

TRANSMISIÓN DE CALOR MULTIDIRECCIONAL Y TRANSITORIA



ÍNDICE

1. TRANSMISIÓN DE CALOR MULTIDIRECCIONAL

2. PROCESOS TRANSITORIOS CON TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

2.1. CASO DE TEMPERATURA UNIFORME

2.2. VARIACIÓN ESPACIAL DE LA TEMPERATURA

- **Parámetros adimensionales característicos**

- **Transmisión de calor estacionaria unidimensional**

- Ecuación general

- Solución aproximada de Heissler

1. TRANSMISIÓN DE CALOR MULTIDIRECCIONAL

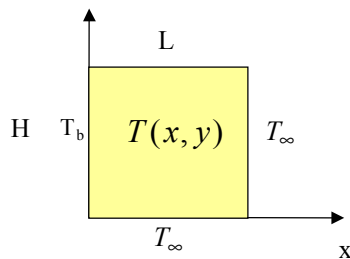
$$\rho \cdot Cp \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = g + k \cdot \Delta T$$

• estacionario
• $g=0$
• $k=cte$

} Ecuación de Laplace

$$\Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

TRANSMISIÓN DE CALOR ESTACIONARIA BIDIRECCIONAL. PLACA CON TEMPERATURAS CONOCIDAS EN LOS LADOS.



$$\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$$



$$\theta(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_b \quad x = 0 \\ T = T_\infty \quad x = L \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T = T_\infty \quad y = 0 \\ T = T_\infty \quad y = H \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_b \quad x = 0 \quad \theta = 0 \quad y = 0 \\ \theta = 0 \quad x = L \quad \theta = 0 \quad y = H \end{array} \right.$$

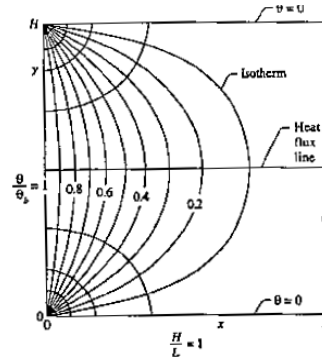
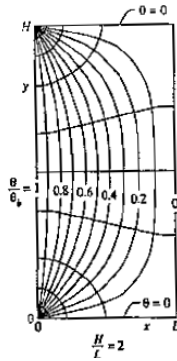
Aplicando el método de separación de variables: $\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 \cdot X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 \cdot Y = 0 \end{array} \right.$$

Solución general: $\theta = K [\sinh(\lambda x) + A \cosh(\lambda x)] \cdot [\sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y)]$

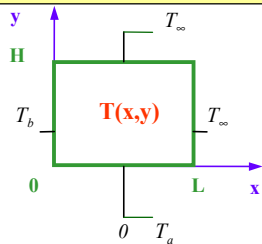
Aplicando las condiciones de contorno, obtenemos:

$$\theta = \frac{4 \cdot \theta_b}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh[(2n+1)\pi(L-x)/H]}{\sinh[(2n+1)\pi L/H]} \cdot \frac{\sin[(2n+1)\pi y/H]}{2n+1}$$



PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

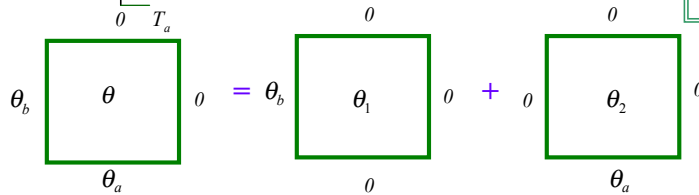
Caso particular : Placa con dos lados a temperaturas diferentes



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_b \quad \text{para } x=0 \\ \theta &= 0 \quad \text{para } x=L \\ \theta &= \theta_a \quad \text{para } y=0 \\ \theta &= 0 \quad \text{para } y=H \end{aligned}$$



La solución es la superposición de ambas:

$$\theta(x, y) = \theta_1(x, y) + \theta_2(x, y)$$

Condiciones de contorno

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} x=0 & \theta_1 = \theta_b & \theta_2 = 0 \\ x=L & \theta_1 = 0 & \theta_2 = 0 \\ y=0 & \theta_1 = 0 & \theta_2 = \theta_a \\ y=H & \theta_1 = 0 & \theta_2 = 0 \end{cases}$$

2. PROCESOS TRANSITORIOS CON TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

2.1. CASO DE TEMPERATURA UNIFORME

Cuerpos de pequeñas dimensiones y conductividad elevada. En dichas condiciones, la temperatura en el interior del cuerpo se puede considerar uniforme en cualquier instante de tiempo:

$$T = T(t)$$

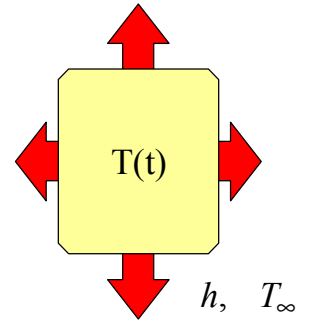
$$-\rho \cdot V \cdot C \cdot \frac{dT}{dt} = Q_{conv} = h \cdot A \cdot (T - T_{\infty}) \Rightarrow \frac{dT}{T - T_{\infty}} = -\frac{h \cdot A}{\rho \cdot C \cdot V} dt$$

Integrando y aplicando la condición inicial de $T=T_i$ en $t=0$:

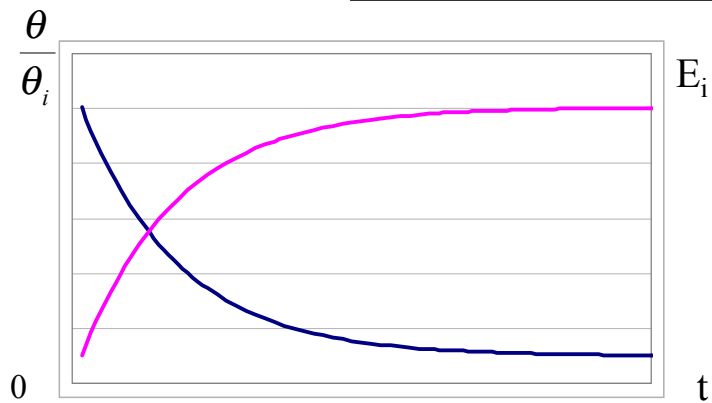
$$\int_{T_i}^T \frac{dT}{T - T_{\infty}} = -\int_0^t \frac{A \cdot h}{\rho \cdot V \cdot C} dt \Rightarrow \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = -\frac{A \cdot h}{\rho \cdot V \cdot C} t$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{A \cdot h}{\rho \cdot V \cdot C} t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{\rho \cdot V \cdot C}{A \cdot h} \text{ (tiempo característico)}$$



() En caso de existir también intercambio por radiación se puede, bien introducir la ecuación de calor intercambiado, o bien, utilizar el concepto de coeficiente equivalente a la radiación.*



La energía total intercambiada hasta un tiempo t es:

$$E(t) = -m \cdot C_p \cdot \int_0^T dT = \int_0^t q \cdot A \cdot dt = \int_0^t A \cdot h \cdot \theta \cdot dt = \rho \cdot V \cdot C \cdot \theta_i \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E_i \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\frac{E}{E_i} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

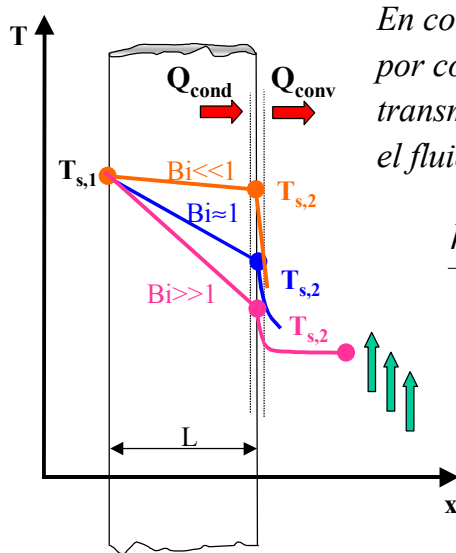
Siendo E_i la variación de energía interna que sufriría la pieza si llegase al equilibrio térmico con el fluido que la rodea.

$$E_i = \rho \cdot V \cdot C \cdot \theta_i$$

2.2. VARIACIÓN ESPACIAL DE LA TEMPERATURA.

PARÁMETROS ADIMENSIONALES

Comparación entre la variación de temperatura en el interior de la pieza (conducción) con la variación de temperatura en el fluido.



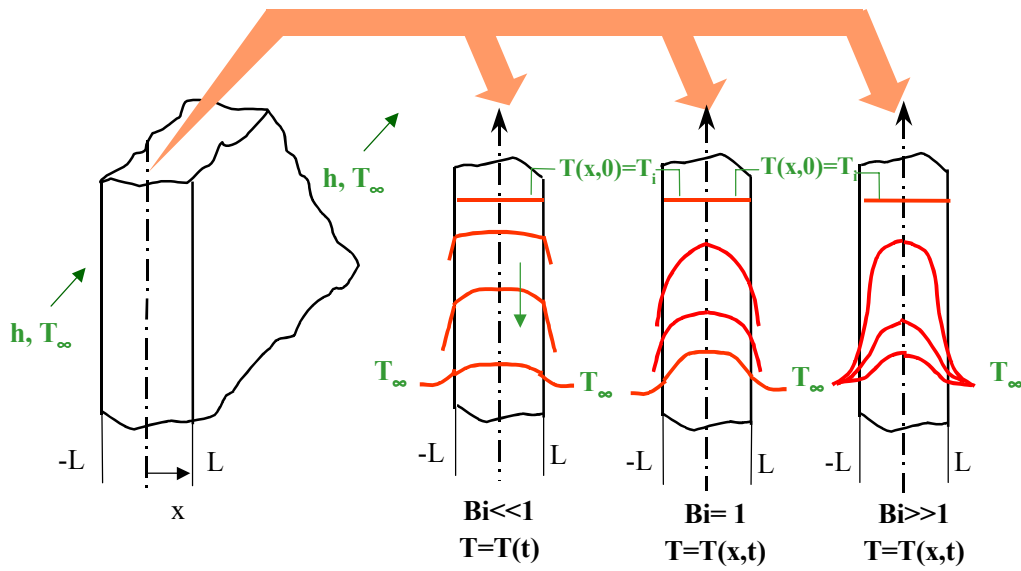
En condiciones estacionarias, el calor que se transmite por conducción en la placa ha de ser igual al que se transmite por convección entre la superficie de la placa y el fluido en contacto con ésta

$$\frac{k_{placa} \cdot A}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) = h \cdot A (T_{s,2} - T_{\infty})$$

$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_{\infty}} = \frac{L/k_{placa} \cdot A}{1/h \cdot A} = \frac{R_{conduc.}}{R_{convec.}} = \frac{h \cdot L}{k_{placa}}$$

Número de Biot: $Bi = \frac{h \cdot L}{k_{solido}}$

EVOLUCIÓN DE TEMPERATURAS EN FUNCIÓN DEL VALOR DEL NUMERO DE BIOT:



Se considera adecuada la utilización del modelo de temperatura uniforme si $Bi \ll 1$.

$$Bi = \frac{h \cdot L_{carac.}}{k} \Rightarrow L_{carac.} = \frac{V}{A_{intercambio}} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{pared plana } (e = 2L) \rightarrow L_{carac.} = L \\ \text{cilindro muy largo } (r_o) \rightarrow L_{carac.} = \frac{r_o}{2} \\ \text{esfera } (r_o) \rightarrow L_{carac.} = \frac{r_o}{3} \end{array} \right\}$$

En la práctica la solución de temperatura uniforme es aceptable en las siguientes condiciones:

Placas: $Bi < 0.1$

Cilindro: $Bi < 0.05$

Esferas: $Bi < 0.03$

(Diferencia de temperatura entre superficie y centro inferior al 5%)

El modelo de temperatura uniforme anteriormente desarrollado se puede caracterizar en función del parámetro adimensional de Biot:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\frac{A \cdot h}{\rho \cdot V \cdot C_p} \cdot t} = e^{-\frac{h \cdot L_c}{k} \cdot \frac{k}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{t}{L_c \cdot L_c}} = e^{-Bi \cdot Fo} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{h \cdot L_c}{k} = Bi \\ \frac{\alpha \cdot t}{L_c^2} = Fo \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

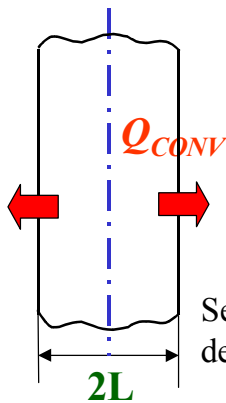
Generándose de esta forma un nuevo número adimensional, número de Fourier, **Fo**, tiempo adimensional característico del transitorio.

TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN TRANSITORIA UNIDIRECCIONAL.

ECUACION GENERAL

La ecuación general de conducción, para propiedades constantes, y sin generación interna de calor, es:

$$\rho \cdot Cp \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = g + k \cdot \Delta T \Rightarrow \rho \cdot Cp \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \Delta T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$$



SOLUCIÓN PARA PLACA PLANA, DE ESPESOR 2L, CON CONVECCIÓN POR AMBOS LADOS:

En una sola dirección en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \text{en función de } \theta \Rightarrow \begin{cases} \theta(x,t) = T(x,t) - T_o \\ \theta(x,t) = X(x) \cdot T(t) \end{cases}$$

Se introduce la diferencia de temperaturas, y de nuevo el método de separación de variables:

$$\theta(x,t) = e^{-\lambda^2 \alpha t} \cdot (B_1 \cdot \text{sen } \lambda x + B_2 \cdot \text{cos } \lambda x)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \cdot Fo} \cdot \frac{2 \cdot \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cdot \cos \lambda_n} \cdot \cos \lambda_n \cdot \frac{x}{L} \quad \text{siendo}$$

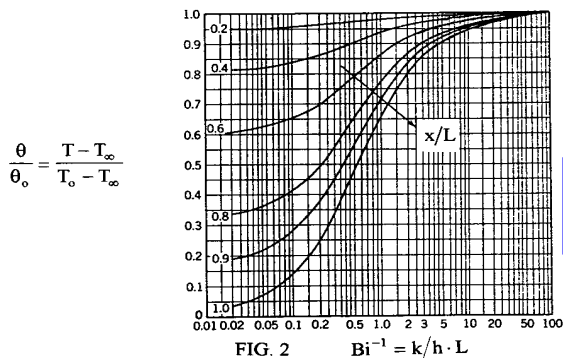
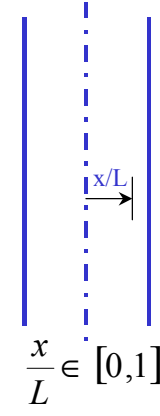
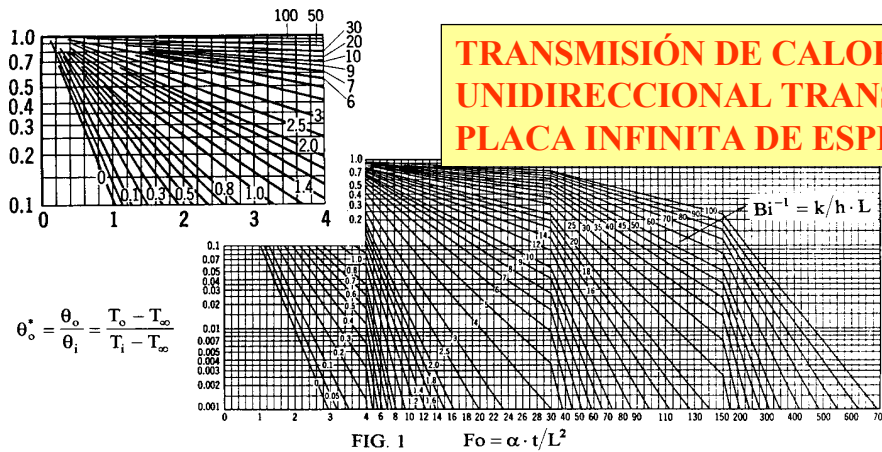
$$\lambda_n / \cot \lambda_n = \frac{\lambda_n}{Bi}$$

SOLUCIÓN APROXIMADA DE HEISLER

TRANSMISIÓN DE CALOR CONVECTIVA EN PLACAS, CILINDROS Y ESFERAS EN RÉGIMEN TRANSITORIO.

- Cálculo analítico de la solución de la ecuación anterior. Hoy en día solución analítica fácilmente programable.
- Resolución por métodos numéricos.
- Primeras gráficas de respuesta de temperatura (1923)
- Sólo válido para condiciones de temperatura inicial uniforme
- **Heisler** (1947): aproximación con un término de la serie funcional solución . **Limitaciones:**
 - *No son válidas para $Fo < 0.2$*
 - *Gráficos difíciles de leer para $Fo < 1$*

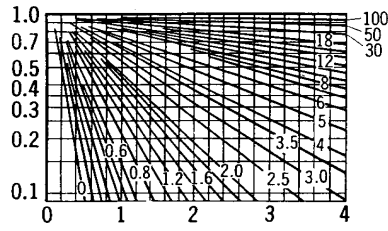
TRANSMISIÓN DE CALOR UNIDIRECCIONAL TRANSITORIA PARA PLACA INFINITA DE ESPESOR 2L



$$\frac{T(x,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{\text{FIG.2}} \cdot \left(\frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{FIG.1}}$$

J.M. Corberán, R. Royo (UPV) T_0 : temperatura en el plano central de la placa = $T(x=0,t)$

TRANSMISIÓN DE CALOR UNIDIRECCIONAL TRANSITORIA PARA CILINDRO DE RADIO r_0 Y LONGITUD INFINITA



$$\theta_0 = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

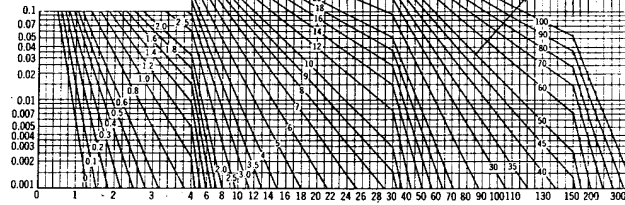
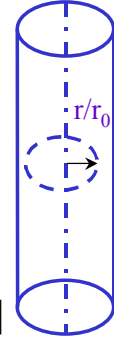


FIG. 3 $Fo = \alpha \cdot t / r_0^2$

$$\frac{r}{r_0} \in [0,1]$$



$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$

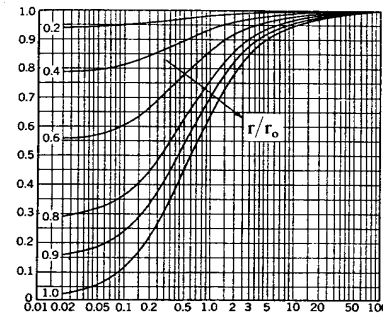


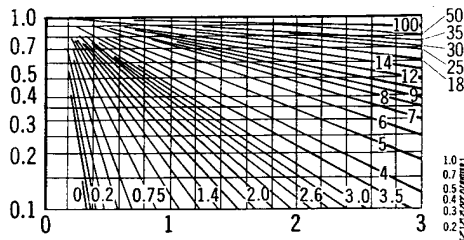
FIG. 4 $Bi^{-1} = k/h \cdot r_0$

$$\frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} \right)_{\text{FIG.4}} \cdot \left(\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{FIG.3}}$$

T_o : temperatura en el eje del cilindro= $T(r=0,t)$

Tema6: Transmisión de calor multidireccional y transitoria

TRANSMISIÓN DE CALOR UNIDIRECCIONAL TRANSITORIA PARA UNA ESFERA DE RADIO r_0



$$\theta_0^* = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

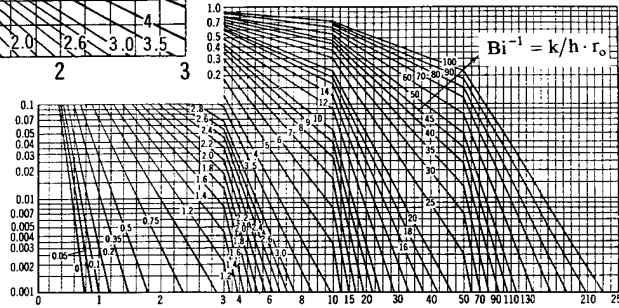
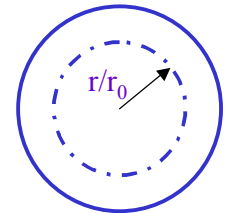


FIG.5 $Fo = \alpha \cdot t / r_0^2$



$$\frac{r}{r_0} \in [0,1]$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

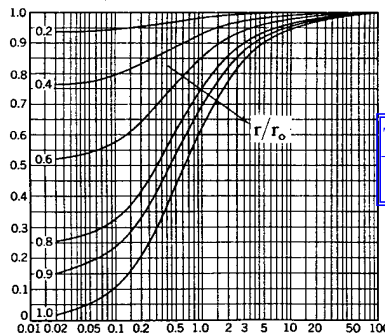


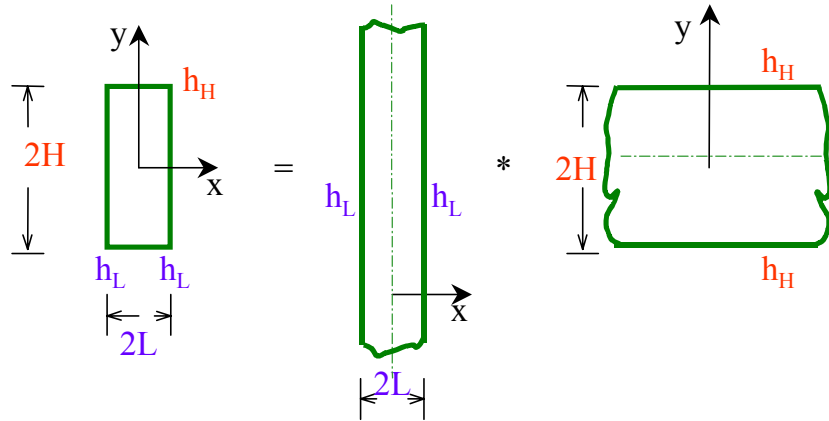
FIG.6 $Bi^{-1} = k/h \cdot r_0$

$$\frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{\text{FIG.6}} \cdot \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{FIG.5}}$$

To: temperatura en el centro de la esfera= $T(r=0,t)$

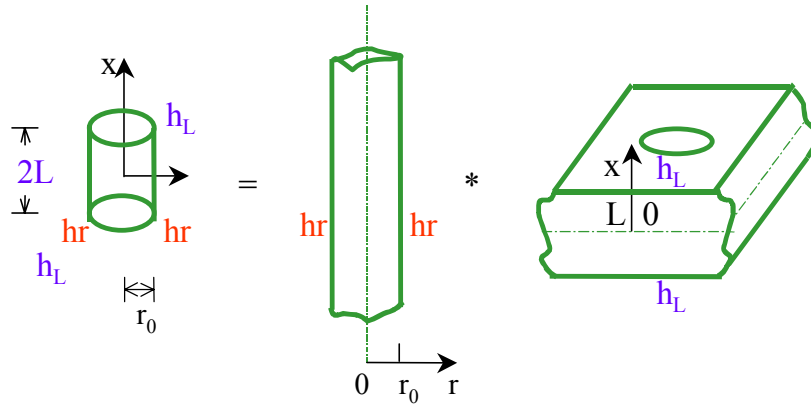
**TRANSMISIÓN DE CALOR BIDIMENSIONAL TRANSITORIA
PLACA DE DIMENSIONES 2L*2H**

SOLUCIÓN BIDIMENSIONAL



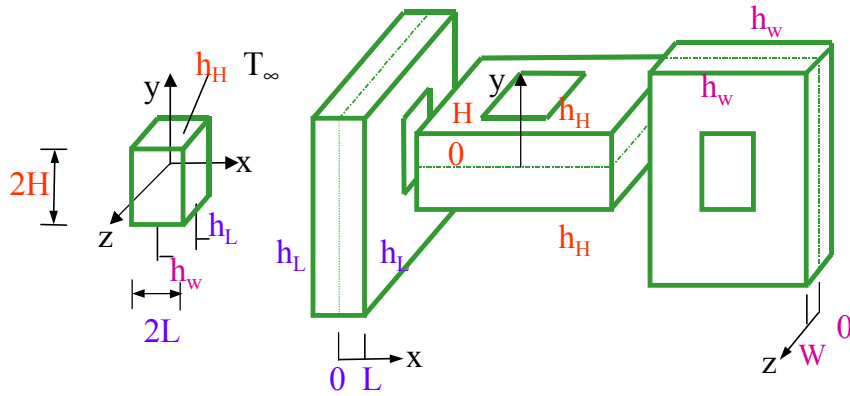
$$\left[\frac{\theta(x, y, t)}{\theta_i} \right]_{2L \cdot 2H} = \left[\frac{\theta(x, t)}{\theta_i} \right]_{PLACA 2L} \cdot \left[\frac{\theta(y, t)}{\theta_i} \right]_{PLACA 2H}$$

CILINDRO DE DIMENSIONES $2L, r_0$



$$\left[\frac{\theta(r, x, t)}{\theta_i} \right]_{\substack{\text{CILINDRO} \\ \text{RADIO } r_0 \\ \text{LONGITUD } 2L}} = \left[\frac{\theta(r, t)}{\theta_i} \right]_{\substack{\text{CILINDRO} \\ \text{RADIO } r_0 \\ \text{INFINITO}}} \cdot \left[\frac{\theta(x, t)}{\theta_i} \right]_{\substack{\text{PLACA} \\ \text{ESPESOR } 2L}}$$

PRISMA DE DIMENSIONES 2L*2H*2W



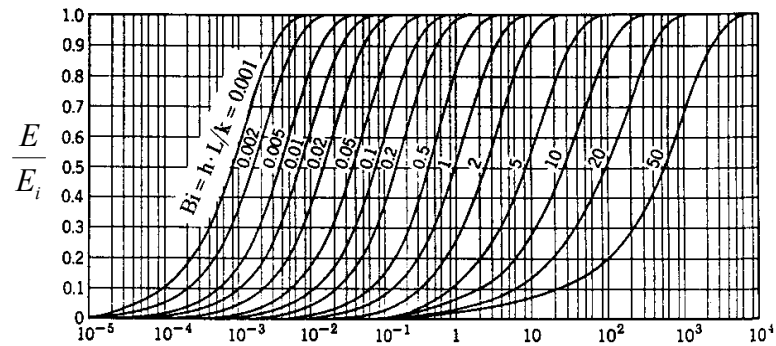
$$\left[\frac{\theta(x, y, z, t)}{\theta_i} \right]_{PRISMA_{2L \cdot 2H \cdot 2W}} = \left[\frac{\theta(x, t)}{\theta_i} \right]_{PLACA2L} \cdot \left[\frac{\theta(y, t)}{\theta_i} \right]_{PLACA2H} \cdot \left[\frac{\theta(z, t)}{\theta_i} \right]_{PLACA2W}$$

ENERGÍA INTERCAMBIADA POR UNA PLACA, UN CILINDRO, Y UNA ESFERA CON EL MEDIO QUE LO RODEA HASTA EL TIEMPO T

$$E(t) = \left(\frac{E}{E_i} \right)_{\text{FIG.7}} \cdot E_i$$

$$E_i = \rho \cdot V \cdot C_p \cdot (T_i - T_\infty)$$

ENERGÍA INTERCAMBIADA POR UNA PLACA



J.M.Corberán, R. Royo (U

FIG. 7

$$Bi^2 \cdot Fo = \frac{h^2 \cdot \alpha \cdot t}{k^2}$$

ENERGÍA INTERCAMBIADA POR EL CILINDRO

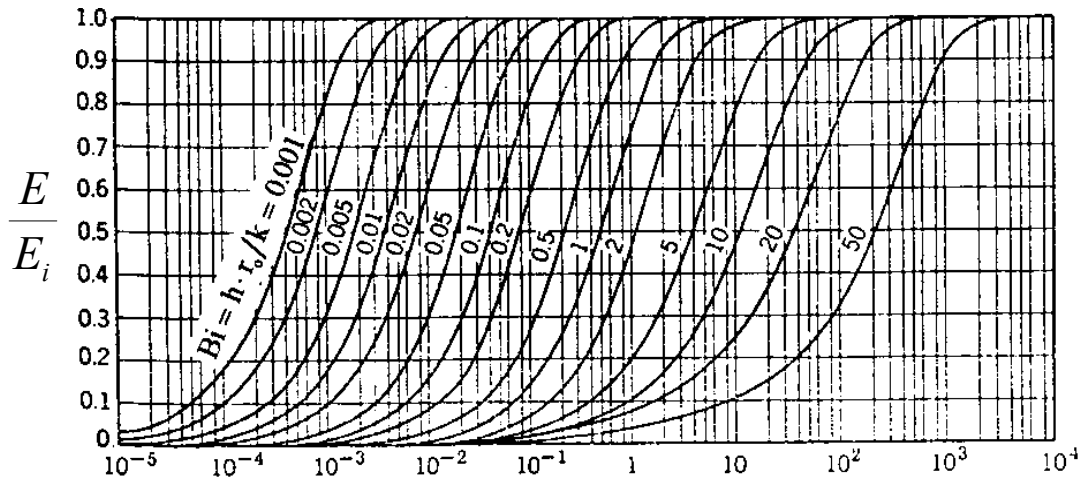


FIG. 8

$$Bi^2 \cdot Fo = \frac{h^2 \cdot \alpha \cdot t}{k^2}$$

ENERGÍA INTERCAMBIADA POR UNA ESFERA

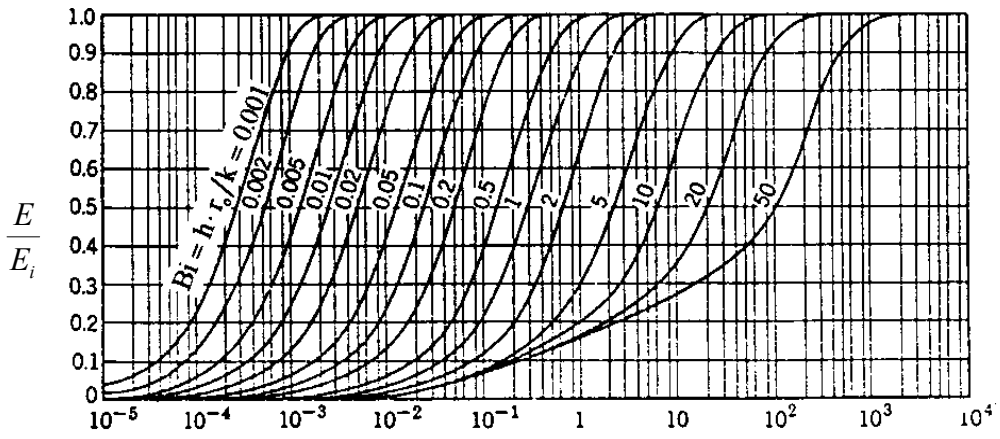


FIG. 9 $Bi^2 \cdot Fo = \frac{h^2 \cdot \alpha \cdot t}{k^2}$