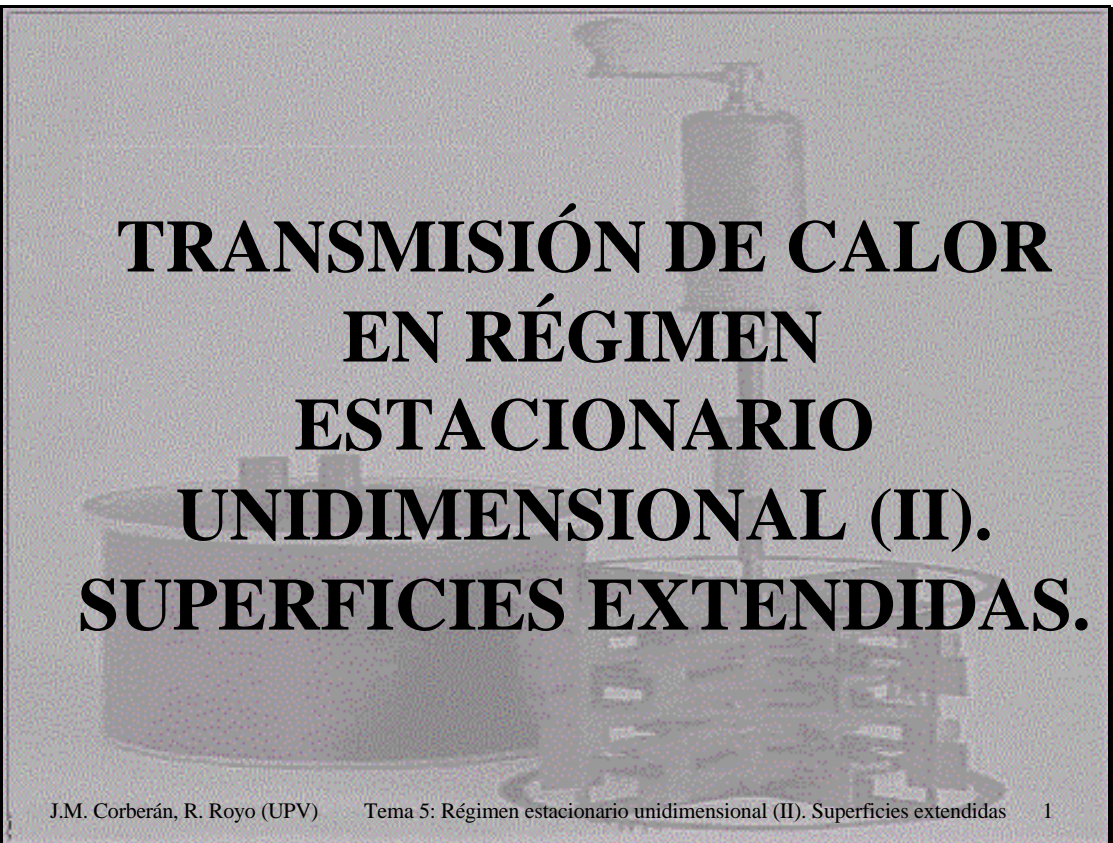


Diapositiva 1



**TRANSMISIÓN DE CALOR  
EN RÉGIMEN  
ESTACIONARIO  
UNIDIMENSIONAL (II).  
SUPERFICIES EXTENDIDAS.**

**INDICE:**

**1. INTRODUCCIÓN.**

**1.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.**

**1.2. CLASIFICACIÓN.**

**2. ECUACIÓN GENERAL.**

**3. ALETAS RECTAS DE SECCIÓN CONSTANTE.**

**3.1. HIPÓTESIS DE CÁLCULO.**

- Aleta muy larga.
- Calor despreciable en el extremo de una aleta.
- Convección en el extremo de la aleta.

**3.2. COMPARACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS  
CON LA APLICACIÓN DE LAS TRES HIPÓTESIS.**

**4. ALETAS DE SECCIÓN VARIABLE. ALETAS ANULARES.**

**5. EFICIENCIA.**

**6. EFECTIVIDAD. CONDICIONES DE UTILIZACIÓN DE ALETAS.**

**7. CARACTERIZACIÓN DE SUPERFICIES ALETEADAS.**

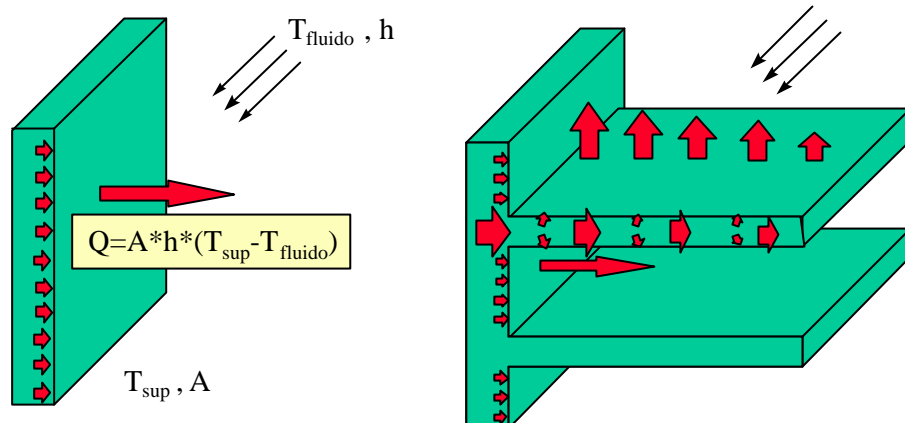
**7.1. RESOLUCIÓN POR ANALOGÍA ELÉCTRICA.**

**7.2. CONFIGURACIONES ALETEADAS COMPLEJAS**

**8. CONSIDERACIONES DE DISEÑO.**

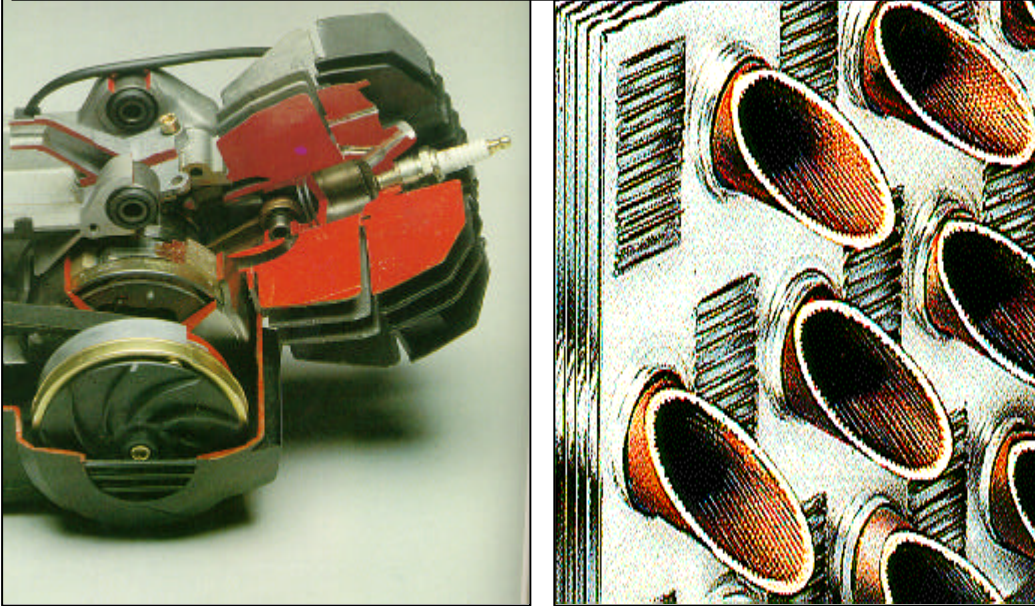
## INTRODUCCIÓN

**OBJETIVO: AUMENTO DEL CALOR DISIPADO POR CONVECCIÓN AL AMBIENTE.**



Diapositiva 4


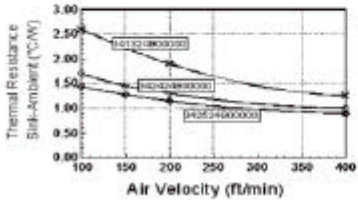
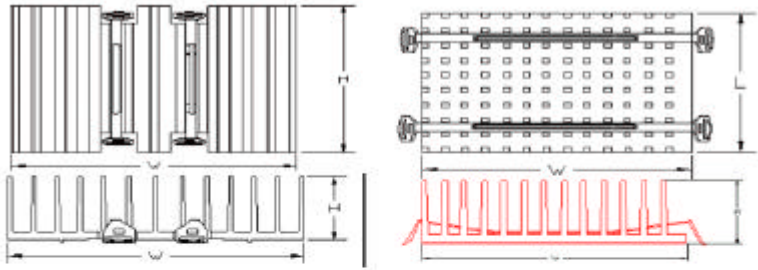
**EJEMPLOS DE APLICACIÓN:**



J.M. Corberán, R. Royo (UPV)    Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas    4

Diapositiva 5

**Thermal Performance Specifications**

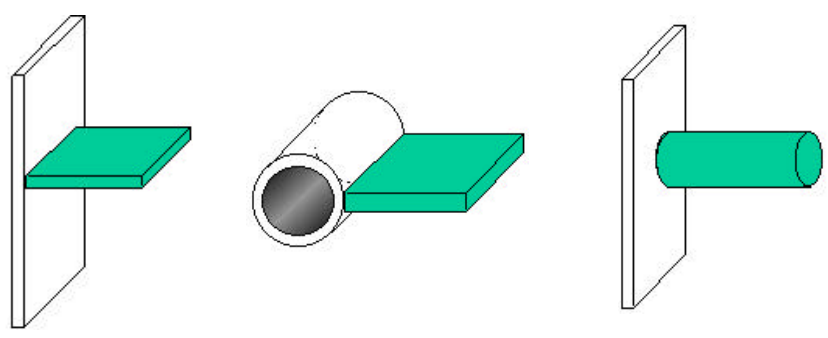


J.M. Corberán, R. Royo (UPV)    Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas    5

Diapositiva 6

**1.2. CLASIFICACIÓN:**

**SECCIÓN CONSTANTE**



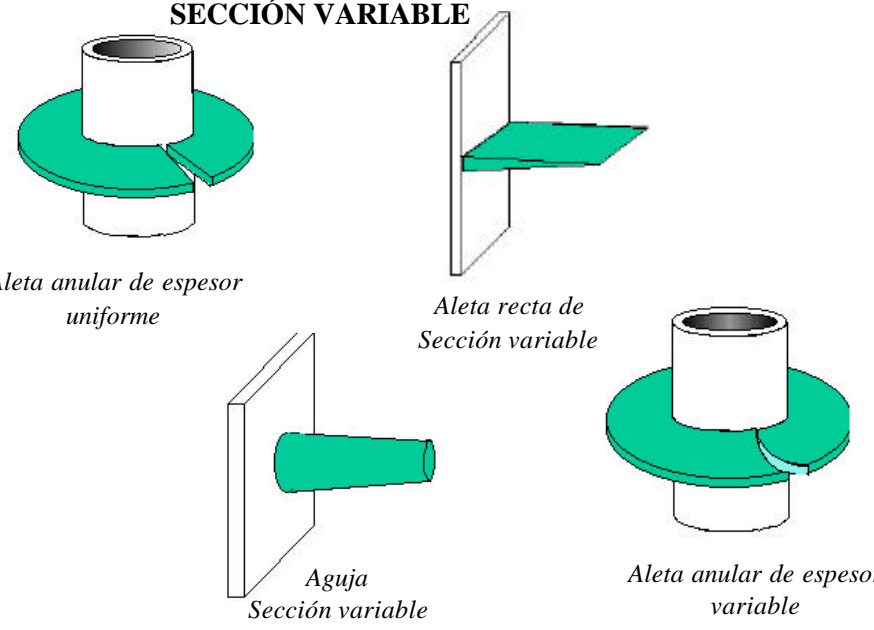
*Aletas rectas*  
*Sección constante*

*Aguja*  
*Sección constante*

J.M. Corberán, R. Royo (UPV) Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas 6

Diapositiva 7

**SECCIÓN VARIABLE**



*Aleta anular de espesor uniforme*

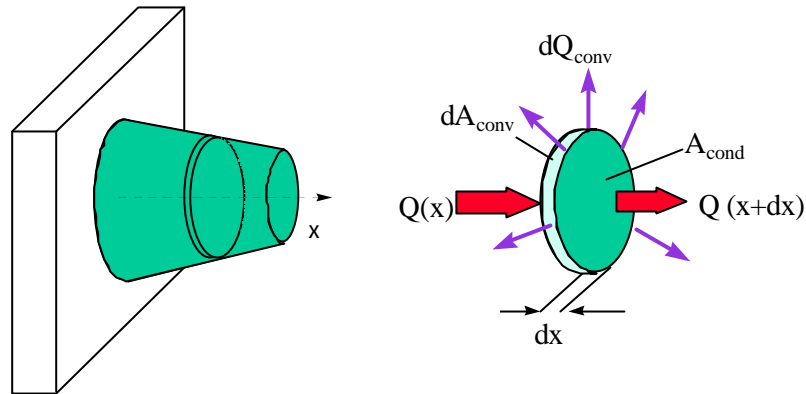
*Aleta recta de Sección variable*

*Aguja*  
*Sección variable*

*Aleta anular de espesor variable*

J.M. Corberán, R. Royo (UPV) Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas 7

## ECUACIÓN GENERAL



**Balance de energía**

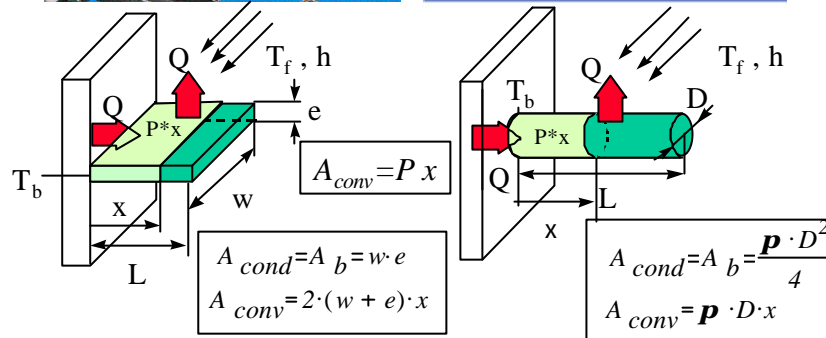
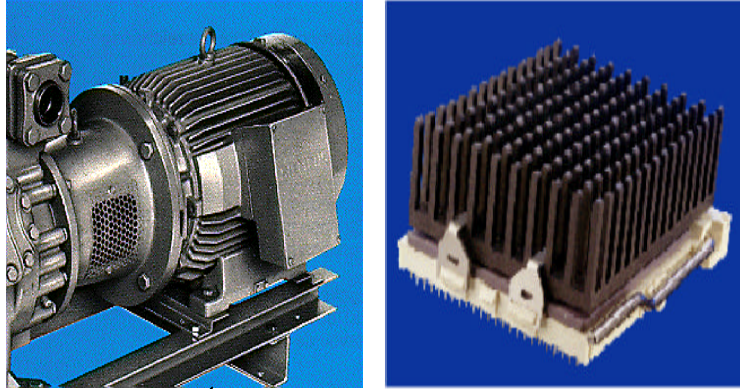
$$Q(x) = Q(x + dx) + dQ_{conv}$$

$$dQ_{conv} = h \cdot (T(x) - T_{\infty}) \cdot dA_{conv}(x) \quad Q(x) = -k \cdot A_{cond}(x) \cdot \frac{dT(x)}{dx}$$

Utilización función de diferencia de temperaturas  $q(x) = T(x) - T_{\infty}$

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{q} + \left( \frac{1}{A_{cond}} \cdot \frac{d}{dx} \cdot A_{cond} \right) \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{q} - \left( \frac{1}{A_{cond}} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{d}{dx} \cdot A_{conv} \right) \cdot \mathbf{q} = 0$$

## AGUJAS Y ALETAS RECTAS DE SECCIÓN CONSTANTE



Diapositiva 10

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_{cond}} \cdot \frac{d}{dx} \cdot A_{cond} \right) \cdot \frac{d \mathbf{q}}{dx} - \left( \frac{1}{A_{cond}} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{d}{dx} \cdot A_{conv} \right) \cdot \mathbf{q} = 0$$

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dx^2} - m^2 \cdot \mathbf{q} = 0$$

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot A_{cond}}}$$

$$\mathbf{q}(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x} = C_3 \cdot sh(m \cdot (L - x)) + C_4 \cdot ch(m \cdot (L - x))$$

$$Q_{aleta} = Q(x=0) = -A_b \cdot k \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -A_b \cdot k \cdot \left. \frac{d\mathbf{q}}{dx} \right|_{x=0}$$



## CONDICIONES DE CONTORNO:

1)  $T(x=0) = T_B$

$T_B$

$T_{FLUIDO}$

$L$

$T(L) \rightarrow T_{FLUIDO}$

2)  $T(x=L) = ??$

$T_B$

$T_{FLUIDO}$

$L$

$Q_{EXTREMO} = 0$   
 $\frac{dT}{dx}(L) = 0$

$T_B$

$T_{FLUIDO}$

$L$

$Q_{COND} = Q_{CONV}$   
 $-k \cdot \frac{dT}{dx}(L) = h \cdot (T(L) - T_{fluido})$

$T_B$

$T(L)$

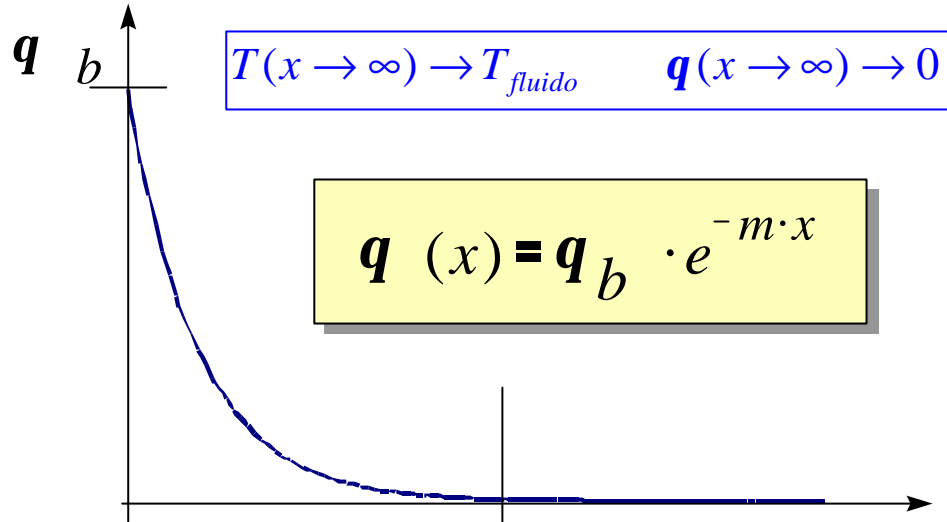
$T_{FLUIDO}$

$L$

$T(x=L) = T_{conocida}$

J.M. Corberán, R. Royo (UPV)    Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas    11

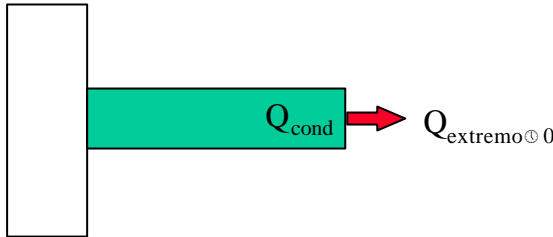
**(I): ALETA MUY LARGA**



$$Q_{\text{aleta}} = A_b \cdot k \cdot m \cdot \mathbf{q}_b = h \cdot A_b \cdot \mathbf{q}_b \cdot \frac{m \cdot k}{h} = Q_{\text{base\_sin\_aleta}} \cdot \frac{m \cdot k}{h}$$

**(II) CALOR DESPRECIABLE EN EL EXTREMO DE LA ALETA**

*En muchas ocasiones  $Q_{extremo}$  es despreciable frente al disipado por el resto de la aleta:*

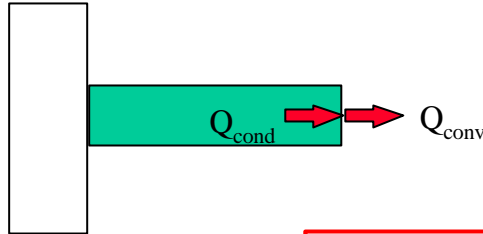


$$\left. \frac{dq}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$q(x) = q_b \cdot \frac{ch(m \cdot (L - x))}{ch(m \cdot L)}$$

$$Q_{aleta} = h \cdot A_b \cdot q_b \cdot \frac{m \cdot k}{h} \cdot th(m \cdot L) = Q_{basesin aleta} \cdot \frac{m \cdot k}{h} \cdot th(m \cdot L)$$

**(III) CONVECCIÓN EN EL EXTREMO DE LA ALETA:**



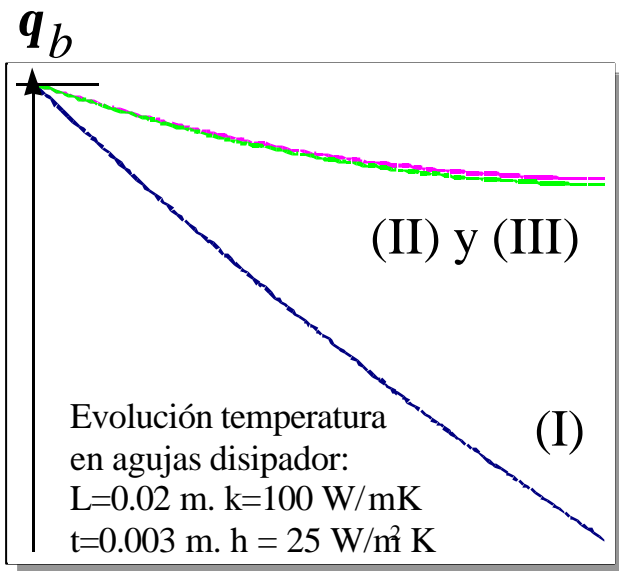
$$-k \cdot A_b \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h \cdot (T - T_\infty)$$

$$q(x) = q_b \cdot \frac{ch(m \cdot (L-x)) + \frac{h}{m \cdot k} \cdot sh(m \cdot (L-x))}{ch(m \cdot L) + \frac{h}{m \cdot k} \cdot sh(m \cdot L)}$$

$$Q_{aleta} = h \cdot q_b \cdot A_b \cdot \frac{\frac{m \cdot k}{h} \cdot th(m \cdot L) + 1}{1 + \frac{th(m \cdot L)}{\left(\frac{m \cdot k}{h}\right)}} = Q_{base \sin \ aleta} \cdot \frac{\frac{m \cdot k}{h} \cdot th(m \cdot L) + 1}{1 + \frac{th(m \cdot L)}{\left(\frac{m \cdot k}{h}\right)}}$$

**COMPARACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LA APLICACIÓN DE LAS TRES HIPÓTESIS.**

*Aplicación de agujas en disipador*

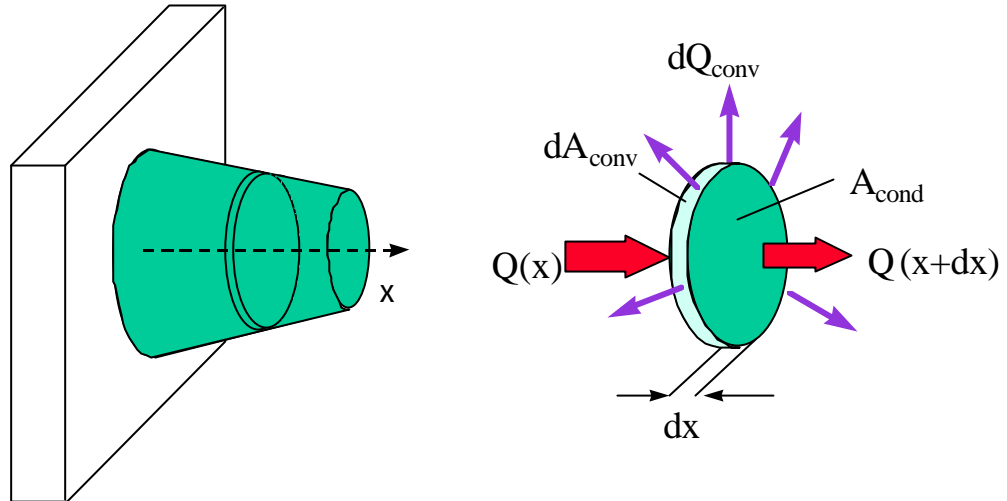


(I):  $T(x \rightarrow \infty) \rightarrow T_{fluido}$

(II):  $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0$

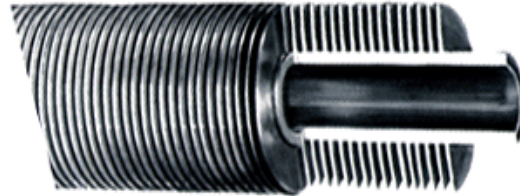
(III):  $-k \cdot A_b \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h \cdot (T - T_{\infty})$

## ALETAS DE SECCIÓN VARIABLE



$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{q} + \left( \frac{1}{A_{cond}} \frac{d}{dx} A_{cond} \right) \frac{d}{dx} \mathbf{q} - \left( \frac{1}{A_{cond}} \frac{h}{k} \frac{d}{dx} A_{conv} \right) \cdot \mathbf{q} = 0$$

**CASO MÁS SIMPLE DE ALETA DE SECCIÓN VARIABLE:  
ALETA ANULAR.**



**Superficies:**  $A_{cond} = 2 \cdot p \cdot r \cdot e$        $A_{conv} = 2 \cdot p \cdot (r^2 - r_{base}^2)$

$$\frac{d^2}{dr^2} \cdot q + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot q - n^2 \cdot q = 0$$

$$n = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{k \cdot e}}$$

$$q(x) = C_1 \cdot I(n \cdot r)_0 + C_2 \cdot K(n \cdot r)_0$$

*I y K: funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie, orden 0.*

**Hipótesis:** convección despreciable en el extremo.

–Distribución de temperaturas:

$$\mathbf{q}(r) = \mathbf{q}_b \cdot \frac{I(n \cdot r)_0 \cdot K(n \cdot r_e)_1 + K(n \cdot r)_0 \cdot I(n \cdot r_e)_1}{I(n \cdot r_b)_0 \cdot K(n \cdot r_e)_1 + K(n \cdot r_b)_0 \cdot I(n \cdot r_e)_1}$$

**Potencia calorífica:**

$$Q_{aleta} = h \cdot 2 \cdot \mathbf{p} \cdot r_b \cdot e \cdot \mathbf{q}_b \cdot \frac{k \cdot n}{h} \cdot \frac{K(n \cdot r_b)_1 \cdot I(n \cdot r_e)_1 - K(n \cdot r_e)_1 \cdot I(n \cdot r_b)_1}{I(n \cdot r_b)_0 \cdot K(n \cdot r_e)_1 + K(n \cdot r_b)_0 \cdot I(n \cdot r_e)_1}$$



## **EFICIENCIA**

*Efficiency of extended surfaces, Gardner, K.A.*  
(ASME Thermal Engineering Proceedings, 1945)

### **Hipótesis:**

- *Transmisión de calor unidimensional.*
- *Coefficiente de convección uniforme.*
- *Temperatura de la base uniforme.*
- *Flujo de calor despreciable en extremo.*

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{q} + \left( \frac{1}{A_{cond}} \cdot \frac{d}{dx} \cdot A_{cond} \right) \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{q} - \left( \frac{1}{A_{cond}} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{d}{dx} \cdot A_{conv} \right) \cdot \mathbf{q} = 0$$

$$2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{q} + [(1-2 \cdot m) \cdot x - 2 \cdot a \cdot x^2] \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{q} + [p^2 \cdot c^2 \cdot x^{2p} + a^2 \cdot x^2 + a \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot x + m^2 - p^2 \cdot n^2] \cdot \mathbf{q} = 0$$

Resultados tabulados a través del parámetro *eficiencia*:  
 (Ojo, llamada efectividad en el libro A.F. Mills)

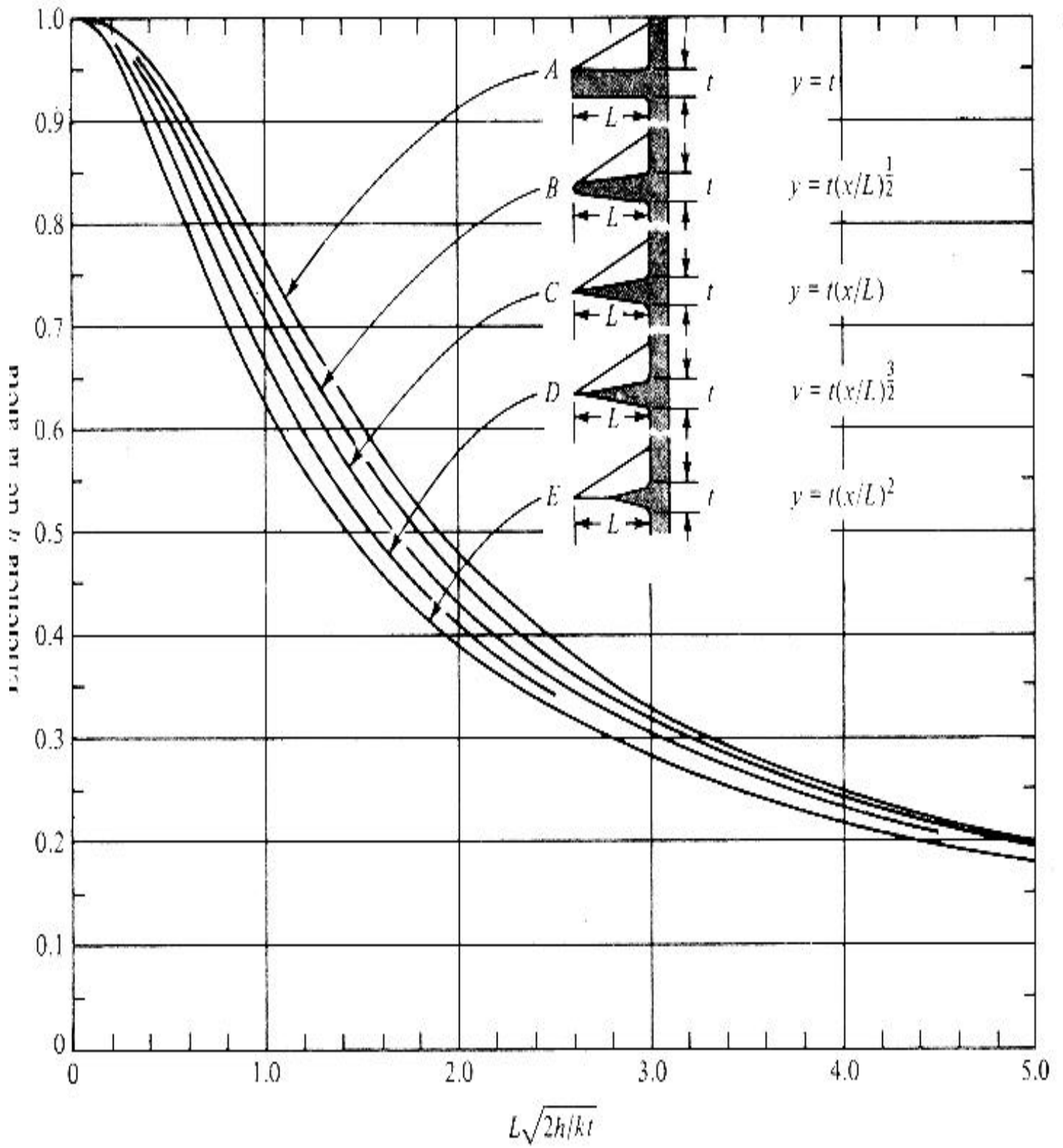
$$h = \frac{Q_{aleta}}{Q_{aleta\_temperatura\_base}}$$

$$h = \frac{Q_{aleta}}{h \cdot A_{conv} \cdot q_b} = \frac{\int_0^{A_{conv}} \mathbf{q} \cdot dA_{conv}}{q_b \cdot A_{conv}} = \frac{(T - T_{fluido})_{media}}{T_{base} - T_{fluido}}$$

*Aplicación práctica fundamental a efectos de cálculo:*

$$A_{conv} = A_{aleta}$$

$$Q_{aleta} = h \cdot A_{aleta} \cdot h \cdot q_b$$



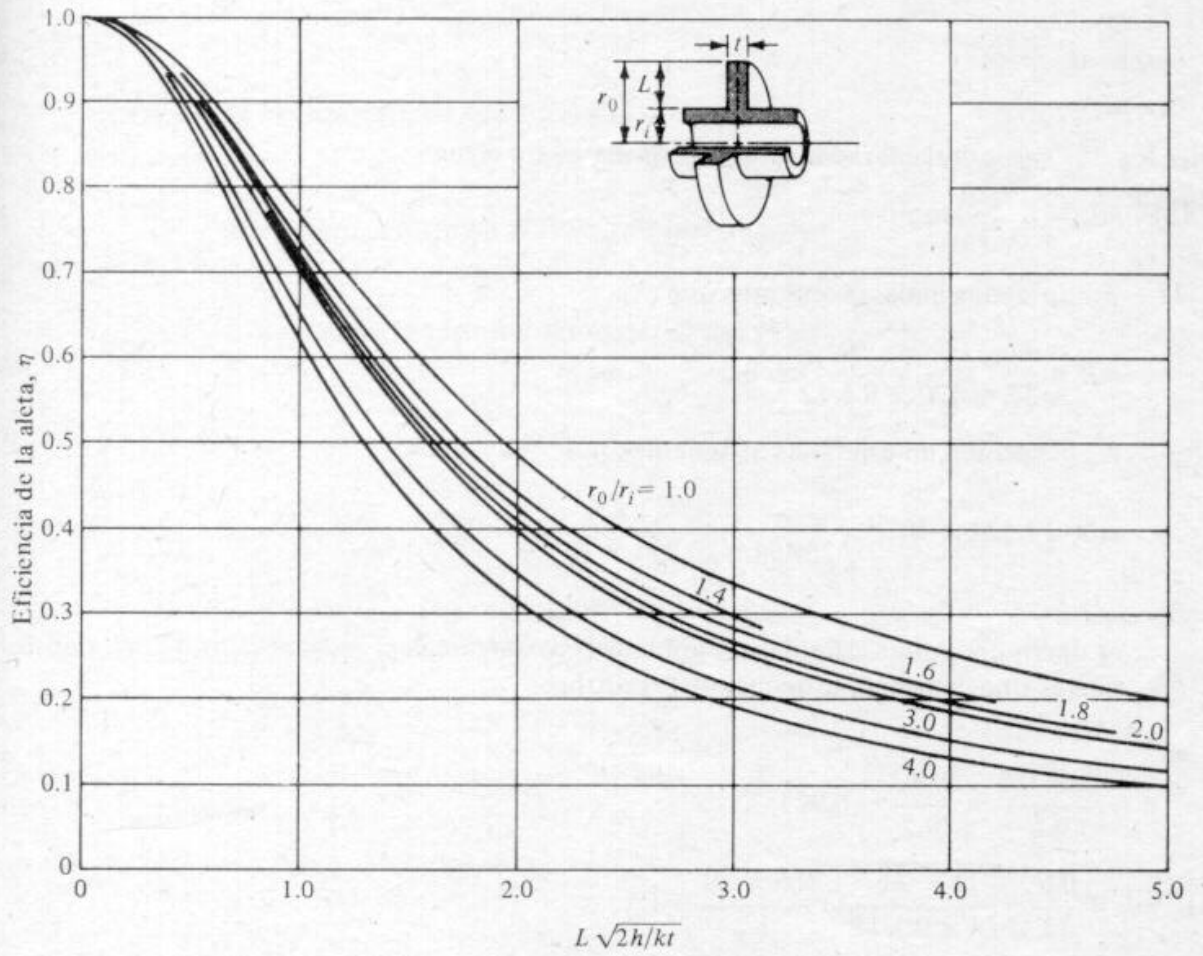


FIG. 3-12 Eficiencia de aletas de discos circulares de espesor constante. (Tomada de Gardner [8].)

### **EFFECTIVIDAD DE UNA ALETA:**

$$\mathbf{e} = \frac{Q_{aleta}}{h \cdot A_b \cdot q_b}$$

$$\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{h}} = \frac{A_{aleta}}{A_{base}}$$

*Evaluación de la conveniencia de utilización de aletas*

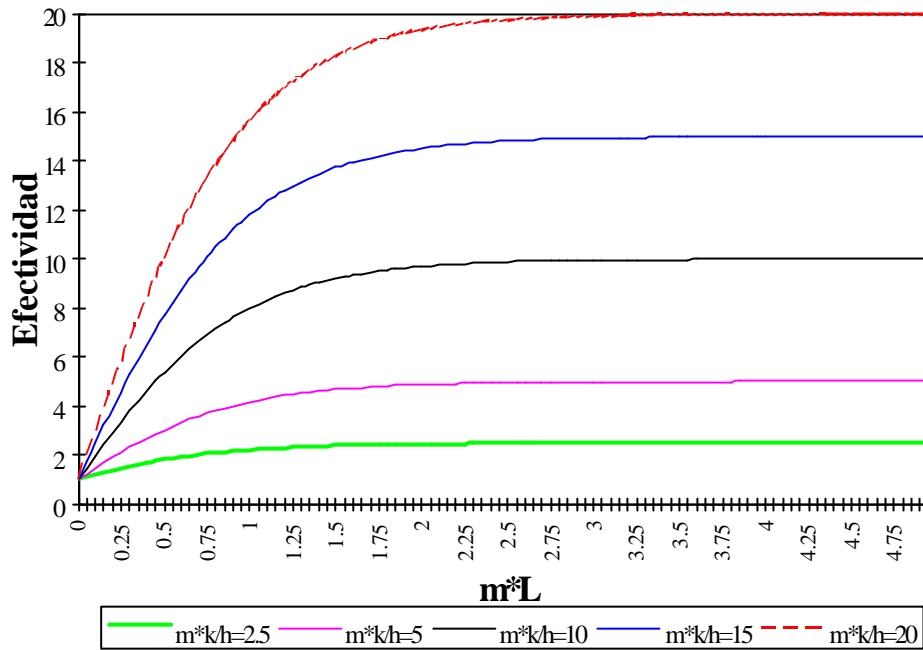
Se justifica la **utilización de aletas**, si  $\mathbf{e}_{aleta}$  **mayor que 2**

**Para aletas de sección constante y convección despreciable en el extremo:**

$$\mathbf{e} = \frac{m \cdot k}{h} \cdot th(m \cdot L)$$

$$\mathbf{h} = \frac{A_b}{A_{aleta}} \cdot \frac{m \cdot k}{h} \cdot th(m \cdot L) = \frac{A_b}{P \cdot L} \cdot \frac{m \cdot k}{h} \cdot th(m \cdot L)$$

**EFFECTIVIDAD DE UNA ALETA DE SECCIÓN CONSTANTE CONSIDERANDO CONVECCIÓN EN EL EXTREMO.**



**Empleo de aletas justificado:**

$$\frac{m \cdot k}{h} \gg 1$$

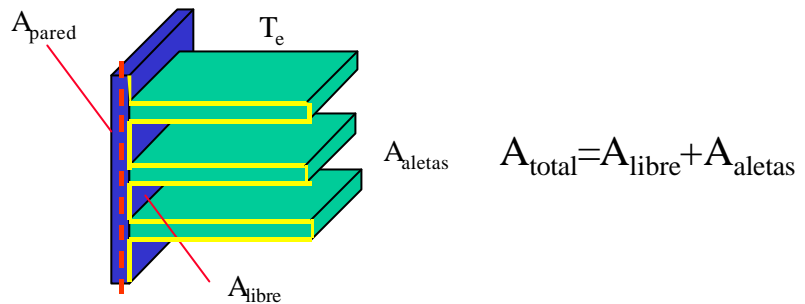
(recomendable superior a 10)

**Sección constante:**

$$\frac{m \cdot k}{h} = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{t \cdot h}} \gg 1:$$

- **k alta:** *materiales conductividad elevada*
- **t bajo:** *espesor aletas pequeño*
- **h bajo:** *en entornos con convección débil*

## CARACTERIZACIÓN DE SUPERFICIES ALETEADAS



$$Q_{superficie\_aleteada} = Q_{aletas} + Q_{area\_libre}$$

$$Q_{superficie\_aleteada} = h \cdot A_{aletas} \cdot h \cdot q_b + (A_{total} - A_{aletas}) \cdot h \cdot q_b$$

Se define el parámetro geométrico:

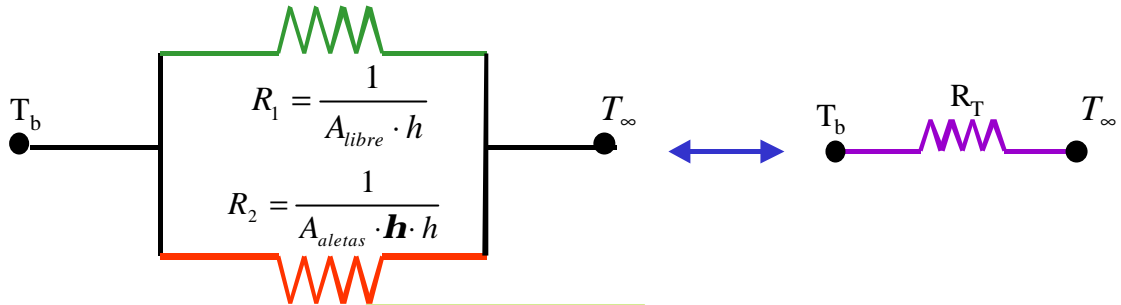
$$b = \frac{A_{aletas}}{A_{total}}$$

$$Q_{superficie\_aleteada} = A_{total} \cdot h \cdot q_b \cdot (b \cdot h + 1 - b) = A_{total} \cdot h \cdot q_b \cdot h_{pond}$$

$$h_{pond} = b \cdot h + 1 - b$$



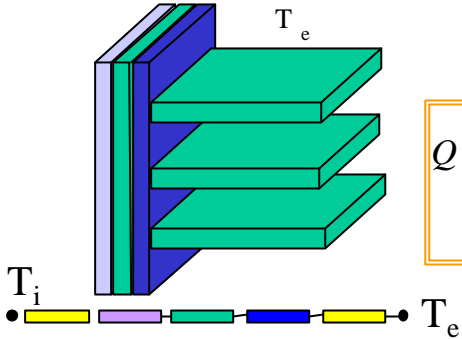

**RESOLUCIÓN POR ANALOGÍA ELÉCTRICA EN PARALELO:**



$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_T = \frac{1}{A_{libre} \cdot h + A_{aletas} \cdot h \cdot h}$$

$$R_T = \frac{1}{A_{total} \cdot h \cdot \left( \frac{A_{libre}}{A_{total}} + \frac{A_{aletas}}{A_{total}} \cdot h \right)} = \frac{1}{A_{total} \cdot h \cdot h_{pond}}$$

**Muros multicapa**

$$Q = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i \cdot A_{pared}} + \sum_i \frac{e_i}{k_i \cdot A_{pared}} + \frac{1}{h_{pond} \cdot h_e \cdot A_{total}}}$$

**Cilindros**

$$Q = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{2 \cdot p \cdot r_i \cdot L \cdot h_i} + \sum_j \frac{\ln\left(\frac{r_{j+1}}{r_j}\right)}{2 \cdot p \cdot L \cdot k_i} + \frac{1}{h_{pond} \cdot h_e \cdot A_{total}}}$$

**En cada caso el calor se calcula referido a un área característica, que suele ser la interior o la exterior de la superficie global:**

$Q = A_{ref} \cdot U_{A_{ref}} \cdot (T_i - T_e)$

$U_{A_{ref}} = \frac{Q}{A_{ref} \cdot (T_i - T_e)}$

J.M. Corberán, R. Royo (UPV)
Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas
27

Diapositiva 28

**CONFIGURACIONES ALETEADAS COMPLEJAS**




J.M. Corberán, R. Royo (UPV)    Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas    28

Diapositiva 29

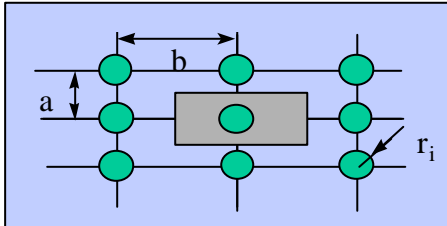
ASHRAE, 1993:

$$h = \frac{th(m \cdot r_i \cdot f)}{m \cdot r_i}$$

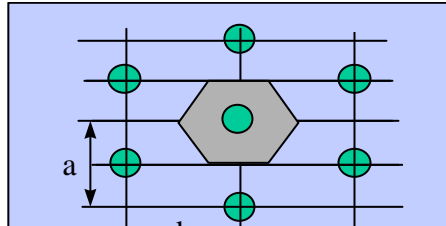
$$m = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{k \cdot e}}$$

$$f = (a-1) \cdot (1 + 0.35 \cdot \ln(a))$$

$$a = f(a,b)$$



"Configuración rectangular"



"Configuración hexagonal"

J.M. Corberán, R. Royo (UPV)    Tema 5: Régimen estacionario unidimensional (II). Superficies extendidas    29

## **CONSIDERACIONES DE DISEÑO**

- Perfil óptimo para la disipación de una potencia térmica con el mínimo volumen.
- Dimensiones óptimas para un determinado volumen de aleta.
- Espaciado óptimo entre aletas.
- Elección del material.
- Contacto térmico con la base.

## **APLICACIONES TEORÍA CONDUCCIÓN-CONVECCIÓN 1D.**

- Extrusión de fibras.
- Cables eléctricos.
- Colectores solares.
- Medida de temperatura de una gas con un termopar.