end{aligned}$$

Denominando $\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3$ a los vectores unitarios en las direcciones principales, la expresión de \mathbf{C} a partir de sus autovalores y vectores propios es

$$\mathbf{C} = [\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \mathbf{N}_2^T \\ \mathbf{N}_3^T \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Los mismos cálculos se pueden llevar a cabo para el tensor de Green

$$[\mathbf{E} - \beta \mathbf{I}] \mathbf{N} = \mathbf{0}.$$

Introduciendo la definición de \mathbf{E} (2.7) y operando es sencillo comprobar que \mathbf{E} y \mathbf{C} poseen las mismas direcciones principales, y que la relación entre los autovalores es $\beta = (\alpha - 1)/2$, luego

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\lambda_1^2 - 1)/2 \\ \beta_2 &= (\lambda_2^2 - 1)/2 \\ \beta_3 &= (\lambda_3^2 - 1)/2,\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{E} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3] \begin{bmatrix} (\lambda_1^2 - 1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2^2 - 1)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3^2 - 1)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^\top \\ \mathbf{N}_2^\top \\ \mathbf{N}_3^\top \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Para analizar el tensor de alargamientos por la derecha \mathbf{U} observamos que

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F} = \mathbf{U}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top \mathbf{U},$$

de donde se deduce que $\mathbf{U}^\top \mathbf{U}$ tiene los mismos autovalores y las mismas direcciones principales que \mathbf{C} . A partir de este resultado se puede demostrar que \mathbf{U} posee las mismas direcciones principales, y sus autovalores son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +\sqrt{\alpha_1} \\ \lambda_2 &= +\sqrt{\alpha_2} \\ \lambda_3 &= +\sqrt{\alpha_3},\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{U} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^\top \\ \mathbf{N}_2^\top \\ \mathbf{N}_3^\top \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{N}^\top \mathbf{U} \mathbf{N} = \lambda. \quad (2.16)$$

A la vista de este resultado, la forma cuadrática $(ds)^2 = d\mathbf{X}^\top \mathbf{C} d\mathbf{X}$ que define \mathbf{C} –ecuación (2.4)– representa un elipsoide cuyos ejes quedan definidos por los vectores $\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3$. El proceso de deformación se puede interpretar de la siguiente forma:

1. La esfera elemental de ecuación $(dS)^2 = d\mathbf{X}^\top d\mathbf{X}$ se transforma en el elipsoide $(ds)^2 = d\mathbf{X}^\top \mathbf{C} d\mathbf{X}$ de ejes $\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3$. El resultado de la deformación sobre el segmento dS del eje i es $ds = \lambda_i dS$. Esta transformación queda definida por el tensor de alargamientos por la derecha \mathbf{U} .

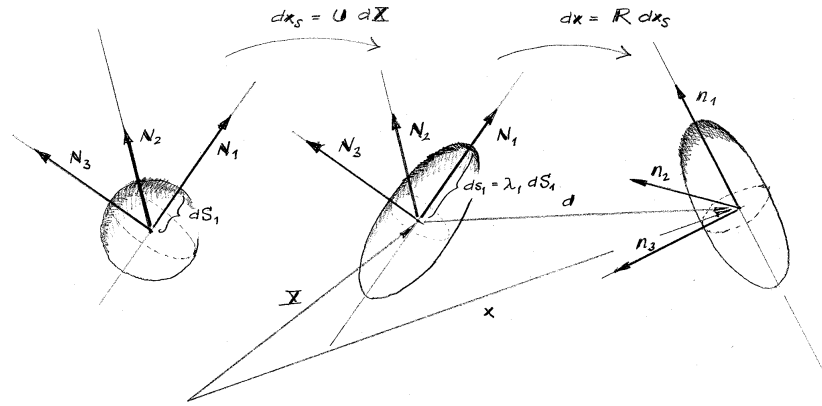


Figura 2.3: Descomposición del proceso de deformación

- El elipsoide experimenta finalmente una rotación hasta su posición actual, definida por el tensor ortogonal \mathbf{R} . El sistema $\{N_1 N_2 N_3\}$ se transforma en el sistema $\{n_1 n_2 n_3\}$ de la siguiente forma

$$[n_1 n_2 n_3] = \mathbf{R} [N_1 N_2 N_3], \quad (2.17)$$

que define la posición final del elipsoide.

2.4. Tensor de deformaciones lineal

2.4.1. Componentes del tensor de Green en función de los desplazamientos

La relación entre la posición inicial y la final es

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{d}. \quad (2.18)$$

Diferenciando esta expresión se tiene

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}) d\mathbf{X}, \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{H} = \partial \mathbf{d} / \partial \mathbf{X}$ es el *tensor gradiente del desplazamiento*. Es inmediato comprobar que

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \quad (2.20)$$

A partir de esta definición se puede calcular el tensor de Green en función de las componentes del desplazamiento

$$\begin{aligned} \frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2} &= d\mathbf{x}^\top \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^\top d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^\top \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \mathbf{H})^\top (\mathbf{I} + \mathbf{H}) - \mathbf{I}] d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^\top \left[\frac{1}{2} (\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \mathbf{H}^\top \mathbf{H} \right] d\mathbf{X}. \end{aligned}$$

A partir de la definición (2.6) resulta

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \mathbf{H}^\top \mathbf{H}, \quad (2.21)$$

y en componentes

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial X^j} + \frac{\partial d_j}{\partial X^i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial d_r}{\partial X^i} \frac{\partial d^r}{\partial X^j}. \quad (2.22)$$

Como se puede observar, el tensor de Green tiene una parte lineal y una parte cuadrática, que depende de los productos entre las derivadas de los desplazamientos.

2.4.2. El tensor de deformaciones en la teoría lineal

Se denomina *tensor de deformaciones lineal* $\boldsymbol{\epsilon}$ a la parte lineal del tensor de Green \mathbf{E}

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top), \quad (2.23)$$

y en componentes

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial X^j} + \frac{\partial d_j}{\partial X^i} \right). \quad (2.24)$$

Por definición, el tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ es un tensor simétrico. Las ecuaciones anteriores son, por tanto, seis ecuaciones en derivadas parciales de las componentes de los desplazamientos y se denominan **ecuaciones cinemáticas**, pues relacionan desplazamientos y deformaciones. Para disponer de una interpretación física de $\boldsymbol{\epsilon}$ recurrimos a la expresión (2.19)

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{H} d\mathbf{X} \quad (2.25)$$

$$= d\mathbf{X} + \frac{1}{2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^\top) d\mathbf{X} + \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top) d\mathbf{X} \quad (2.26)$$

$$= d\mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega} d\mathbf{X} + \boldsymbol{\epsilon} d\mathbf{X}. \quad (2.27)$$

El primer término es el debido a una traslación de sólido rígido, el segundo a una rotación infinitesimal (definida por una matriz antisimétrica)

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

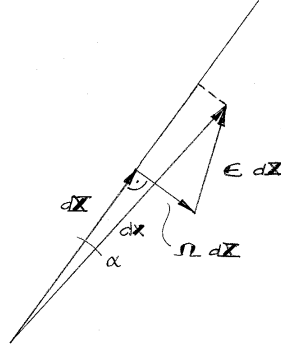


Figura 2.4: Deformación en teoría lineal

y el tercero explica el cambio de forma en la teoría lineal. En notación clásica

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{xz} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

2.5. Estado deformacional en el entorno de un punto

En adelante todos los desarrollos se llevan a cabo en el marco de la teoría lineal.

2.5.1. Deformaciones principales y direcciones principales de la deformación

La solución del problema de valores propios

$$[\boldsymbol{\epsilon} - \alpha \mathbf{I}] \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} = 1 \quad (2.30b)$$

proporciona las **deformaciones principales**, que ordenadas de mayor a menor se denotan $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (en muchos textos los subíndices son números romanos). Los vectores propios correspondientes a cada tensión principal definen las denominadas **direcciones principales de la deformación**, $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$. El tensor de tensiones admite, por tanto, la siguiente expresión en el sistema de referencia cartesiano

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3] \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \mathbf{N}_2^T \\ \mathbf{N}_3^T \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Los invariantes del tensor ϵ se denotan I_ϵ , II_ϵ , III_ϵ , y el polinomio característico para el cálculo de las deformaciones principales es

$$-\alpha^3 + I_\epsilon \alpha^2 - II_\epsilon \alpha + III_\epsilon = 0. \quad (2.32)$$

2.5.2. Alargamiento unitario

Consideremos el vector $\mathbf{e} d\mathbf{X}$ que aparece como último término de la expresión (2.25). Su proyección en la dirección de $d\mathbf{X} = dS \mathbf{N}$ será

$$\mathbf{N}^\top \mathbf{e} d\mathbf{X} = dS \mathbf{N}^\top \mathbf{e} \mathbf{N} = dS \epsilon_n,$$

expresión en la que hemos introducido $\epsilon_n = \mathbf{N}^\top \mathbf{e} \mathbf{N}$. Por otra parte, la proyección de $d\mathbf{x} = ds \mathbf{n}$ en la dirección de $d\mathbf{X}$ vale

$$\mathbf{N}^\top d\mathbf{x} = ds \cos \alpha,$$

ya que \mathbf{N} y \mathbf{n} son unitarios. Además la proyección es igual a

$$dS + dS \epsilon_n,$$

luego

$$ds \cos \alpha = dS + dS \epsilon_n = (1 + \epsilon_n) dS. \quad (2.33)$$

Dado que en teoría lineal $\cos \alpha \simeq 1$, ϵ_n resulta ser el denominado **alargamiento unitario**

$$\epsilon_n = \frac{ds - dS}{dS}, \quad (2.34)$$

y su expresión en función del tensor de deformaciones lineal es

$$\epsilon_n = \mathbf{N}^\top \mathbf{e} \mathbf{N}. \quad (2.35)$$

Conviene comparar estos resultados con las expresiones (2.11) y (2.12).

2.5.3. Distorsión angular

Consideremos dos segmentos diferenciales $d\mathbf{X}_a = dS_a \mathbf{N}_a$ y $d\mathbf{X}_b = dS_b \mathbf{N}_b$ que forman un ángulo A en la configuración inicial. Estos segmentos se transforman en $d\mathbf{x}_a = ds_a \mathbf{n}_a$ y $d\mathbf{x}_b = ds_b \mathbf{n}_b$, que después de la deformación forman un ángulo α . El cambio que se produce en el ángulo entre los segmentos se denomina **distorsión angular**, y se define con el siguiente criterio

$$\gamma_{ab} = A - \alpha. \quad (2.36)$$

Para calcularlo en función del tensor de Green, tendremos en cuenta que

$$\cos \alpha = \cos A - \gamma_{ab} = \cos A \cos \gamma_{ab} + \sin A \sin \gamma_{ab}.$$

En teoría lineal $\cos \gamma_{ab} \simeq 1$ y $\sin \gamma_{ab} \simeq \gamma_{ab}$, luego

$$\cos \alpha = \cos A + \gamma_{ab} \sin A. \quad (2.37)$$

Por otra parte

$$d\mathbf{x}_a^\top d\mathbf{x}_b = ds_a ds_b \cos \alpha = (1 + \epsilon_a)(1 + \epsilon_b) dS_a dS_b \cos \alpha,$$

y

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_a^\top d\mathbf{x}_b &= d\mathbf{X}_a^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{F} d\mathbf{X}_b \\ &= d\mathbf{X}_a^\top (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}^\top + \boldsymbol{\epsilon}^\top) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X}_b \\ &= d\mathbf{X}_a^\top (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X}_b \\ &= dS_a dS_b \mathbf{N}_a^\top (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{N}_b \\ &= dS_a dS_b (\cos A + 2\mathbf{N}_a^\top \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N}_b), \end{aligned}$$

entonces, teniendo en cuenta que $\epsilon_a \epsilon_b$ es despreciable frente a ϵ_a o ϵ_b

$$(1 + \epsilon_a + \epsilon_b) \cos \alpha = \cos A + 2\mathbf{N}_a^\top \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N}_b.$$

Introduciendo (2.37) en esta última expresión, y despreciando el producto $\gamma_{ab}(\epsilon_a + \epsilon_b)$ frente a los factores resulta finalmente

$$\gamma_{ab} = \frac{2\mathbf{N}_a^\top \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N}_b - (\epsilon_a + \epsilon_b) \cos A}{\sin A}. \quad (2.38)$$

2.5.4. Deformación volumétrica

Consideremos un elemento diferencial de volumen $dV_0 = dS_1 dS_2 dS_3$ en la configuración inicial, orientado según las direcciones principales $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$. El elemento tendrá un volumen $dV = ds_1 ds_2 ds_3$ tras la deformación. Operando y despreciando los términos de segundo orden

$$\begin{aligned} dV &= (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) dS_1 dS_2 dS_3 \\ &= (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) dS_1 dS_2 dS_3. \end{aligned}$$

A partir de esta expresión introducimos la **deformación volumétrica** \mathbf{e} , o cambio de volumen relativo

$$\mathbf{e} = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \quad (2.39)$$

que resulta ser igual al primer invariante de $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\mathbf{e} = I_\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (2.40)$$

2.6. Interpretación física de las componentes del tensor de deformaciones

El cálculo de los alargamientos unitarios en las direcciones coordenadas mediante la expresión (2.35) proporciona los alargamientos unitarios en esas direcciones, que resultan ser, respectivamente, las componentes de la diagonal del tensor. Por ejemplo, en la dirección y , el alargamiento viene dado por la expresión

$$\mathbf{N}_y^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N}_y = \{0 \ 1 \ 0\} \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{xz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \epsilon_y, \quad (2.41)$$

que es precisamente la componente asociada al eje y de la diagonal del tensor.

En cuanto a las distorsiones angulares que sufren segmentos inicialmente orientados según las direcciones coordenadas, se pueden calcular por medio de la expresión (2.38). Como resultado se obtiene el doble de las componentes localizadas fuera de la diagonal del tensor. Como ejemplo se desarrolla el cálculo de la distorsión experimentada por segmentos inicialmente orientados según los ejes x , z

$$\gamma_{xz} = 2 \mathbf{N}_x^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{N}_z = 2 \{1 \ 0 \ 0\} \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{xz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2 \epsilon_{xz}. \quad (2.42)$$

Este resultado justifica la expresión clásica (2.29) del tensor de deformaciones lineal.

2.7. Ecuaciones de compatibilidad

El campo de deformaciones queda determinado por las seis componentes distintas del tensor de deformaciones lineal mediante las ecuaciones cinemáticas

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial x^j} + \frac{\partial d_j}{\partial x^i} \right).$$

La obtención de las funciones ϵ_{ij} a partir de las componentes de \mathbf{d} no ofrece dificultad. Sin embargo, el problema inverso puede no tener solución, ya que se dispone de seis ecuaciones diferenciales para determinar únicamente tres funciones incógnita. La integración del campo de deformaciones sólo será posible cuando sus componentes cumplan las denominadas **ecuaciones de compatibilidad**. Cuando ocurre esto, se dice que el campo de deformaciones es *compatible* o *cinemáticamente admisible*.

Para deducir estas ecuaciones es necesario que las ecuaciones cinemáticas sean integrables, es decir, que las derivadas parciales terceras de los desplazamientos sean iguales con independencia del orden en que se lleve a

cabo la diferenciación. La demostración se encuentra en [2, sección 4.7]. Las ecuaciones son

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial X^2} \quad (2.43a)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial X^2} \quad (2.43b)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial Y \partial Z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial Y^2} \quad (2.43c)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial Y \partial Z} = \frac{\partial}{\partial X} \left(-\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial Y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} \right) \quad (2.43d)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial Y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} \right) \quad (2.43e)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial X} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial Y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial Z} \right) \quad (2.43f)$$

Las ecuaciones (2.43) se deducen a partir del tensor de deformaciones lineal, por lo tanto únicamente son de aplicación en teoría lineal. En teoría no lineal el problema de la integración es mucho más complejo debido a la forma de las ecuaciones. No obstante, también es posible formular ecuaciones de compatibilidad en términos del tensor de Cauchy \mathbf{C} [2, sección 4.7] válidas para la teoría no lineal.

Bibliografía

- [1] M. A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials*, John Wiley and Sons, 1991.
- [2] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Engineering of the Physical Sciences, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.