Diapositiva 1

Diapositiva 2

ÍNDICE

1. PARTICULARIZACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL

2. PAREDES PLANAS MULTICAPA

- **2.1. RESISTENCIA TÉRMICA DE CONDUCCIÓN. RESISTENCIA TÉRMICA DE CONTACTO**
- **2.2. ANÁLISIS DEL MURO MULTICAPA**
- **2.3.COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR**

3. CONDUCTOS MULTICAPA

- **3.1. RESISTENCIA TÉRMICA DE CONDUCCIÓN.**
- **3.2. ANÁLISIS DEL CONDUCTO MULTICAPA.**
- **3.3. COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSMISIÓN**
- **3.4. RADIO CRÍTICO DE AISLAMIENTO**

4. MODELIZACIÓN MEDIANTE ANALOGÍA ELÉCTRICA

5. ESTUDIO DE MUROS COMPUESTOS MEDIANTE LA TEORÍA UNIDIMENSIONAL. LIMITACIONES DEL MÉTODO.

Diapositiva 3

1. PARTICULARIZACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL

•*Ecuación general de la conducción del calor*

$$\boxed{\nabla\left(k\cdot\nabla T\right)+g=r\cdot C\cdot\frac{¶\,T}{¶\,t}}$$

•*Régimen permanente:*

$$\left(\frac{¶T}{¶t}=0\right)\Rightarrow\nabla\left(k\cdot\nabla T\right)+g=0$$

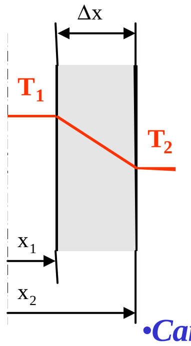
•*Unidimensional (cartesianas):*

$$\frac{d}{dx}\left(k\cdot\frac{dT}{dx}\right)+g=0$$

Diapositiva 4

2. PAREDES PLANAS MULTICAPA.

PARED PLANA CON T^as DE CONTORNO CONOCIDAS



Supongamos g=0 $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(k \cdot \frac{dT}{dx}\right) = 0$

k=cte $\Rightarrow$ $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \\ T = T_1 en x = x_1 \\ T = T_2 en x = x_2 \end{array} \right\}$

•*Campo de temperaturas* $\boxed{T = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$

Si g es nula y k constante, la distribución de temperaturas a través de una pared plana es función lineal.

•*Aplicando la ley de Fourier*

$$\boxed{Q = A \cdot q = -A \cdot k \cdot \frac{dT}{dx} = -A \cdot k \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{A \cdot k}{\Delta x} \cdot (T_1 - T_2)}$$

Diapositiva 5

2.1. RESISTENCIA TÉRMICA DE CONDUCCIÓN. RESISTENCIA TÉRMICA DE CONTACTO

RESISTENCIA TÉRMICA DE CONDUCCIÓN

Analogía eléctrica a partir de la ley de Ohm: $I = \frac{\Delta V}{R}$ $\quad Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x}{A \cdot k}}$

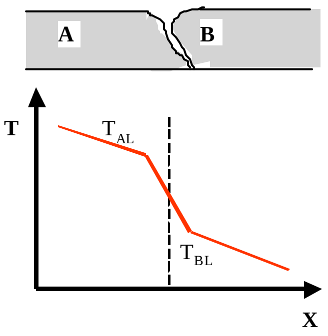
- El calor transmitido análogo a una intensidad **(Q□I).**
- La diferencia de temperaturas análogo a una diferencia de potenciales **(T_1-T_2 □□V).**
- De esta manera el término $\frac{\Delta x}{A \cdot k}$ análogo a una resistencia eléctrica R.
  - Resistencia térmica de conducción❾ $\boxed{R_{con} = \frac{\Delta x}{A \cdot k}(K/W)}$

$$\boxed{Q = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{con}}}$$

Diapositiva 6

RESISTENCIA TÉRMICA DE CONTACTO

RESISTIVIDAD TÉRMICA DE CONTACTO



•En la zona de unión entre capas, debido a las irregularidades superficiales el contacto no es perfecto, y el calor se transmite por radiación, conducción y convección.

•Se asocia una resistividad térmica de contacto que relaciona el calor transmitido en la interfase entre dos materiales con la variación de temperatura a través de la misma

$$\boxed{\frac{Q}{A} = \frac{(T_{AL} - T_{BL})}{\Re_{tc}}}$$

Diapositiva 7

- La resistividad térmica de contacto $\Re_{tc}$ (K m^2/W) es análoga al término $\dfrac{\Delta x}{k}$ de la holgura (aire + zonas de contacto).
- Resistencia térmica de contacto de una superficie A es:

$$\boxed{R_{tc} = \Re_{tc} / A}$$

•$\Re_{tc}$ **depende de**:

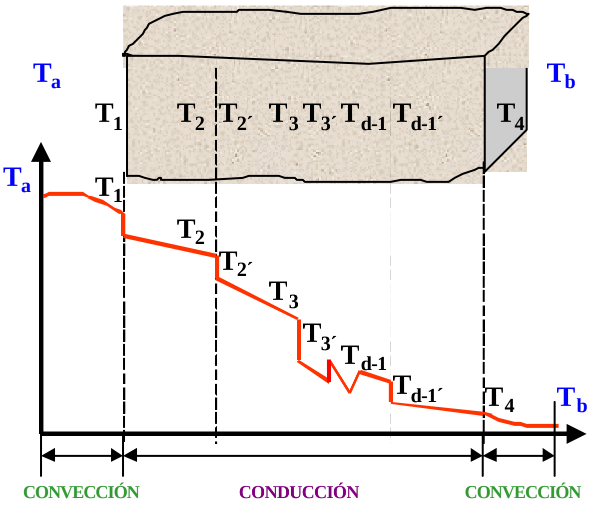
  - ***Rugosidad superficial.***
  - ***Presión contacto***

•$\Re_{tc}$ **debe considerarse sólo en la separación de capas de materiales de:**

  - ***k elevada (metales).***
  - ***Espesores pequeños***.

Diapositiva 8

2.2. ANÁLISIS DEL MURO MULTICAPA.



T_a, T_b Þ $T^{\underline{as}}$ ambiente interno y externo.

T_1, T_4 Þ $T^{\underline{as}}$ ambos lados del muro.

$T_d, T_{d'}$ Þ $T^{\underline{as}}$ ambos lados de las distintas capas.

El flujo de calor a través de cada capa se mantiene constante:

$$\frac{Q}{A} = cte = h_{a1}(T_a - T_1) = \frac{k_{12}}{\Delta x_{12}}(T_1 - T_2) = \frac{(T_2 - T_{2'})}{\Re_{22'}} = \frac{k_{2'3}}{\Delta x_{2'3}}(T_{2'} - T_3) =$$

$$= \frac{(T_3 - T_{3'})}{\Re_{33'}} = ... = h_{4b}(T_4 - T_b)$$

Diapositiva 9

$$T_a - T_1 = \frac{Q}{A}\cdot\frac{1}{h_{a1}} \qquad T_1 - T_2 = \frac{Q}{A}\cdot\frac{\Delta x_{12}}{k_{12}} \qquad T_2 - T_{2'} = \frac{Q}{A}\cdot\Re_{22'}$$

$$T_{2'} - T_3 = \frac{Q}{A}\cdot\frac{\Delta x_{2'3}}{k_{2'3}} \qquad T_3 - T_{3'} = \frac{Q}{A}\cdot\Re_{33'} \qquad T_4 - T_b = \frac{Q}{A}\cdot\frac{1}{h_{4b}}$$

•Sumando estas expresiones:

$$\frac{Q}{A} = \frac{(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{h_{a1}} + \frac{\Delta x_{12}}{k_{12}} + \Re_{22'} + \frac{\Delta x_{2'3}}{k_{2'3}} + \Re_{33'} + K + \frac{1}{h_{4b}}\right)}$$

$$Q = \frac{(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{A\cdot h_{a1}} + \frac{\Delta x_{12}}{A\cdot k_{12}} + \frac{\Re_{22'}}{A} + \frac{\Delta x_{2'3}}{k_{2'3}} + \frac{\Re_{33'}}{A} + K + \frac{1}{A\cdot h_{4b}}\right)}$$

$$Q = \frac{(T_a - T_b)}{\sum R_i}$$ *donde:* $$R_{a1} = \frac{1}{A\cdot h_{a1}} \qquad R_{i,i+1} = \frac{\Delta x_{i,i+1}}{A\cdot k_{i,i+1}} \qquad R_{i,i'} = \frac{\Re}{A}$$

Diapositiva 10

2.3. COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR

•***Se define:***

$$\boxed{U = \frac{1}{\dfrac{1}{h_{a1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\Delta x_{i,i+1}}{k_{i,i+1}} + \dfrac{1}{h_{nb}}}}$$

•***De esta forma:***

$$\boxed{\frac{Q}{A} = U \cdot \left(T_a - T_b\right)}$$

Diapositiva 11

3. CONDUCTOS

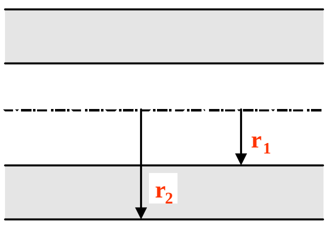
•*Conducción de calor en cuerpos con simetría axial.*

$$\boxed{g + k \cdot \Delta T = 0}$$

•*Suponemos que no hay generación de calor, y la conductividad es constante:*

$$\boxed{\Delta T = 0}$$

Desarrollando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas queda:



$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$T = T_1$ en $r = r_1$

$T = T_2$ en $r = r_2$

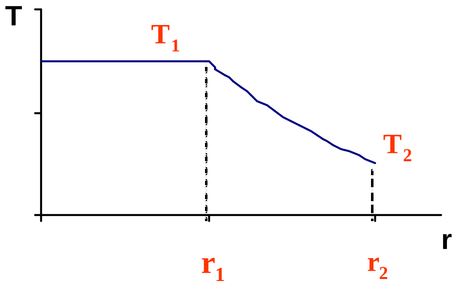
Diapositiva 12

• Se calculará el **campo de temperaturas T=T(r)**

$$r \cdot \frac{dT}{dr} = C_1 \quad \Rightarrow \quad dT = C_1 \cdot \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = C_1 \cdot \ln r + C_2}$$

$$\boxed{T = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}}$$

•Si **g se anula y k se considera constante**, la distribución de temperaturas a través de la pared cilíndrica es una **función logarítmica con el radio**



Diapositiva 13

Aplicando la ley de Fourier

$$\boxed{q(r) = -k \cdot \nabla T = -k \cdot \frac{dT}{dr}}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$Q = q(r) \cdot A(r) = -A(r) \cdot k \cdot \frac{dT}{dr} = -A(r) \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{k}{r} = \frac{2prL \cdot (T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{k}{r}$$

$$\boxed{Q = \frac{(T_1 - T_2)}{\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2p\,Lk}}}$$

Diapositiva 14

3.1. RESISTENCIA TÉRMICA DE CONDUCCIÓN

•*Resistencia térmica de conducción de una capa cilíndrica* R_{con}

Analogía eléctrica:

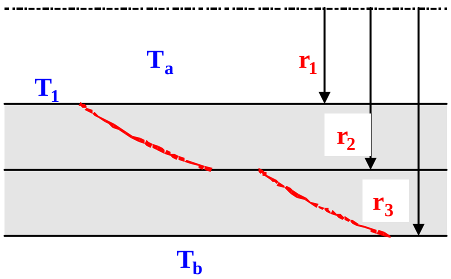
$$\boxed{\left(I = \frac{\Delta V}{R}\right) \Rightarrow Q = \frac{\Delta T}{R_{con}}}$$

$$\boxed{R_{con} = \frac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{2p\,L\,k}}$$

Diapositiva 15

3.2. ANÁLISIS CONDUCTO MULTICAPA

En estacionario Q=cte, pero para un cilindro



$\frac{Q}{A(r)} \neq cte$ ***: área a considerar es la lateral del cilindro, la cual depende del radio***

$$Q = \frac{(T_a - T_1)}{\dfrac{1}{2pr_1Lh_{a1}}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2pLk_{12}}} = \frac{(T_2 - T_{2'})}{\dfrac{\Re_{22'}}{2pr_2L}} = \frac{(T_{2'} - T_3)}{\dfrac{\ln(r_3/r_{2'})}{2pLk_{2'3}}} = \frac{(T_3 - T_b)}{\dfrac{1}{2pr_3Lh_{3b}}}$$

$$\boxed{Q = \frac{(T_a - T_b)}{\dfrac{1}{2pL}\cdot\left(\dfrac{1}{h_{a1}\cdot r_1} + \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{k_{12}} + \dfrac{\Re_{22'}}{r_2} + \dfrac{\ln(r_3/r_{2'})}{k_{2'3}} + \dfrac{1}{h_{3b}\cdot r_3}\right)}}$$

Diapositiva 16

3.3. COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR (U)

Se define $U_{cilindro}$ *respecto al área correspondiente a un radio cualquiera* r_i

$$\boxed{U_{cilindro,i} = \frac{1}{r_i\left(\frac{1}{h_{a1}\cdot r_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\ln\left(r_{i+1}/r_i\right)}{k_{i,i+1}} + \frac{1}{h_{3b}\cdot r_3}\right)}}$$

De esta forma:

$$\boxed{Q = 2\cdot p\cdot r_i\cdot L\cdot U_{cilindro,i}\cdot\left(T_a - T_b\right)}$$

En general:

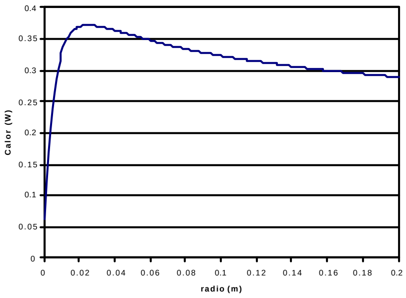
$$\boxed{Q = A_{ref}\cdot U_{Aref}\cdot(T_a - T_b) \Rightarrow U_{Aref} = \frac{Q/(T_a - T_b)}{A_{ref}}}$$

Diapositiva 17

3.4. RADIO CRÍTICO DE AISLAMIENTO

•Al añadir capas de material sobre una pared plana, se incrementa la resistencia térmica por lo que el flujo de calor siempre se reduce.

•En conductos, conforme se añaden capas, aumenta la resistencia térmica pero también el área de transmisión de calor: tendencias contrapuestas sobre la magnitud de calor conducido, por lo que debe estudiarse el aislamiento adecuado en cada caso.



Para cables eléctricos por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} k_{AIS} = 0.2 \div 0.3 \\ h \approx 10 \div 20 \end{array}\right\} \Rightarrow r_{crit}\left[0.01 \div 0.03\ m\right]$$

Radio crítico: valor para el cual el calor transmitido alcanza un máximo. Normalmente es muy pequeño (del orden de milímetros)

Diapositiva 18

$$\boxed{Q=\frac{2\cdot\pi\cdot L\cdot(T_a-T_b)}{\left(\frac{1}{h_{a1}\cdot r_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{k_{i,i+1}}+\frac{1}{h_{nb}\cdot r_n}\right)}}$$

Para hallar el máximo se deriva respecto al radio que se añade, r_n y se iguala a 0:

$$\frac{\partial Q}{\partial\ r_n}=\frac{-2\pi L\cdot(T_a-T_b)\cdot\left(\frac{1}{r_n\cdot k_{n-1,n}}-\frac{1}{h_{n,b}\cdot r_n^{\ 2}}\right)}{\left(\frac{1}{h_{a1}\cdot r_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{k_{i,i+1}}+\frac{1}{h_{nb}\cdot r_n}\right)^2}=0$$

$$\frac{1}{r_n\cdot k_{n-1,n}}-\frac{1}{h_{n,b}\cdot r_n^{\ 2}}=0 \qquad \boxed{(r_n)_{CRITICO}=\frac{k_{n-1,n}}{h_{n,b}}}$$

•Si $r_{d-1}<r_{crit}$ al añadir espesor Q –

Diapositiva 19

4.MODELIZACIÓN MEDIANTE ANALOGÍA ELÉCTRICA DEL CALOR TRANSMITIDO POR RADIACIÓN

- *Dos posibilidades:*
  - Definición de resistencia equivalente a la radiación.
  - Utilización del coeficiente de convección equivalente a la radiación

Diapositiva 20

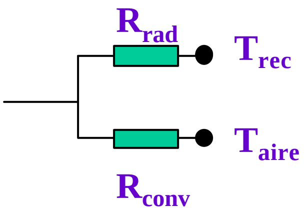
DEFINICIÓN DE RESISTENCIA EQUIVALENTE A LA RADIACIÓN.

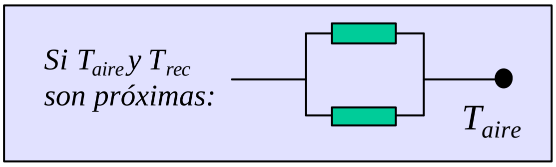
$$\boxed{Q_{conv} = h \cdot A \cdot (T - T_{aire})} \qquad \boxed{Q_{rad} = e \cdot s \cdot A \cdot (T^4 - T_{rec}{}^4)}$$

$$R_{rad} = \frac{(T - T_{rec})}{Q_{rad}} = \frac{(T - T_{rec})}{e \cdot s \cdot A \cdot (T^4 - T_{rec}{}^4)}$$

$$(T^4 - T_{rec}{}^4) = (T^2 - T_{rec}{}^2) \cdot (T^2 + T_{rec}{}^2) = (T - T_{rec}) \cdot (T + T_{rec}) \cdot (T^2 + T_{rec}{}^2)$$

$$R_{rad} = \frac{1}{e \cdot s \cdot A \cdot (T + T_{rec}) \cdot (T^2 + T_{rec}{}^2)} \cong \boxed{\frac{1}{e \cdot s \cdot A \cdot 4 \cdot T_{rec}{}^3} \quad \text{Si } T \text{ y } T_{rec} \text{ son similares}}$$





Diapositiva 21

COEFICIENTE DE CONVECCIÓN EQUIVALENTE A LA RADIACIÓN

$$Q = h \cdot A \cdot (T - T_{aire}) + \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_{rec}{}^4)$$

$$\boxed{h_r = \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{rec}{}^4)}{(T - T_{rec})}}$$

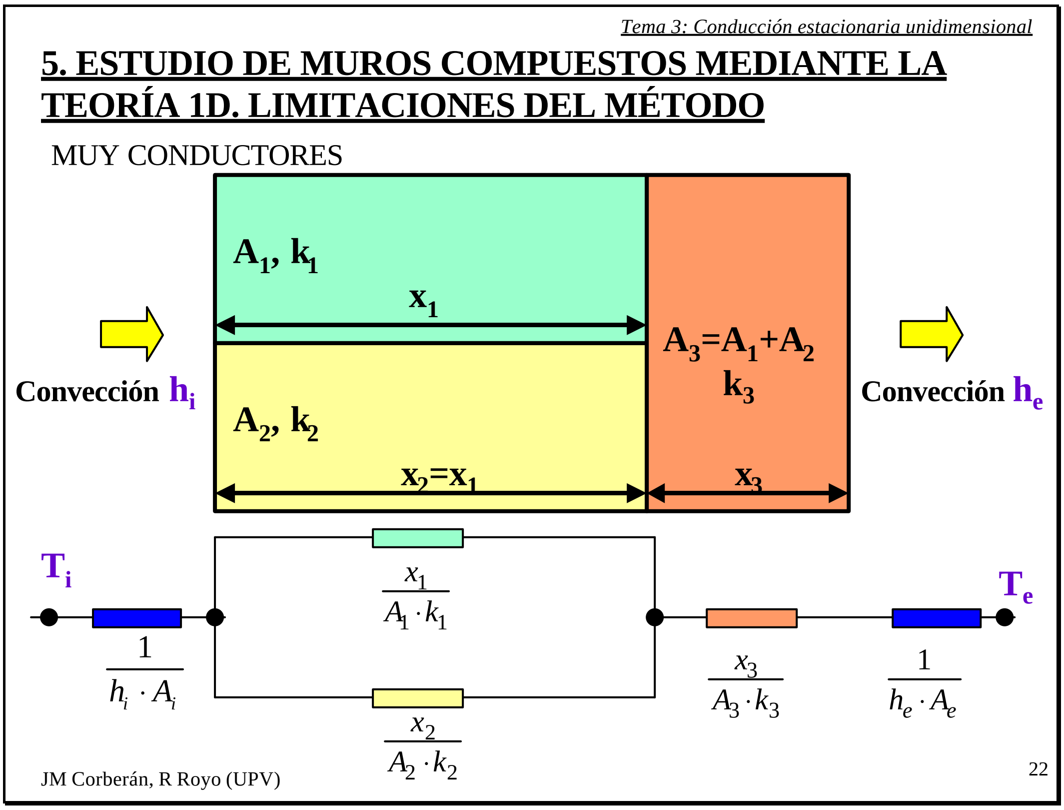
$$Q = h \cdot A \cdot (T - T_{aire}) + h_r \cdot A \cdot (T - T_{rec}) = A \cdot (h \cdot T - h \cdot T_{aire} + h_r \cdot T - h_r \cdot T_{rec})$$

$$Q = A \cdot ((h + h_r) \cdot T - (h \cdot T_{aire} + h_r \cdot T_{rec})) = A \cdot (h + h_r) \cdot (T - (\frac{h \cdot T_{aire} + h_r \cdot T_{rec}}{h + h_r}))$$

$$\mathbf{T_{eq} = \frac{h \cdot T_{aire} + h_r \cdot T_{rec}}{h + h_r}}$$

$$\mathbf{Q = A \cdot (h + h_r) \cdot (T - T_{eq})}$$

Diapositiva 22



Diapositiva 23