Departamento de Matemática Aplicada

XII Jornadas de Innovación Docente

Editores

Juana Cerdán Soriano

Víctor M. Ortiz Sotomayor

Universitat Politècnica de València

Departamento de Matemática Aplicada

XII Jornadas de Innovación Docente

Editores

Juana Cerdán Soriano
Víctor Manuel Ortiz Sotomayor

Universitat Politècnica de València

Jornadas celebradas en Valencia el 26 de junio de 2024

ISBN: 978-84-09-64782-8

dma

Publicado por Departamento de Matemática Aplicada

Prólogo

Tras un paréntesis de un lustro, vuelven las Jornadas de Innovación Docente del Departamento de Matemática Aplicada (DMA) de la Universitat Politècnica de València (UPV), en su duodécima edición. Estas jornadas, cuyo origen se remonta al año 2000, nacieron con el objetivo de organizar un foro donde poner en común los esfuerzos que realizaban los compañeros del Departamento, tanto por iniciativa propia como en el marco de Proyectos de Innovación Docente, en la adaptación de los contenidos a las características específicas de cada titulación, en la aplicación de metodologías que proporcionasen a los futuros titulados una formación amplia e integral para afrontar los rápidos cambios tecnológicos y en la incorporación de la propia tecnología en el aula. En aquella primera edición no solo participaron miembros del DMA, sino que también asistieron profesores de prestigio de otras universidades, como Gilbert Strang del Instituto Tecnológico de Massachussets, para compartir sus experiencias profesionales.

Las siguientes ediciones de las Jornadas de Innovación Docente del DMA se celebraron durante los años 2001, 2002 y 2003, en paralelo con las Jornadas de Investigación y Fomento de la Multidisciplinariedad, las cuales tuvieron su primera edición en 1999. Estas jornadas buscaban promover, desde la pluralidad de la actividad investigadora del DMA, la interacción entre investigadores del Departamento y de otros investigadores externos a la UPV, con el objetivo de que nuestro entorno se beneficiase de estas colaboraciones, fomentando así la transferencia de conocimiento. Tras el parón del 2004, ambos eventos se unificaron el año siguiente bajo el nombre de Jornadas de Matemática Aplicada, donde en las ediciones sexta (2005), octava (2007) y novena (2009) se siguió principalmente el espíritu de las Jornadas de Investigación y Fomento de la Multidisciplinariedad, mientras que el eje central de la séptima (2006) edición fue la innovación docente. A partir de la creación de los Institutos Universitarios de Matemática Multidisciplinar y de Matemática Pura y Aplicada, las jornadas de investigación pasaron a organizarse en dichos institutos, mientras que el Departamento continuó, pasados varios años, con las Jornadas de Innovación Docente, en su edición décima (2017) y undécima (2019).

En esta duodécima edición de las jornadas hemos contado con contribuciones muy variadas que van desde la iniciación en la investigación en la docencia de matemáticas, hasta la integración de los Objetivos de Desarrollo Sostenible en asignaturas matemáticas universitarias, pasando por otros temas tan interesantes como el desarrollo de una práctica interdisciplinar matemática-física o incluso el uso de metáforas y analogías en la enseñanza de conceptos matemáticos. La evaluación del alumnado también ha sido analizada desde diferentes prismas como, por ejemplo, el impacto en el aprendizaje que tiene la repetición de exámenes en grupo, los factores que influyen en los resultados académicos de los estudiantes de los Grados en ADE y en Logística, o las fortalezas y/o debilidades que presentan los exámenes tipo test de PoliformaT ante la Inteligencia Artificial.

Desde la Dirección del DMA agradecemos el interés mostrado en esta nueva edición de las Jornadas de Innovación Docente tanto a los asistentes como a los participantes, y animamos a todo el Departamento a participar en futuras ediciones.

Valencia, 26 de septiembre de 2024

La Dirección del DMA

Índice

I

¿Por qué mis estudiantes no entienden el concepto de función?

L. Atarés, M. J. Canet, A. Pérez y M. Trujillo

En esta comunicación presentamos cuál ha sido el detonante en nuestra trayectoria para pasar de hacer innovación educativa a investigar en la docencia de nuestras disciplinas con un enfoque SoTL (Scholarship of Teaching and Learning), y cómo esto se ha traducido en el área de las matemáticas investigando para tratar de mejorar la comprensión del concepto de función en nuestros estudiantes.

De innovación a investigación

Durante años hemos estado implicadas en proyectos de innovación para conseguir mejorar la calidad de nuestra docencia. En el caso de las matemáticas, hemos llevado a cabo diferentes acciones con este objetivo [1–9] y estábamos satisfechas con los resultados de estas innovaciones. Sin embargo, la realización del programa INED (Iniciación a la Investigación Educativa), que ofrece el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Politècnica de València (UPV), fue el punto de inflexión que nos hizo comprender que, si queríamos conseguir resultados de aprendizaje más efectivos, necesitábamos ir un paso más allá de la innovación en nuestra aula a la investigación en la docencia de la disciplina [10]. El detonante de este cambio fue el darnos cuenta de que, a pesar de recibir buenas notas en las encuestas de valoración del profesorado y un elevado índice de aprobados, existían evidencias comunes de que nuestros estudiantes presentaban problemas de comprensión. Entre estas evidencias estaba el rápido olvido de procedimientos o conceptos, la dificultad de resolución de un ejercicio al que se le ha modificado ligeramente el enunciado habitual, la capacidad de memorizar varias fórmulas, pero no identificar correctamente el contexto en el que aplicarlas, o la imposibilidad de transferir conceptos de manera interdisciplinar.

El profundizar en los problemas de comprensión que podían tener nuestros estudiantes nos llevó directamente al camino de la investigación, ya que era necesario

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XII Jornadas de Innovación Docente, pp. 9–14. Copyright © 2024 Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-64782-8

un análisis de la situación para dirigirnos a los marcos teóricos oportunos, un análisis de la literatura existente al respecto, una pregunta de investigación en la que enfocar nuestras acciones y un protocolo de actuación y de recolección y análisis de los resultados. Es decir, pasar de lo que comúnmente se entiende como una innovación o intervención a un enfoque SoTL [11].

Los conceptos umbral

Una vez recabadas evidencias de que nuestros estudiantes tenían problemas de comprensión, la siguiente pregunta que nos hicimos fue si estaban intentando comprender. En ese sentido, vimos que había dos posibles respuestas: sí o no, y analizamos los diferentes motivos que nos llevaban a cada una de ellas.

Es posible que los estudiantes no intenten entender porque no quieran hacerlo, claro, y en ese caso poco podemos hacer los docentes. Sin embargo, esto ocurre solo en una pequeña proporción, por lo que nos tranquiliza saber que es posible actuar para revertir esta negativa. En otros muchos casos, los estudiantes no hacen por entender porque no creen que sea lo que tienen que hacer [12]. Si la forma en que evaluamos o los promocionamos no implica que deban tener un conocimiento profundo de la materia, o que exista una cierta distancia entre lo que se explica en clase y lo que se les pregunta en las evaluaciones, los estudiantes entonces no consideran que su estudio tenga que ir más allá de una simple reproducción. Por otro lado, en muchas ocasiones existe cierta sobrecarga de trabajo que impide a los estudiantes disponer del tiempo suficiente para estudiar con un enfoque profundo [13].

Los estudiantes que sí que están intentando comprender se encuentran con otras barreras que pueden estar limitando su comprensión. Por una parte, existe un grupo de causas diversas como una demasiada carga cognitiva de aquello que quieran comprender, falta de una visión de conjunto o de representaciones mentales adecuadas, o una falta de conocimientos previos (lo que comúnmente llamamos falta de base). Además, la investigación, apunta otra causa principal de los problemas de comprensión que usualmente nos pasa desapercibida, pero que es muy común fundamentalmente en disciplinas técnicas, y es la existencia de conceptos umbral de la materia en cuestión [14].

Un concepto umbral es un concepto principal de una disciplina que transforma el pensamiento de novato a experto. Es por ello, que al tenerlo muy arraigado en el pensamiento experto, en muchas ocasiones nos pasan desapercibidos. Son conceptos centrales que los estudiantes deben llegar a entender y llevar a la práctica, y que les animan a pensar como expertos. Y aunque no siempre es así, en la mayoría de los casos suelen ser ideas "molestas", difíciles o contraintuitivas que pueden limitar el proceso de aprendizaje.

Dadas las características de las disciplinas que impartimos, detectamos que el principal factor que estaba limitando la comprensión de nuestros estudiantes eran precisamente algunos conceptos umbral y por ello este fue el tema de central de nuestras investigaciones [15–18].

El concepto umbral de función en matemáticas

En matemáticas existen diversos conceptos umbral [19]. Funciones, límites, derivadas o integrales son algunos de ellos. En el contexto de nuestros estudiantes, de la asignatura de Matemáticas 2 del Grado en Fundamentos de la Arquitectura de la UPV, el concepto de función es esencial y base de todo el programa. Por ello, decidimos focalizar la investigación en el área de las matemáticas sobre el concepto umbral de función. Nuestra primera pregunta de investigación se centró en qué dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas existían referenciadas en la literatura sobre el concepto de función. Al bucear en la literatura para dar respuesta a esta pregunta nos dimos cuenta de que existían muchos resultados al respecto, pero muy heterogéneos, con muestras muy diferentes en tamaños y tipos de estudiantes, algunos muy repetitivos, y que resultaba un poco caótico llegar a tener conocimiento de todas las posibles causas. Por ello, nuestro primer objetivo fue hacer un trabajo de revisión que tuviera en cuenta los resultados de todos los trabajos relevantes publicados hasta el momento en ese tema y que además nos permitiera clasificarlos y resumirlos.

El resultado se encuentra publicado en la referencia [15]. En ella, establecemos cinco categorías en las que están ubicadas las 17 principales dificultades que tienen los estudiantes con el concepto de función y las siete concepciones erróneas previas. De este modo, en dos tablas se pueden encontrar resumidos todos los resultados alrededor de los problemas de comprensión de este concepto. Lo que permite al profesorado diseñar materiales o estrategias para situar a los estudiantes frente de ellas y generar estrategias para superarlas, siempre teniendo en cuenta que ha de ser el estudiante el que las venza y que el profesorado tenemos un rol de apoyo y ayuda en el proceso.

Punto y seguido

Tras realizar el trabajo de revisión hemos continuado trabajando en esta línea con diversas actuaciones. Hemos utilizado test validados [20] para detectar en nuestros estudiantes qué dificultades y concepciones erróneas de las referenciadas en [15] presentaban. Los resultados de estas pruebas nos han conducido a reflexionar sobre lo que enseñamos y sobre todo cómo lo enseñamos. De ahí que hayamos seguido indagando en las claves de comprensión del concepto a través de *focus group* con los estudiantes y sesiones de decodificación del razonamiento experto [21].

Además, hemos empezado a elaborar materiales para ayudarles a superar los problemas de comprensión del concepto de función [22] y con ellos hemos diseñado intervenciones en el aula.

Los resultados de todos estos últimos pasos están actualmente pendientes de publicación. La conclusión extraída de ello es que desde el enfoque SoTL es el único que desde nuestra experiencia se ha conseguido una mejora significativa y transformadora en la comprensión de los estudiantes. En nuestro caso ha sido basado en los conceptos umbral y por ello, vamos a continuar con la investigación y actuación en esta línea.

Referencias

[1] R. Rivera, M. Trujillo. *SudokUrbano*, Pensamiento Matemático 11 (2): 93–104, 2021.

[2] R. Rivera, M. Trujillo. *Las matemáticas entre la función y la forma*, Textos de Arquitectura 7: 56–81, 2020.

[3] R. Rivera, M. Trujillo. *El urbanismo de las matemáticas, una experiencia interdisciplinar entre urbanismo y matemáticas*, XVIII Congreso Internacional de Investigación Educativa: Interdisciplinaridad y Transferencia (AIDIPE 2017). ISBN: 978-84-697-4106. Salamanca, 2017.

[4] R. Rivera, M. Trujillo. *Matemáticas urbanas*, SUMA 6 (2): 33–42, 2016.

[5] R. Rivera, M. Trujillo. *Mau.mau, matemáticas-arquitectura-urbanismo, una experiencia interdisciplinar en la ETSA Valencia*, Arquitectura v2020. ISBN: 978-84-9048-097-7. Valencia, 2013.

[6] M.C. Gómez-Collado, M. Trujillo. *¿Cómo motivar en el aula de matemáticas y fomentar el trabajo autónomo del alumno?*, Arquitectura v2020. ISBN: 978-84-9048-097-7. Valencia, 2013.

[7] M.C. Gómez-Collado, J. Puchalt, J. Sarrió, M. Trujillo. *Diseñar una obra en arquitectura desde un punto de vista matemático*, Pensamiento Matemático 3 (1): 49–58, 2013.

[8] M.C. Gómez-Collado, J. Puchalt, J. Sarrió, M. Trujillo. *Modelización de esculturas en la enseñanza de las matemáticas*, Modelling in Science Education and Learning 6 (2): 33–42, 2013.

[9] J.A. López-Molina, M. Trujillo. *Mathematica in engineering mathematics classes*, Int. J. Mechanical Engineering Education 33: 244–50, 2005.

[10] L. Shulman. *From Minsk to Pinsk: Why a scholarship of teaching and learning?*, Journal of the Scholarship of Teaching and Learning 48–53, 2001.

[11] A.F. March. *Entornos de aprendizaje para el desarrollo profesional docente*, REDU: revista de docencia universitaria 18 (1): 169–191, 2020.

[12] M. Prosser, K. Trigwell. *Qualitative variation in approaches to university teaching and learning in large first-year classes*, Higher Education 67: 783-795, 2014.

[13] B.J. Zimmerman, M. Martínez-Pons. *Perceptions of efficacy and strategy use in the self-regulation of learning*, Student perceptions in the classroom 185–208, 2012.

[14] J.H.F. Meyer, R. Land. *Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning*, Higher Education 49: 373–388, 2005.

[15] M. Trujillo, L. Atarés, M.J. Canet, M.A. Pérez-Pascual. *Learning Difficulties with the Concept of Function in Maths: A Literature Review*, Education Sciences 13 (5): 495, 2023.

[16] L. Atarés, M.J. Canet, M.A. Pérez-Pascual, M. Trujillo. *Undergraduate Student Thinking on the Threshold Concept of Entropy*, Journal of Chemical Education 101 (5): 1798–1809, 2024.

[17] L. Atarés, M.J. Canet, M. Trujillo, J.V. Benlloch-Dualde, J. Paricio-Royo, A. Fernández-March. *Helping pregraduate students reach deep understanding of the second law of thermodynamics*, Education Sciences 11 (9): 539, 2021.

[18] L. Atarés, M.J. Canet, M. Trujillo, J. Paricio. *The first step to address the teaching of entropy*, The Physics Teacher 62 (4): 287–289, 2024.

[19] K. Pettersson. Algoritmiska, Intuitiva och Formella Aspekter av Matematiken i Dynamiskt Samspel. *Studie av hur Studenter Nyttjar Sina Begreppsuppfattningar Inom Matematisk Analys*. Chalmers Tekniska Hogskola, Sweden, 2008.

[20] A. O'Shea, S. Breen, B. Jaworski. *The development of a function concept inventory*, Int. J. Res. Undergrad. Math. Educ. 2: 279–296, 2016.

[21] D. Pace. *The decoding the disciplines paradigm: Seven steps to increased student learning*, Indiana University Press, 2017.

[22] `https://media.upv.es/player/?id=c37a33b0-06bf-11ee-9434-a1cdac6b0c5c`

Afiliaciones

Macarena Trujillo Guillén - Departamento de Matemática Aplicada (autora de correspondencia: matrugui@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

Lorena Atarés Huerta - Departamento de Tecnología de los Alimentos, Universitat Politècnica de València
María José Canet Subiela - Departamento de Ingeniería Electrónica, Universitat Politècnica de València
Asunción Pérez Pascual - Departamento de Ingeniería Electrónica, Universitat Politècnica de València

II

Un ejemplo de implementación de los Objetivos de Desarrollo Sostenible en una asignatura de Cálculo

N. Ortigosa, R. Arnau, C. Burgos

La implicación de las universidades en la consecución de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) es fundamental, debido a su labor de generación y difusión del conocimiento. Con este objetivo, se plantea un ejemplo de cómo trabajarlos desde la asignatura Cálculo, de primer curso, que se ha llevado a cabo con los estudiantes del Grado en Ingeniería en Geomática y Topografía de la Universitat Politècnica de València en los dos últimos cursos académicos. Los estudiantes deben resolver un problema de la teoría de optimización de funciones de varias variables para determinación de puntos críticos en una de las sesiones de laboratorio, una vez vistos los conocimientos necesarios en las sesiones de teoría y problemas. Los problemas se contextualizan previamente para así trabajar los ODS número 3 (Salud y bienestar) y número 9 (Industria, Innovación e Infraestructuras) mediante las actividades propuestas. Al finalizar la sesión, se realiza una encuesta entre los estudiantes, en la que se concluye la aceptación muy positiva por su parte de este tipo de actividades aplicadas.

Introducción

Los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), aprobados en la Agenda 2030 y definidos por la Organización de Naciones Unidas, son un conjunto de 17 objetivos que buscan solucionar problemas globales como la pobreza, la protección del medio ambiente, la paz y la justicia, dentro de un marco de crecimiento económico [1]. La integración de los ODS en diferentes áreas es fundamental para concienciar sobre el desarrollo global equitativo y también respetuoso con el medio ambiente. En los últimos años, los ODS se han ido introduciendo en diferentes actividades en los programas de la educación universitaria, desde escuelas de negocios hasta estudios de

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XII Jornadas de Innovación Docente, pp. 15–21. ISBN: 978-84-09-64782-8

ingeniería, aunque en la mayoría de los casos no se llega a alcanzar adecuadamente al estudiantado, o no se llega a alcanzar en su totalidad [2]. Para ampliar el alcance de los mismos, desde las universidades se están potenciando los proyectos de innovación y mejora educativa que analizan propuestas de implantación de los ODS en las diferentes titulaciones, marco donde se han llevado a cabo las prácticas planteadas en este artículo.

En este trabajo, se presentan a modo de ejemplo las actividades que se pueden realizar en una asignatura de carácter básico de matemáticas durante una sesión práctica para integrar los ODS. En particular, se proponen las actividades llevadas a cabo durante los dos últimos cursos académicos (2022-2023 y 2023-2024) en la asignatura Cálculo (código 11332) del primer cuatrimestre del primer curso del Grado en Ingeniería en Geomática y Topografía de la Universitat Politècnica de València. En ellas, se ha solicitado a los estudiantes que determinen la ubicación óptima de un elemento a ser construido (un depósito de agua y un centro de distribución de material médico en un terreno semi-montañoso) utilizando los contenidos y conceptos que han estudiado en teoría y problemas en las sesiones previas de la asignatura.

Esta sesión se llevó a cabo en cuatro grupos de prácticas de laboratorio, donde los estudiantes debían resolver el problema planteado mediante la programación con el software Mathematica. Posteriormente, dichos estudiantes evaluaron la actividad a través de un cuestionario de evaluación final. El objetivo principal de estas sesiones es mostrar a los estudiantes de ingeniería cómo sus estudios pueden ser útiles para contribuir a la consecución de los ODS, al mismo tiempo que aumentan su conocimiento sobre las metas de dichos objetivos. Además, se busca reforzar la comprensión de los métodos de optimización de funciones estudiados en las sesiones de teoría y problemas previas, así como resolver un problema matemático utilizando tecnologías de la información (TI) mediante el trabajo en ejemplos de aplicaciones reales. A través de estas actividades, se pueden trabajar los ODS 9 (Construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización sostenible y fomentar la innovación) y 3 (Garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades, así como el acceso a servicios sanitarios esenciales).

A continuación, se presenta una descripción detallada de las actividades y los resultados obtenidos, junto con un análisis de las respuestas obtenidas por los estudiantes a las encuestas finales planteadas.

Metodología

Las actividades planteadas y llevadas a cabo se han enmarcado en el Proyecto de Innovación Docente y Mejora Educativa de la Universitat Politècnica de València "Análisis y propuestas de implantación de los ODS en las titulaciones de la ETSIGCT" (PIME/21-22/269), de la convocatoria Aprendizaje+Docencia 2021. En este proyecto, se analizó la situación de partida respecto a la formación en los ODS del plan de estudios de la titulación, y se diseñó actividades de formación en relación a estos.

En particular, en la asignatura Cálculo, de primer curso, se propuso realizar una actividad durante las sesiones de laboratorio en la que el alumnado pudiera poner en práctica los conocimientos adquiridos referentes al cálculo de puntos críticos en funciones de varias variables previamente estudiados en las sesiones de teoría, y que a su vez se pudieran ver ejemplos reales de aplicación de los ODS en labores relacionadas con su futura actividad profesional como graduados. Tras una breve presentación de los ODS, para que los alumnos los conozcan en caso de no haber oído nada sobre ellos previamente, se da paso a contextualizar la actividad y a la resolución de la misma.

En el curso 2022-2023 se planteó resolver un problema relacionado con un proyecto llevado a cabo por la Organización No Gubernamental Manos Unidas en el Noroeste de Camerún, en el año 2018 [3]. El proyecto buscaba localizar la ubicación óptima donde construir un depósito de agua potable que fuera capaz de abastecer a tres poblados de una región montañosa, en la que sus habitantes viven exclusivamente de la agricultura y la pequeña ganadería. Para ello, se les planteó a los estudiantes un problema simplificado en el que debían encontrar la ubicación (en forma de coordenadas) que optimizara el coste de construcción de la infraestructura citada. La función coste dependía de la ubicación, por lo que se buscaba su minimización. Los estudiantes debían encontrar la solución aplicando los conceptos vistos previamente en clase, e implementarla en Mathematica. Así, se busca trabajar con el ODS número 9 (Industria, Innovación e Infraestructuras) de una forma cercana a su futura actividad laboral, e incluyendo los contenidos estudiados en la asignatura de forma aplicada.

Una vez finalizada la actividad, se solicitó a los estudiantes que respondieran a una encuesta para conocer su opinión sobre la misma, así como que hicieran una breve reflexión y análisis del impacto que creían que pueden tener los contenidos estudiados en la asignatura con su titulación y, a su vez, en la consecución de los ODS.

En el curso 2023-2024 se realizó una actividad similar, también durante una de las sesiones de laboratorio. En este caso, se planteó a los estudiantes que resolvieran un problema relacionado con la actividad llevada a cabo por la Organización No Gubernamental Farmamundi [4], que trabaja en lugares donde la población tiene difícil acceso a medicamentos y atención médica. En este contexto, se les planteó a los estudiantes que resolvieran un problema cuyo objetivo era determinar la ubicación óptima de un centro de distribución de material sanitario en una región en la que se debía dar servicio a tres centros sanitarios de diferente nivel, con unas frecuencias de distribución logística también diferentes. Así, en este curso también se debía resolver un problema de optimización de una función con varias variables, una vez estudiados los conceptos en clase, e implementar igualmente la solución utilizando el software Mathematica. De esta forma, se buscaba trabajar no solo el ODS número 9, sino también el ODS número 3 (Salud y bienestar).

Tras haber resuelto la actividad planteada, también se realizó una breve encuesta a los estudiantes para que pudieran hacer una breve reflexión. Los resultados de ambas encuestas se detallan en la siguiente sección.

Resultados

A continuación se detallan los resultados obtenidos en las encuestas realizadas a los estudiantes tras finalizar las actividades propuestas. La Tabla II.1 muestra las respuestas obtenidas a si los estudiantes conocían los ODS antes de la actividad planteada, y si les gustaría seguir trabajándolos en el futuro. La respuesta mayoritaria es que sí, resaltando que les ha sido más ameno y les ha permitido ver aplicaciones de lo estudiado en clase previamente.

	Sí	No	No responde
¿Conocías los ODS antes de esta práctica?	28.3 %	52.2 %	19.5 %
¿Te ha gustado trabajarlos en esta práctica?	76.2 %	4.3 %	19.5 %
¿Te gustaría trabajarlos en otras prácticas/asignaturas?	76.2 %	4.3 %	19.5 %

Tabla II.1. Respuestas sobre si los estudiantes conocían los ODS previamente, curso 2022-2023.

Los resultados obtenidos en las encuestas realizadas en el segundo curso académico donde se realizó la actividad propuesta son muy similares, mostrando también el agrado por cambiar el tipo de actividades que se suelen hacer en la asignatura, así como por ver un enfoque aplicado en una situación de la vida real. En este curso, se preguntó además dónde habían tenido el primer contacto con los ODS (si es que los conocían previamente), y se ha establecido una graduación sobre si les parecía interesante y les había gustado trabajarlos en estas prácticas, si les gustaría continuar trabajando con ellos en otras prácticas y también en otras asignaturas, si creen que es útil su aplicación en los estudios que están cursando, así como en su vida diaria y cómo pueden colaborar a título individual o grupal para alcanzarlos. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras II.1 y Figura II.2. En la Figura II.3 se detallan las respuestas obtenidas en la encuesta sobre qué ODS creen los estudiantes que se podrían trabajar, tanto en la asignatura como con su titulación, obteniéndose mayoritariamente las respuestas del ODS 9 (trabajado en la actividad que acababan de realizar) y 11 (Ciudades y comunidades sostenibles).

Conclusiones

En este trabajo se han presentado dos actividades que se han realizado en sesiones prácticas de una asignatura de Cálculo de primer curso de una titulación de ingeniería durante los dos últimos cursos académicos. En ellas, se pueden trabajar los contenidos estudiados previamente en la asignatura de forma práctica en el marco contextual de consecución de los ODS. Las respuestas obtenidas por los estudiantes en una encuesta tras finalizar las actividades muestran un alto grado de aceptación de prácticas de este tipo, especialmente desde asignaturas que tradicionalmente cuentan con un enfoque más teórico.

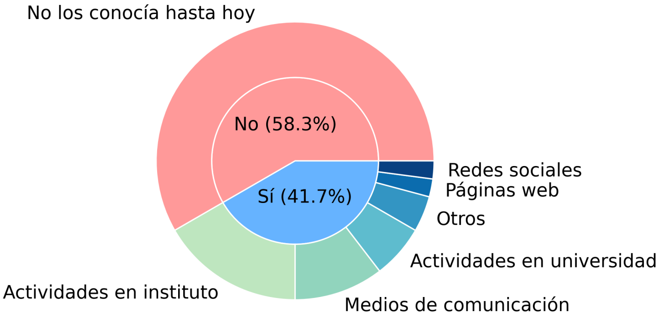


Figura II.1. Respuestas sobre si los estudiantes conocían los ODS previamente, curso 2023-2024.

Figura II.2. Respuestas sobre qué les ha parecido a los estudiantes trabajar con los ODS, en el curso 2023-2024.

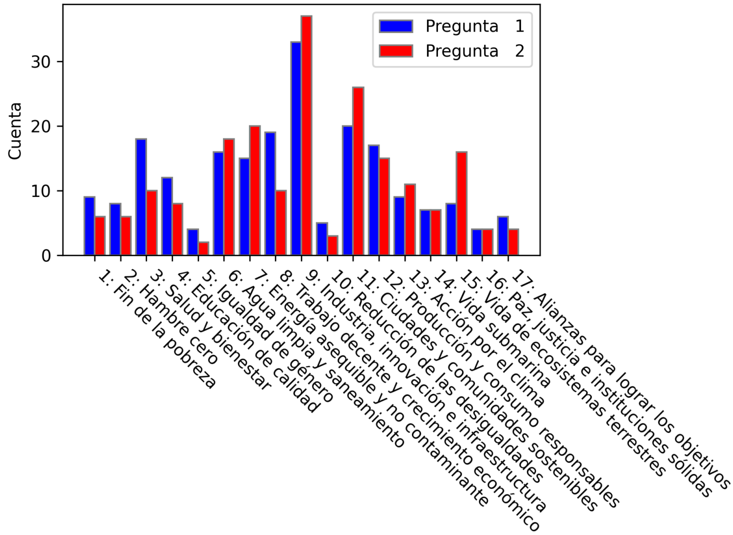


Figura II.3. Respuestas obtenidas en la encuesta en el curso 2023-2024 a las preguntas: 1) ¿Qué ODS crees que puedes trabajar a partir de los contenidos estudiados en Cálculo? y 2) ¿Qué ODS crees que puedes trabajar como graduado de tu titulación?

Referencias

[1] Objetivos de Desarrollo Sostenible. `https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/`. Último acceso 11/07/2024.

[2] E. Collier, K.E. Odell, A. Rosenbloom. *Teaching sustainable development: An approach to rapidly introducing the UN sustainable development goals into an undergraduate business curriculum*, Journal of Global Responsibility 13 (4): 361–379, 2022.

[3] Proyecto Manos Unidas 2018: Abastecimiento de agua potable por gravedad a tres poblados. `https://www.manosunidas.org/proyecto/2018-abastecimiento-agua-potable-gravedad-tres-poblados`. Último acceso 11/07/2024.

[4] Proyecto Farmamundi: Medicamentos de calidad y logística humanitaria, distribuidor internacional no lucrativo de medicamentos, material sanitario y equipamiento para la ayuda humanitaria. `https://farmaceuticosmundi.org/que-hacemos/suministro-de-medicamentos/area-logistica/`. Último acceso 11/07/2024.

Afiliaciones

Nuria Ortigosa Araque - Departamento de Matemática Aplicada (autora de correspondencia: nuorar@upv.es), Universitat Politècnica de València
Roger Arnau Notari - Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València
Clara Burgos Simón - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

III

Aprendizaje matemático colaborativo: el impacto de repetir exámenes en grupo

A. Carreño, A. Herrero, S. Moll, J.A. Moraño, L. Sánchez, E. Vega

Este estudio investiga los efectos de la repetición de exámenes en grupo sobre los resultados de aprendizaje y la participación en la asignatura de Matemáticas I. La metodología consiste en la realización de un examen de manera individual y luego la repetición del mismo en grupos de cuatro, de manera que los estudiantes colaboren para mejorar los resultados individuales y se proporcionen feedback entre ellos. Esta práctica permite a los estudiantes mejorar sus capacidades de aprendizaje y fomenta la colaboración entre compañeros. Una encuesta realizada a 145 estudiantes revela que esta metodología influye positivamente en sus percepciones sobre la utilidad, la motivación, la colaboración, el aprendizaje, la confianza, la comodidad y el desarrollo de competencias. Además, promueve entornos de aprendizaje colaborativo, mejora la comprensión de los conceptos, aumenta la retención de información, desarrolla habilidades de comunicación, y fortalece el pensamiento crítico y la resolución de problemas en un contexto de apoyo mutuo.

Introducción y objetivos

El aprendizaje entre pares es un enfoque educativo colaborativo donde los estudiantes se involucran en la educación interactuando con sus pares, intercambiando conocimientos y experiencias [1–3]. Esta metodología contrasta con las interacciones tradicionales unidireccionales entre profesor y estudiante al focalizar el centro del aprendizaje en la comunicación e interacción de los estudiantes dentro del aula [3–5]. A través del aprendizaje entre pares, los estudiantes pueden beneficiarse de las fortalezas, los conocimientos y las diferentes perspectivas de sus compañeros, mejorando su comprensión del contenido educativo al enseñar a otros [7,8]. El aprendizaje por pares

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XII Jornadas de Innovación Docente, pp. 23–33. ISBN: 978-84-09-64782-8

es una metodología ampliamente utilizada en la educación superior, y en este contexto educativo ha demostrado facilitar la comunicación estudiantil, fomentar el aprendizaje autodirigido y el pensamiento crítico, y mejorar la eficiencia y el rendimiento del aprendizaje [5–8].

El aprendizaje entre pares también presenta desafíos potenciales. De hecho, si los estudiantes no logran unificar opiniones o integrar completamente la información durante las sesiones de aprendizaje entre pares, pueden surgir conflictos que perjudiquen el proceso de aprendizaje y pongan en riesgo la cooperación futura [5, 7, 8]. La efectividad del aprendizaje entre pares también puede verse influenciada por la dinámica entre estudiantes y profesores [1–3], ya que no todas las dinámicas de comunicación conducen a una fusión o convergencia efectiva de la información.

En esta investigación se considera un enfoque novedoso. La metodología consiste en fomentar el aprendizaje entre pares a través de la repetición de exámenes, en los cuales, después de un examen individual, los estudiantes deben repetir el mismo examen en un entorno grupal. Este método aprovecha la dinámica de grupo para revisar y profundizar en la comprensión de los conceptos discutidos en el examen individual, permitiendo la aclaración de dudas y la retroalimentación inmediata sobre sus respuestas. Además, los estudiantes pueden explicar los procesos matemáticos o el razonamiento utilizados durante el examen, reforzando su aprendizaje y el de sus compañeros y compañeras. Aplicar esta metodología durante el proceso de evaluación asegura que todos los participantes hayan preparado previamente el tema correspondiente de la asignatura, minimizando las interacciones entre individuos no preparados y fomentando el compromiso a través de la posibilidad de mejorar la calificación individual.

Un beneficio adicional de este método es la mejora de las habilidades sociales y de comunicación, ya que los estudiantes deben articular sus pensamientos claramente y escuchar activamente a los demás. Esto no solo mejora la comprensión académica, sino que también desarrolla habilidades interpersonales vitales en entornos profesionales. Al revisar el examen colectivamente, los estudiantes pueden identificar y aprender de errores comunes, proporcionando una nueva oportunidad para reflexionar sobre sus respuestas y comprender mejor los temas discutidos.

Las opiniones de los estudiantes son particularmente importantes para evaluar la efectividad de esta metodología. Según los datos, muchos estudiantes evaluaron positivamente la experiencia, destacando cómo las interacciones grupales mejoraron su comprensión del material y aumentaron su confianza en su conocimiento.

Además de las ventajas mencionadas, la implementación de este enfoque de aprendizaje entre pares fortalece significativamente la capacidad de los estudiantes para "aprender a aprender". Al enfrentar desafíos académicos en un entorno colaborativo, los estudiantes no solo adquieren conocimientos específicos del contenido, sino que también desarrollan habilidades críticas para el aprendizaje autodirigido. Este proceso fomenta la curiosidad, la capacidad de hacer preguntas efectivas y la habilidad de construir sobre el conocimiento adquirido de manera independiente. Por lo tanto, el aprendizaje entre pares no solo prepara a los estudiantes para futuros exámenes o tareas académicas, sino que también los equipa con las competencias necesarias para su desarrollo profesional y personal continuo, validando así la importancia de este enfoque pedagógico en la formación integral de los aprendices.

Metodología

Asignatura y participantes

El estudio se realizó en la asignatura "Matemáticas I", del Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial (ETSIADI) de la Universitat Politècnica de València (UPV). Esta investigación se llevó a cabo durante los años académicos, 2021/2022 y 2022/2023. El plan de estudios de "Matemáticas I" incluye tres bloques principales: Cálculo diferencial de funciones de varias variables, Cálculo integral y Álgebra. En el estudio participaron un total de 145 estudiantes de primer año, todos con edades entre 18 y 19 años.

Dentro del curso "Matemáticas I", se programaron tres sesiones de evaluación, una para cada bloque temático, como parte de una metodología de evaluación continua. El proceso de evaluación constaba de dos fases:

- **Fase Individual.** Los estudiantes realizaban inicialmente el examen de forma individual. Esta fase incluía preguntas de respuesta corta y tareas de resolución de problemas, con una duración de entre 60 y 90 minutos.
- **Fase Colaborativa.** Tras la fase individual, los estudiantes se organizaban en equipos de cuatro para repetir el mismo examen de forma colaborativa, pero con una duración reducida de entre 10 y 30 minutos (aunque se tenía en cuenta la dificultad del examen para extender el tiempo si fuera necesario).

Si la calificación del examen colaborativo del equipo superaba las calificaciones individuales, la nota más alta afectaría positivamente la calificación individual de cada miembro, mejorándola entre un 10 % y un 15 %. Se puede ver un esquema de la metodología en la Figura III.1.

Cuestionario

Para obtener las opiniones de los estudiantes sobre el enfoque de evaluación de aprendizaje entre pares, se diseñó una encuesta que incluía preguntas de escala Likert

Figura III.1. Resumen metodología de la repetición de exámenes.

para evaluar la experiencia general de los estudiantes, además de preguntas abiertas en las que los estudiantes podían proporcionar comentarios y opiniones.

La encuesta se realizó inmediatamente después de la fase colaborativa del examen. La participación fue voluntaria y anónima. Antes de la encuesta, se informó a todos los participantes sobre la naturaleza de la investigación, la confidencialidad de sus respuestas y su derecho a retirarse del estudio en cualquier momento sin consecuencias. Se obtuvo el consentimiento explícito de todos los participantes, asegurando que entendieran que su participación era completamente voluntaria y que su información sería tratada con la máxima confidencialidad. También se llevaron a cabo entrevistas personalizadas con aquellos estudiantes que aceptaron ser entrevistados libremente.

Resultados

Utilidad de la colaboración entre pares

El cuestionario tenía como objetivo obtener la percepción de la utilidad de la colaboración entre pares durante la repetición de exámenes. Los datos muestran que la mayoría de los estudiantes encontraron beneficiosa la colaboración entre pares. Específicamente, el 38.6 % de los estudiantes la calificaron como "muy útil" y el 27.6 % como "extremadamente útil", sumando un 66.2 % que percibió una alta utilidad en este enfoque colaborativo (ver Figura III.2). Esta respuesta positiva parece indicar que el modelo de aprendizaje entre pares fue bien recibido, con los estudiantes apreciando la dinámica de aprendizaje colaborativo durante los exámenes. Solo una pequeña fracción (9.6 %) lo encontró menos beneficioso, indicando "poco útil" o "nada útil". Los valores de mediana y moda obtuvieron un valor de 4 (muy útil), lo que parece subrayar aún más el consenso general de los estudiantes hacia el impacto positivo de la interacción entre pares en su proceso de aprendizaje.

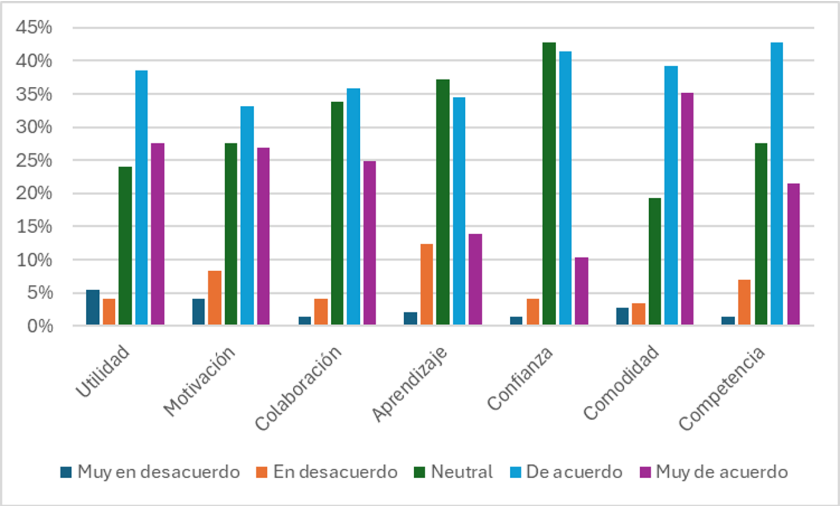


Figura III.2. Evaluación de la colaboración entre pares en la repetición de exámenes.

Motivación

El aspecto de la motivación en el cuestionario fue diseñado para evaluar si la colaboración con compañeros durante la repetición de exámenes influye en los niveles de motivación de los estudiantes. Analizando las respuestas, se hace evidente que la colaboración entre pares tuvo un efecto favorable en la motivación de los estudiantes. Un porcentaje considerable de los estudiantes, 33.1 %, percibió un aumento en su motivación ("de acuerdo"), y un 26.9 % percibió un incremento mayor ("muy de acuerdo"). Solo un pequeño número de estudiantes, 12.4 %, expresó una disminución en la motivación, lo que sugiere que, aunque la mayoría se beneficia de un aumento en la motivación, hay una minoría para quienes este método puede no ser tan efectivo (ver Figura III.2).

Colaboración y comprensión

El cuestionario incluía una pregunta destinada a medir las percepciones de los estudiantes sobre si la colaboración con compañeros durante la repetición de exámenes promueve una comprensión más profunda y la retención del conocimiento matemático. Los datos sugieren una percepción positiva: una proporción sustancial de los encuestados, 35.9 %, indicó que estaban "de acuerdo" (calificación de 4), y un 24.8 %

"muy de acuerdo" (calificación de 5) con la afirmación (ver Figura III.2). La mediana y la moda para esta respuesta fueron ambas 4, reforzando el fuerte consenso positivo entre los estudiantes. En contraste, solo un 5.5 % de estudiantes se mostró escéptico, respondiendo con "en desacuerdo" (calificación de 2) o "muy en desacuerdo" (calificación de 1), lo que indica que la mayoría reconoce y aprecia los beneficios del aprendizaje colaborativo en la mejora de su comprensión y retención del material.

Aprendiendo nuevas estrategias de los compañeros

El cuestionario preguntaba a los estudiantes sobre la frecuencia con la que aprenden nuevas estrategias o enfoques de sus compañeros durante la repetición de exámenes. Las respuestas ilustran que las sesiones de aprendizaje entre pares durante las repeticiones de exámenes son beneficiosas para un número significativo de estudiantes en la adquisición de nuevas estrategias. En la Figura III.2, se puede apreciar que el 35.2 % de los estudiantes afirma que aprenden nuevas estrategias "en la mayoría de las preguntas del examen", mientras que el 13.1 % indicó que esto sucede "en casi todas las preguntas del examen". La respuesta más común fue "en algunas de las preguntas", seleccionada por el 40.7 % de los estudiantes, sugiriendo que, aunque la adquisición de nuevas estrategias no es uniforme, muchos estudiantes todavía encuentran estas interacciones beneficiosas ocasionalmente. Solo una porción menor de los estudiantes, el 11 %, respondió "en muy pocas preguntas" o "en ninguna pregunta", destacando que la gran mayoría experimenta algún nivel de beneficio de este aspecto del aprendizaje entre pares. Estos hallazgos indican que, aunque la frecuencia de aprender nuevas estrategias de los compañeros varía, la oportunidad de participar en dicho aprendizaje es valorada positivamente.

Confianza a partir de la colaboración entre pares

El cuestionario se utilizó para determinar cómo la colaboración con compañeros durante las repeticiones de exámenes afecta la confianza de los estudiantes al abordar problemas matemáticos. Las respuestas indican un impacto positivo de la colaboración entre pares en los niveles de confianza de los estudiantes. Un 41.4 % de los estudiantes opinó que su confianza fue "aumento algo", y un 10.3 % que sintió un "aumento significativo" en la confianza. La respuesta más frecuente fue "sin impacto en mi confianza", seleccionada por el 42.8 % de los estudiantes, sugiriendo que para un gran grupo, la colaboración entre pares ni mejora ni disminuye su confianza. Solo un pequeño porcentaje, 5.5 %, sintió que su confianza fue "se redujo algo" o "se redujo significativamente", indicando que los efectos negativos son mínimos. Estas estadísticas muestran que, si bien la colaboración entre pares es beneficiosa para más de la mitad de los estudiantes en cuanto al aumento de la confianza, una porción significativa permanece igual que antes de la actividad.

Comodidad al compartir ideas

El cuestionario preguntó sobre la sensación de estar cómodos al compartir ideas y soluciones durante las repeticiones de exámenes. Los datos destacan que la mayoría de los estudiantes se siente cómodos compartiendo sus ideas con compañeros en un entorno de examen colaborativo. Específicamente, el 39.3 % de los encuestados opinó sentirse "cómodo" y un adicional 35.2 % indicó sentirse "extremadamente cómodo", mostrando que un 74.5 % de los participantes experimentan un nivel de comodidad positivo. Por otro lado, un segmento menor del conjunto de estudiantes, el 22.1 %, respondió con "neutral", indicando ni comodidad ni incomodidad particular. Solo un 3.4 % de los estudiantes informó sentirse "incómodo" o "extremadamente incómodo", representando una proporción muy pequeña del total de respuestas. Estas cifras, a pesar de que parecen subrayan la efectividad del entorno de colaboración entre pares para hacer que los estudiantes se sientan a gusto al expresar sus pensamientos y soluciones, indican también que se debería mejorar los entornos de trabajo para que la casi totalidad de estudiantes se sintieran lo más cómodos posibles.

Mejora de competencias

El cuestionario exploró si los estudiantes creen que la colaboración entre pares durante las repeticiones de exámenes fomenta el desarrollo de competencias críticas y de resolución de problemas. Las respuestas indican una fuerte creencia entre los estudiantes de que la colaboración entre pares tiene un impacto positivo en sus habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas. Un 42.8 % de los estudiantes respondió estar "de acuerdo" y un 21.4 % "totalmente de acuerdo" en que sus habilidades se ven mejoradas a través de las repeticiones de exámenes colaborativos. Esta mayoría parece subrayar la efectividad del aprendizaje entre pares en la promoción de habilidades de pensamiento de orden superior. La categoría "neutral" fue elegida por el 27.6 % de los encuestados, sugiriendo que algunos estudiantes pueden no percibir claramente el impacto de la colaboración entre pares en sus habilidades o pueden tener experiencias mixtas. Solo un pequeño porcentaje, 8.3 %, estuvo en desacuerdo o totalmente en desacuerdo, indicando una visión disidente menor sobre la efectividad de la colaboración entre pares en la mejora de estas habilidades críticas.

Análisis de opiniones de grupos heterogéneos y homogéneos

Los valores representados en la Figura III.3 corresponden a las opiniones de estudiantes divididos en dos tipos de grupos: grupos heterogéneos y grupos homogéneos, en relación a las notas previas que han obtenido. Se considera que un grupo es heterogéneo (GHETE) si la diferencia de notas entre los estudiantes es superior a 3.5 puntos, mientras que un grupo es homogéneo (GHOMO) si la diferencia es menor o igual a 3.5 puntos. La finalidad de este análisis es estudiar las opiniones de los estudiantes sobre la actividad de la repetición de exámenes dentro de estos dos tipos de grupos.

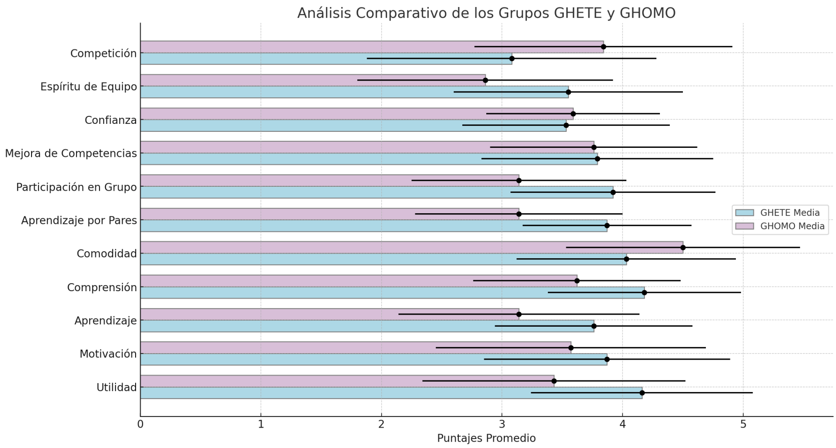


Figura III.3. Análisis comparativo de las opiniones de los grupos GHETE y GHOMO sobre la actividad de repetición de exámenes.

Como se observa en los resultados, las opiniones son significativamente peores en los grupos homogéneos en comparación con los grupos heterogéneos en varios de los aspectos evaluados anteriormente. Los grupos heterogéneos presentan puntuaciones medias más altas en ítems como la utilidad, motivación, aprendizaje, comprensión, participación en grupo y espíritu de equipo, lo cual sugiere una mayor satisfacción con la actividad de repetición de exámenes.

Este patrón indica que los grupos heterogéneos, al estar conformados por estudiantes con diferentes niveles de rendimiento académico previo, se benefician de una mayor diversidad de perspectivas y estrategias de aprendizaje, lo que puede conducir a una experiencia de aprendizaje más enriquecedora y colaborativa. En contraste, los grupos homogéneos pueden experimentar una menor dinámica de grupo y menor intercambio de conocimientos, afectando negativamente su percepción de la actividad.

En conclusión, fomentar la formación de grupos heterogéneos para actividades como la repetición de exámenes puede ser una estrategia efectiva para mejorar la satisfacción y el rendimiento de los estudiantes. Esta práctica no solo favorece un ambiente de aprendizaje más inclusivo y colaborativo, sino que también puede contribuir a un mejor entendimiento y dominio del material del curso.

El tratamiento de la formación de grupos debería ser estudiado más en profundidad, pues las dinámicas de grupo y muchos otros factores pueden influir en la percepción de los resultados y en la ejecución de la actividad.

Entrevistas a estudiantes sobre la colaboración entre pares

Además del cuestionario estructurado, se realizaron entrevistas opcionales y personales para obtener una comprensión más profunda de las experiencias de los estudiantes con la colaboración entre pares durante las repeticiones de exámenes. Estas entrevistas proporcionaron datos cualitativos que enriquecieron nuestra comprensión de las percepciones y experiencias de los estudiantes.

Comentarios positivos sobre la colaboración entre pares. La mayoría de las respuestas de las entrevistas fueron positivas respecto a la utilidad de las repeticiones de exámenes facilitadas por la colaboración entre pares. Los estudiantes destacaron con frecuencia cómo estas sesiones les permitieron involucrarse activamente con el material del curso en un entorno de apoyo, mejorando sus resultados de aprendizaje. La oportunidad de revisar los contenidos del examen con los compañeros fue vista como particularmente beneficiosa, ayudando en la refuerzo y aclaración de conceptos clave que inicialmente resultaron desafiantes.

Comentarios sobre las repeticiones de exámenes. Un punto de acuerdo unánime entre los estudiantes fue el valor de la retroalimentación recibida durante estas sesiones colaborativas. Los estudiantes describieron la retroalimentación sobre el desempeño en los exámenes como “extremadamente positiva”, señalando que no solo fue útil para corregir malentendidos, sino también para validar el conocimiento que habían adquirido.

Desventajas y desafíos. A pesar de los comentarios predominantemente positivos, se señalaron algunas desventajas con respecto a la dinámica de la interacción grupal. Algunos estudiantes opinaron que, a veces, la interacción dentro de su grupo no fue tan constructiva como se deseaba. Problemas como niveles desiguales de participación y diferentes niveles de preparación ocasionalmente dificultaron la efectividad de la colaboración. Sin embargo, se observó que estos casos fueron pocos y esporádicos, lo que sugiere que, aunque existe margen de mejora, no restan significativamente de la experiencia general positiva.

Aprendizaje y autodescubrimiento. Un tema significativo que surgió de las entrevistas fue el aprendizaje y el autodescubrimiento facilitados por la interacción con compañeros. Los estudiantes expresaron que, a través de estas discusiones, pudieron aprender de otros y también descubrir sus propias debilidades. Este beneficio dual fue destacado como particularmente valioso, ya que no solo promovió una comprensión más profunda de la materia, sino que también fomentó una práctica reflexiva donde los estudiantes podían identificar y abordar sus propias áreas de mejora.

Conclusiones

El estudio sobre la colaboración entre pares dentro del curso Matemáticas I en la ETSIADI ha señalado varios beneficios clave y desafíos menores asociados con el aprendizaje asistido por pares, particularmente en el contexto de las repeticiones de exámenes. La mayoría de los estudiantes proporcionó resultados positivos, destacando mejoras significativas en la comprensión, la motivación y la confianza debido al enfoque colaborativo. El mecanismo de retroalimentación en su lugar fue particularmente valorado por su naturaleza inmediata y constructiva, ayudando a los estudiantes a identificar y corregir conceptos erróneos mientras reforzaban su base de conocimientos.

A pesar de estos hallazgos positivos, la investigación también destacó problemas ocasionales en la dinámica grupal, como la participación desigual y los niveles variados de preparación entre los compañeros. Estos desafíos, aunque limitados, subrayan la necesidad de ajustes continuos para optimizar el entorno de aprendizaje colaborativo.

Se recomienda realizar más investigaciones para refinar las metodologías de aprendizaje entre pares, explorar su aplicación en diferentes disciplinas e integrar herramientas tecnológicas avanzadas para mejorar su efectividad. Además, las futuras sesiones podrían explorar estrategias para mejorar la interacción grupal y asegurar experiencias positivas aún más consistentes entre todos los participantes.

Referencias

[1] K. Ananiadoui, M. Claro. *21st century skills and competences for new millennium learners in OECD countries*, OECD Education Working Papers 41, 2009. `https://doi.org/10.1787/218525261154`

[2] D. Boud, M. Bearman. *The assessment challenge of social and collaborative learning in higher education*, Educational Philosophy and Theory 56 (5): 459-–468, 2024. `https://doi.org/10.1080/00131857.2022.2114346`

[3] J. Campbell, K. Shaul, K.M. Slagle, D. Sovic. *Sustainable community development through peer-to-peer learning in the online and in-person classroom*, International Journal of Sustainability in Higher Education, ahead-of-print, 2024. `https://doi.org/10.1108/IJSHE-07-2023-0321`

[4] G. Çelik, Ö.F. Sönmez, A. Başer. *Enhancing interprofessional education readiness in undergraduate dental students: a scenario-based peer learning programme*, BMC Oral Health 24: 121, 2024. `https://doi.org/10.1186/s12903-024-03878-7`

[5] N.T. Kerman, S.K. Banihashem, M. Karami, E. Er, S. Van Ginkel, O. Noroozi. *Online peer feedback in higher education: A synthesis of the literature*, Education and Information Technologies 29 (1): 763–813, 2024.

[6] F. Mínguez-Aroca, S. Moll-López, N. Llobregat-Gómez, M.D. Roselló, L.M. Sánchez-Ruiz. *Feedforward Enhanced Control System to Pursue Mathematical Competencies Achievement in Engineering Education*, Education Sciences 14 (4): 362, 2024.

[7] J. Pointon-Haas, L. Waqar, R. Upsher, J. Foster, N. Byrom, J. Oates. *A systematic review of peer support interventions for student mental health and well-being in higher education*, BJPsych Open 10 (1): e12, 2024.

[8] M. Stigmar. *Peer-to-peer Teaching in Higher Education: A Critical Literature Review*, Mentoring & Tutoring: Partnership in Learning 24 (2): 124–136, 2016. `https://doi.org/10.1080/13611267.2016.1178963`

Afiliaciones

Amanda Carreño Sánchez - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València
Alicia Herrero Debón - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València
Santiago Emmanuel Moll López - Departamento de Matemática Aplicada (autor de correspondencia: sanmollp@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València
Jose Antonio Moraño Fernández - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València
Luis Manuel Sánchez Ruiz - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València
Erika Vega Fleitas - Universitat Politècnica de València

IV

Desafíos de la Inteligencia Artificial frente a los exámenes tipo test de PoliformaT

C. Andreu, C. Jordán, V. Sotomayor

El 30 de noviembre del año 2022, la empresa de inteligencia artificial OpenAI lanzó un nuevo producto: el *Chat Generative Pre-Trained Transformer* o, abreviadamente, ChatGPT. El producto consistía en un *chatbot* – programa informático que mantiene conversaciones con sus usuarios – que había sido entrenado con inteligencia artificial para generar sus respuestas (más concretamente, con técnicas de aprendizaje supervisado y por refuerzo) [1]. El formato gratuito en web y app de ChatGPT, así como su gran capacidad para desarrollar múltiples tareas, hicieron que su popularidad se disparase rápidamente. En noviembre de 2023, tan solo un año después de su lanzamiento, ChatGPT registró en torno a 180 millones de usuarios activos mensuales [2]. Este éxito también provocó el surgimiento de muchos nuevos *chatbots*: Gemini (Google), Microsoft Copilot (Microsoft y Bing), Perplexity, etc.

Entre otras habilidades, ChatGPT es capaz de dar conversación y respuestas a cualquier pregunta que se le formule, aportar información sobre cualquier tema, procesar datos y documentos, generar código en cualquier lenguaje de programación, generar imágenes, conexión con Internet, etc. Sin embargo, también se ha observado que ChatGPT aporta, ante determinadas preguntas, información parcialmente sesgada o incorrecta. En el ámbito académico, su uso se ha extendido tanto en profesores como en alumnos, especialmente a la hora de redactar informes, llevar a cabo ejercicios y tareas, e incluso generar o resolver preguntas de exámenes. Este hecho supone una tentación para algunos alumnos que pretenden cometer fraude académico en exámenes *online* realizados a distancia [3, 4]. En la Universitat Politècnica de València (UPV), al igual que otras universidades, la realización de exámenes tipo test a través de su plataforma *online* (PoliformaT), es una forma de evaluación ampliamente extendida en muchas asignaturas. Ante esta situación, la pregunta que surge es: ¿es ChatGPT capaz de aprobar los exámenes tipo test *online* de nuestra propia asignatura?

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XII Jornadas de Innovación Docente, pp. 35–39. ISBN: 978-84-09-64782-8

Metodología

En este trabajo hemos comprobado que ChatGPT es capaz de resolver y aprobar diferentes exámenes tipo test de PoliformaT. Asimismo, hemos analizado los fallos para identificar las debilidades (hasta le fecha) de ChatGPT. Todos los autores de este trabajo imparten prácticas de aula/laboratorio de asignaturas relacionadas con teoría de grafos en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática (ETSINF) y en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación (ETSIT) de la UPV, por lo que ésta ha sido la temática de los exámenes analizados. De los exámenes tipo test se han extraído tres tipos de preguntas: de respuesta verdadero/falso, de respuesta única (con 3-4 opciones) y de respuesta múltiple (con 5-7 opciones). En los dos primeros tipos no restan las preguntas falladas, por lo que la nota se ha computado sumando el número de aciertos. En el tercer tipo (preguntas de respuesta múltiple) se ha considerado como fallo que el conjunto de respuestas escogidas no coincida exactamente con el conjunto de respuestas de la solución. En relación a la metodología empleada, se ha asumido que un alumno con muy bajo o nulo conocimiento en la materia simplemente "copiaría-pegaría" la pregunta del navegador a ChatGPT para que éste le diese la respuesta. Así es como hemos procedido a la hora de formular las preguntas a ChatGPT.

Resultados

En la Tabla IV.1 se muestran las notas obtenidas por ChatGPT en los diferentes exámenes tipo test de PoliformaT realizados. Observamos en primer lugar que, empleando la versión gratuita ChatGPT 3.5, éste suspende en todos los exámenes. Las mejores calificaciones las obtiene en preguntas de verdadero/falso, mientras que las peores se dan en exámenes de respuesta única o múltiple.

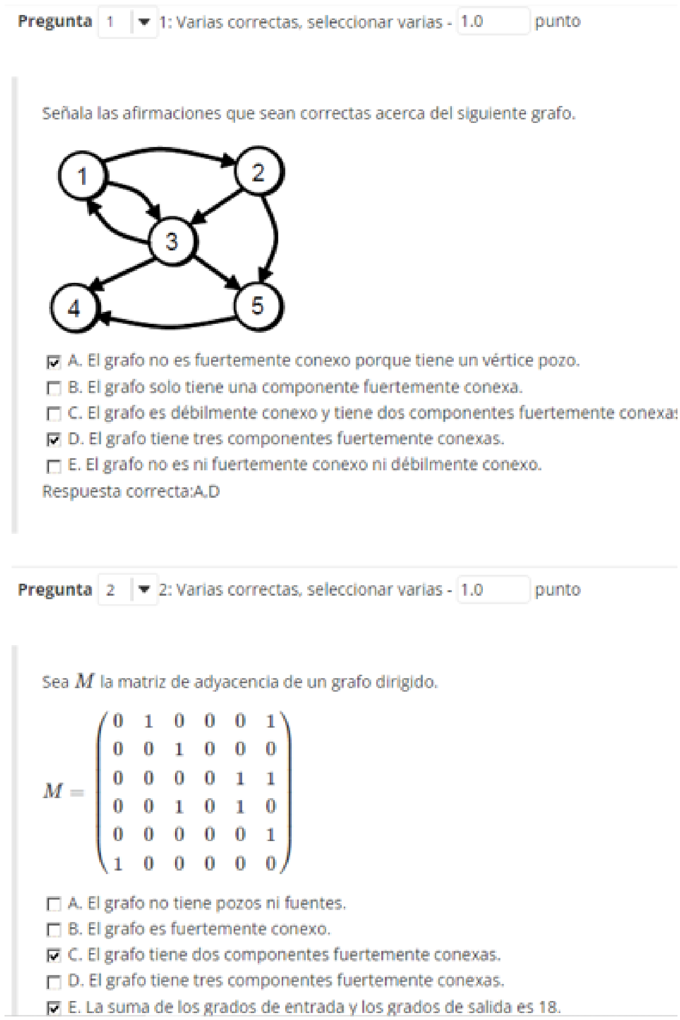
Grado	**Asignatura**	**Tipo de pregunta**	**Nº preguntas**	**Nota ChatGPT 3.5**	**Nota ChatGPT 4**
Matemáticas (doble grado)	Matemática Discreta	Verdadero/Falso	37	3.51/10 (13/37)	3.51/10 (13/37)
Ciencia de Datos	Modelado Discreto y Teoría de la Información	Verdadero/Falso	54	4.07/10 (22/54)	4.07/10 (22/54)
Ingeniería Informática	Matemática Discreta	Respuesta única	14	2.86/10 (4/14)	5/10 (7/14)
Ciencia de Datos	Matemática Discreta	Respuesta múltiple	10	3/10	5/10

Tabla IV.1. Resultados de ChatGPT ante los diferentes test de PoliformaT analizados.

Analizando las respuestas obtenidas por ChatGPT, encontramos dos importantes limitaciones:

- las preguntas con imágenes no pueden ser procesadas en la versión ChatGPT 3.5.
- el contenido en formato LaTeX(matrices, vectores, etc.), al copiarlo desde el navegador, no se pega correctamente en ChatGPT.

Dos ejemplos de estos tipos de preguntas se muestran en la Figura IV.1.


Pregunta 1 1: Varias correctas, seleccionar varias - 1.0 punto

Señala las afirmaciones que sean correctas acerca del siguiente grafo.

- [x] A. El grafo no es fuertemente conexo porque tiene un vértice pozo.
- [ ] B. El grafo solo tiene una componente fuertemente conexa.
- [ ] C. El grafo es débilmente conexo y tiene dos componentes fuertemente conexa:
- [x] D. El grafo tiene tres componentes fuertemente conexas.
- [ ] E. El grafo no es ni fuertemente conexo ni débilmente conexo.

Respuesta correcta:A,D

Pregunta 2 2: Varias correctas, seleccionar varias - 1.0 punto

Sea M la matriz de adyacencia de un grafo dirigido.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- [ ] A. El grafo no tiene pozos ni fuentes.
- [ ] B. El grafo es fuertemente conexo.
- [x] C. El grafo tiene dos componentes fuertemente conexas.
- [ ] D. El grafo tiene tres componentes fuertemente conexas.
- [x] E. La suma de los grados de entrada y los grados de salida es 18.

Figura IV.1. Dos tipos de preguntas que no pueden ser correctamente procesadas por ChatGPT 3.5: preguntas con imágenes y preguntas con código LaTeXembebido.

En este punto, nos hemos planteado que el alumno podría cargar imágenes haciendo uso de su prueba limitada diaria de la versión ChatGPT 4 o directamente podría disponer de ella pagando la suscripción a ChatGPT Plus. También hemos supuesto que podría hacer capturas de pantalla de las partes de la pregunta en formato LaTeX o introducir esos datos manualmente. Con ello, resolviendo de nuevo las preguntas conflictivas (con imágenes o código LaTeX), ChatGPT aprobaría los exámenes de respuesta única y múltiple con un 5/10.

Al analizar detenidamente las respuestas proporcionadas y los fallos cometidos en el resto de preguntas, nos encontramos con que ChatGPT:

1. Las definiciones de teoría de grafos (caminos eulerianos, arista de corte, etc.) que está utilizando no son las mismas que las utilizadas en nuestras clases. Es muy posible que esta imprecisión se deba a que la terminología relativa a estos conceptos no es universal. También debe tenerse en cuenta que ChatGPT ha sido entrenado como un *chatbot* general, por lo que durante su entrenamiento ha aprendido las generalidades de los conceptos para dar respuestas generales a un usuario promedio, omitiendo los detalles de las definiciones.

2. En ocasiones, modifica los datos de las preguntas al generar su respuesta y, en consecuencia, llega a conclusiones incorrectas. Esta situación la hemos detectado, por ejemplo, en la aplicación del algoritmo de Havel-Hakimi sobre sucesiones gráficas largas. En uno de los pasos intermedios del razonamiento, ChatGPT omitió datos de estas sucesiones, generando por tanto resultados incorrectos.

3. Asume como verdadera información incorrecta que aparece en el enunciado de las respuestas. Esto ha ocurrido al preguntar sobre comandos de Python (relativos a grafos): conscientemente habíamos introducido en el enunciado de las respuestas algunos comandos inexistentes, para que los estudiantes razonaran sobre su veracidad o falsedad. Esta situación creemos que puede darse porque uno de los principales objetivos de ChatGPT (el mismo *chatbot* así lo reconoce) es la de agradar al usuario y ofrecerle una grata experiencia. Por lo tanto, según cómo se formule la pregunta, ChatGPT "prefiere" asumir que la información que le proporciona el usuario es verdadera antes que corregirlo.

Conclusiones

Tras resolver algunos exámenes tipo test de PoliformaT de nuestras asignaturas, hemos comprobado que ChatGPT arroja resultados, en general, mediocres (no superando el 5/10 de nota). Analizando las respuestas erróneas, hemos comprobado que las principales medidas que evitarían (de momento) el fraude académico haciendo uso de esta herramienta serían la introducción de preguntas con imágenes, con detalles específicos sobre conceptos teóricos y con datos en formato LaTeX. Como líneas futuras, se podría aplicar un análisis similar empleando otros *chatbots*, como Gemini o Microsoft Copilot por ejemplo, en los que no existen restricciones a la hora de introducir imágenes.

Con este trabajo hemos comprobado que los profesores aún tenemos margen de defensa para evitar el uso indebido de los *chatbots* de inteligencia artificial disponibles a día de hoy. Sin embargo, dado el rápido avance de la inteligencia artificial, es aconsejable estar al día de las nuevas tecnologías que puedan surgir para actualizar o diseñar diferentes pruebas de evaluación para el alumnado donde realmente sean evaluados sus conocimientos.

Referencias

[1] OpenAI. *Introducing ChatGPT*. Último acceso 30/06/2024. `https://openai.com/index/chatgpt/`

[2] M. Silveiro. *ChatGPT: número de usuarios y estadísticas*. Último acceso 30/06/2024. `https://www.primeweb.com.mx/chatgpt-usuarios-estadisticas`

[3] P.M. Newton, M. Xiromeriti. *ChatGPT performance on multiple choice question examinations in higher education. A pragmatic scoping review*, Assessment & Evaluation in Higher Education: 1–18, 2024.

[4] D.R.E. Cotton, P.A. Cotton, J.R. Shipway. *Chatting and cheating: Ensuring academic integrity in the era of ChatGPT*, Innovations in education and teaching international 61 (2): 228–239, 2024.

Afiliaciones

Carlos Andreu Vilaroig - Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar (autor de correspondencia: caranvi1@etsii.upv.es), Universitat Politècnica de València
Cristina Jordán Lluch - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València
Víctor Manuel Ortiz Sotomayor - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

V

Un ejemplo de enseñanza interdisciplinar Matemática-Física en el aula: simulando el vaciado de depósitos

J.C. Cortés, E. López, C. Pérez, R. Villanueva

El vaciado de depósitos es un ejemplo de problema físico que puede modelizarse mediante ecuaciones diferenciales. Su formulación se puede encontrar en numerosos libros reconocidos, como [2, 3]. Su interés pedagógico reside en su riqueza formativa a nivel interdisciplinar y multidisciplinar, y que admite una sencilla representación geométrica. La mayoría de textos clásicos utilizados en el aula se centran en depósitos de formas simples (como cilindros o conos truncados), mientras que nuestro trabajo extiende el enfoque para incluir depósitos generados por la revolución de curvas arbitrarias. De este modo, los depósitos generados pueden tener geometrías más complejas y variadas como consecuencia de la rotación de una curva arbitraria alrededor de un eje.

Nuestro objetivo es desarrollar un ejemplo general de vaciado de depósitos que sea intuitivo e interactivo, para ayudar al alumnado a conectar los conocimientos aprendidos en asignaturas de Física y Cálculo. Este enfoque no solo facilitará la comprensión de los conceptos teóricos, sino que también promoverá el aprendizaje activo a través de la visualización y la experimentación. Utilizaremos herramientas computacionales para generar simulaciones que ilustren los conceptos que se estudian a partir de fundamentos matemáticos y principios físicos se aplican en situaciones reales. De este modo se persigue que fortalecer la capacidad de los estudiantes para aplicar sus conocimientos en contextos diversos, que pueden llegar a ser desafiantes.

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XII Jornadas de Innovación Docente, pp. 41–46. ISBN: 978-84-09-64782-8

Metodología

El enfoque propuesto permite estudiar el problema del desalojo de un fluido de un depósito generado por la revolución de una curva arbitraria (sin puntos de corte), resultando en la generación de depósitos tridimensionales con geometrías complejas y personalizables.

El estudio parte de la premisa de que el volumen del depósito se genera mediante la revolución de una función real positiva, $R : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, que depende de la altura $h \geq 0$. Así, $R(h)$ describe el radio del sólido dada una altura $H : 0 \leq h \leq H < \infty$, donde H es la altura del recipiente (véase la Figura V.1).

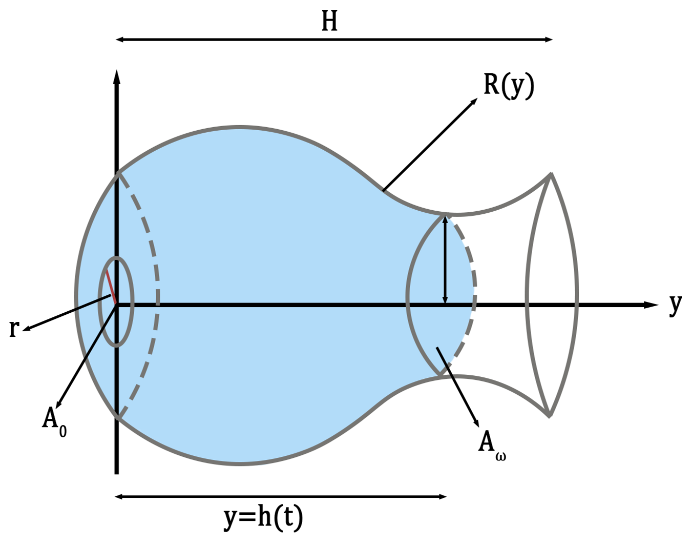


Figura V.1. Volumen de un cuerpo de revolución generado por la función $R(y)$ donde $0 \leq y \leq H$.

Sin pérdida de generalidad, asumimos que estos depósitos están completamente llenos al inicio y que los agujeros de la base, de radio r, son lo suficientemente pequeños para que el flujo pueda ser considerado laminar y regido por la ecuación de Torricelli ($r \ll \min_{0 \leq y \leq H} \{R(y)\}$).

Para resolver el problema, combinamos herramientas matemáticas que se imparten en la mayoría de las titulaciones de ingeniería. Por un lado, utilizamos ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables, y por otro, el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución mediante integración. Con estas técnicas obtenemos expresiones semi-explícitas que describen la altura del líquido en el depósito en función del tiempo, $h(t)$, tal que se verifique:

$$\int_{H}^{h(t)} y^{-\frac{1}{2}} R^2(y)\,\mathrm{d}y = -r^2\sqrt{2g}t,$$

donde g es la constante de la gravedad. También es posible calcular el tiempo total de vaciado

$$T = \frac{F(H) - F(0)}{r^2\sqrt{2g}},$$

donde $\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y} = y^{-\frac{1}{2}} R^2(y)$. Estos resultados nos permiten comprender mejor la dinámica del vaciado en depósitos con geometrías complejas y proporcionar soluciones aplicables en contextos prácticos.

Simulaciones númericas

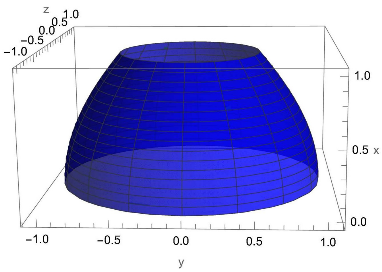
El estudio se complementa con el cálculo de simulaciones en el *software* Mathematica© [7], las cuales facilitan la visualización de los resultados teóricos y permiten verificar la precisión de nuestras formulaciones. Estas simulaciones no solo ilustran el comportamiento del vaciado, sino que también actúan como una herramienta pedagógica, ayudando a los estudiantes a comprender los conceptos involucrados a través de la interacción con código y la visualización. Además, el hecho de que el estudio teórico se haya realizado para curvas arbitrarias de revolución permite que cada estudiante puede realizar su propio análisis, propiciando que se trabaje el proceso de aprendizaje la competencia tranversal "toma de decisiones".

Wolfram Language© [7] es un lenguaje de programación simbólico, introducido en 1988, que revolucionó la matemática computacional. Este lenguaje se utiliza frecuentemente en el ámbito educativo debido a su sintaxis, que imita la notación comúnmente empleada en las aulas a la hora de enseñar matemáticas clásicas. Su uso fomenta la comprensión de conceptos matemáticos, especialmente en lo que respecta a la naturaleza y funcionamiento de las funciones reales y complejas.

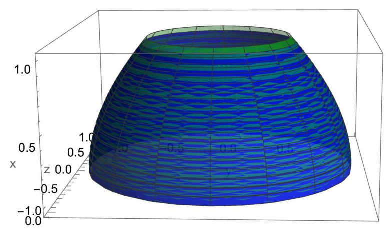
El impacto del Wolfram Language en la educación matemática es notable. Al proporcionar una plataforma en la que los estudiantes pueden interactuar directamente con fórmulas y conceptos, se facilita una comprensión más profunda y práctica de los temas. Además, este lenguaje permite visualizar y manipular datos de maneras que no serían posibles con métodos tradicionales.

Por ejemplo, los estudiantes pueden escribir y ejecutar programas que representan funciones matemáticas, ver gráficas en tiempo real y explorar las propiedades de estas funciones de manera interactiva. Esto no solo mejora su comprensión de los conceptos teóricos, sino que también les proporciona habilidades prácticas en programación y análisis de datos, que son valiosas no solo en el ambito universitario, sino también en el ambito profesional.

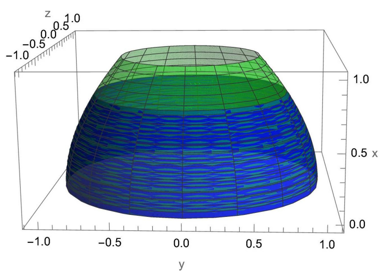
En nuestro caso utilizamos este lenguaje para resolver el problema del vaciado de depósitos para funciones $R(y)$ en las cuales no se puede resolver el problema analíticamente. Hemos desarrollado un código que genera figuras interactivas que simulan el vaciado de los depósitos en tiempo real dado una función $R(y)$. El código está disponible en GitHub. Un ejemplo interesante es $R(y) = \cos(y)$ con un agujero de radio $0.01 \ll \cos(1)$ m y altura de 1 m. En este caso el tiempo de vaciado es $T = 75334.3$ segundos que son aproximadamente 20 horas, 55 minutos y 34 segundos. Se presentan en la Figura V.2 simulaciones en diferentes tiempos: 0, 10, 100 minutos y 6 horas.



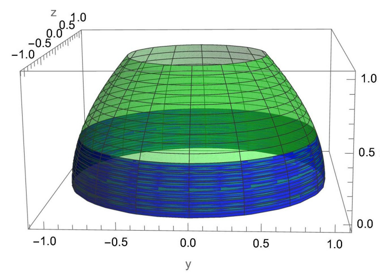
(a) Tiempo t desde el inicio del vaciado: 0 minutos



(b) Tiempo t desde el inicio del vaciado: 10 minutos



(c) Tiempo t desde el inicio del vaciado: 100 minutos



(d) Tiempo t desde el inicio del vaciado: 6 horas

Figura V.2. Vaciado de un depósito con $R(y) = \cos(y)$, $H = 1$ m y $r = 0.01$ m cuando el tiempo t varía entre 0 y 6 horas. El recipiente está representado en verde y el líquido en azul.

Aplicación en el aula

La metodología propuesta puede ser especialmente útil en contextos educativos donde la visualización interactiva puede mejorar significativamente el aprendizaje y la retención de conceptos matemáticos avanzados. Proponemos este trabajo interdisciplinar como parte de las asignaturas de Matemáticas y Física: integrándolo, para la

`https://github.com/CristinaPD/vaciado_depositos/`

primera en los temas de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs), y en la segunda, dentro del tema de Mecánica de Fluidos.

Para garantizar que los alumnos puedan aprovechar este trabajo, es importante que hayan estudiado los siguientes preliminares:

- Ecuación de continuidad, principio de Bernouilli (Física).
- Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución por integración (Matemáticas).
- Integración de EDOs por el método de separación de variables (Matemáticas).

Una vez que los alumnos hayan estudiado los preliminares anteriormente indicados, proponemos el siguiente plan de trabajo:

1. Vaciado del depósito en forma de cilindro.
2. Vaciado del depósito en forma de cono truncado.
3. Vaciado del depósito en forma de esfera truncada.
4. Vaciado del depósito en forma de cuerpo de revolución de una curva arbitraria.
5. Análisis de sensibilidad del cambio de la altura y el tiempo de vaciado cuando se varía marginalmente uno de los parámetros del problema.

Este plan de trabajo, que incrementa la dificultad de manera progresiva, asegura el seguimiento del alumnado y proporciona una estructura fácil e intuitiva para el profesorado. Cada uno de los pasos puede ser cumplimentado por simulaciones computacionales.

Conclusiones

En este trabajo proponemos un ejercicio práctico para el aula que combina conocimientos de las asignaturas de Física y Cálculo, otorgándole un atractivo interdisciplinar significativo. Utilizamos el estudio de depósitos generados por la revolución de curvas para introducir ecuaciones diferenciales y reforzar conocimientos previos, aplicándolos al modelado de problemas reales. Además, esta generalización permite abordar el problema con diferentes niveles de dificultad, guiando al alumnado hacia una comprensión más profunda y general del problema.

Este trabajo se complementa con el uso de simulaciones computacionales, lo que facilita la visualización y el entendimiento de los conceptos. Asimismo, motivamos el estudio de variantes no cubiertas en textos académicos tradicionales, presentando ejemplos concretos y diversos. De este modo, fomentamos un aprendizaje más completo y aplicado, adaptado a las necesidades y capacidades de los estudiantes.

Referencias

[1] E. Marmolejo, J.A. Riestra. *Modelo matemático del llenado de recipientes*, Modeling in Science Education and Learning 6 (2): 155–169, 2013.

[2] D.G. Zill, M.R. Cullen. *Differential equations with boundary-value problems*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 7th edition. ISBN: 978-0-495-10836-8. Canada 2009.

[3] W.E. Boyce, R.C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and boundary value problems*, John Wiley & Sons, Inc., 10th edition. ISBN: 978-0-470-45831-0. United States of America, 2009.

[4] G. Polya. *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press. ISBN: 978-0-691-11966-3. United States of America, 1973.

[5] M. de Guzmán Ozámiz. *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*, Ediciones Pirámide. ISBN: 978-84-368-4179-4. España, 2019.

[6] J. Mason, L. Burton, K. Stacey. *Pensar matemáticamente*, MEC/Labor. ISBN: 84-335-5139-6. España, 1988.

[7] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Versión 13.3, 2023. `https://www.wolfram.com/mathematica`

Afiliaciones

Juan Carlos Cortés López - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València
Elena López Navarro - Rectorado, Universitat Politècnica de València
Cristina Pérez Diukina - Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar (autora de correspondencia: cperdiu@posgrado.upv.es), Universitat Politècnica de València
Rafael Jacinto Villanueva Micó - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

VI

Algunes metàfores i analogies per a l'ensenyament de conceptes matemàtics

F. Pedroche

L'ús de metàfores i analogies en l'ensenyament de les matemàtiques, i de la ciència en general, està ben documentat en la literatura. Malgrat això, no sol ser un tema habitual en congressos educatius d'àmbit matemàtic. En esta comunicació ens centrem a mostrar exemples de com usar metàfores i analogies per a introduir certs continguts matemàtics com ara propietats matricials, mitjana aritmètica, i recta de regressió. L'ús d'estes figures s'ha treballat en el desenvolupament de la docència de les assignatures Matemàtiques I, i Matemàtiques II, del Grau d'Arquitectura Tècnica de l'ETSE d'Edificació de la Universitat Politècnica de València.

Introducció

Les persones que s'ocupen de la ciència, i en particular els matemàtics, tendim a pensar que quan enunciem una veritat científica l'auditori (l'alumnat) ho acceptarà (ho entendrà) automàticament. I això no és cert, com hem comprovat a les classes, a les conferències, i a la vida social en general. D'altra banda, els matemàtics pensem en moltes ocasions que la matemàtica és pura lògica, pur rigor, i això tampoc és cert, com evidencien multitud de contradiccions i paradoxes que han aparegut en les matemàtiques al llarg de la història (les paradoxes de Bertrand Russell, la paradoxa de Monty Hall en estadística, etc.). Per estes raons és important, d'una banda, fer ús de les tècniques d'argumentació clàssica (o siga, figures retòriques, veure per exemple [20], [13]) i també de les anomenades tècniques d'argumentació quasi-lògica [18] a l'hora de comunicar la ciència en general i d'impartir classes de matemàtiques en particular, per tal de convèncer el nostre auditori. No cal oblidar que les matemàtiques són un llenguatge, i com a tal tenen definicions, paradoxes, metàfores, etc. (vegeu, per exemple, [19], [3], [21], [12]).

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XII Jornadas de Innovación Docente, pp. 47–53. ISBN: 978-84-09-64782-8

En esta comunicació ens centrem en les figures de les comparacions (metàfores i analogies) com a ferramentes per a comunicar millor conceptes matemàtics al nostre alumnat. L'ús destes figures està ben documentat en la bibliografia, per exemple, en la docència de física [6], estadística [14], matemàtiques [1], [16], ciència de dades [17], biologia [8], enginyeria del disseny [10], administració dempreses [9], o dret [22].

En la secció següent mostrem com hem fet ús d'algunes metàfores i analogies en les nostres classes de Matemàtiques I i Matemàtiques II en el Grau d'Enginyeria Tècnica en la ETS d'Enginyeria d'Edificació de la Universitat Politècnica de València.

Definicions

Podem donar la defició d'una metàfora com una comparació on no apareix el nexe com. Per exemple, *una funció és una caixa*, *l'infinit és un acordió*, encara que alguns autors intercanvien els conceptes d'analogia i metàfora [5], i altres, com [11], consideren que gairebé tots els nostres models de la realitat són metaforitzacions.

Nosaltres seguirem la definició d'analogia de [7], on es posa el focus en similituds de conceptes entre conjunts, del tipus "A és a B (en el conjunt base o familiar de l'analogia) com C és a D (en el conjunt objectiu o *target*)". Per exemple, podem establir una analogia entre l'esport de la Fórmula 1 i l'esport del futbol fent l'analogia mostrada en la Figura VI.1. Noteu que l'analogia pot fallar en algun concepte, com ara en la figura del pilot, que no és comparable al grup de jugadors d'un equip de futbol.

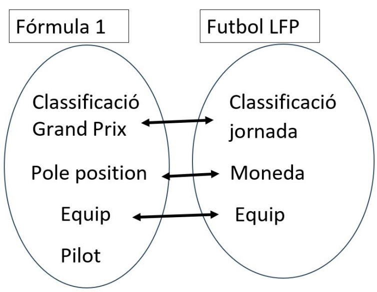


Figura VI.1. Una analogia entre la competició de Fórmula 1 i la Lliga de Futbol Professional.

Exemples

Operacions amb matrius

Quan estudiem les operacions amb matrius reals, ensenyem al nostre alumnat que l'operació de transposició d'una matriu consisteix a canviar files per columnes. Introduïm aleshores esta propietat de la transposició del producte de matrius.

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{VI.1}$$

Un altre concepte que també treballem és el d'inversa d'una matriu, on introduïm la propietat per al producte de matrius invertibles.

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \tag{VI.2}$$

És aleshores quan fem veure a l'alumnat la semblança entre les equacions (VI.1) i (VI.2). Esta analogia és important perquè permet establir una regla mnemotècnica. Però cal anar amb compte perquè els alumnes poden dur l'analogia més enllà i pensar que AB elevat a alguna cosa sempre és B elevat a eixa cosa per A elevat a eixa tal cosa, fet que no és cert, ja que en general tenim que $(AB)^2 \neq B^2 A^2$. Un exercici que sorgeix de manera natural és preguntar als alumnes, precisament, quan s'acomplirà tal expressió (quan les matrius commuten).

Mitjana aritmètica

En molts llibres de text d'estadística (per exemple [4]) quan s'introdueix el concepte de mitjana aritmètica es fa l'analogia amb la fórmula que dona el centre de masses d'un sistema de masses puntuals en física. En efecte, si considerem r valors diferents de x_i amb freqüències absolutes n_i, la mitjana aritmètica dels valors ve donada per la fórmula següent.

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i n_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i} \tag{VI.3}$$

Ara imaginem r masses puntuals situades sobre una barra (unidimensional, sense massa) tal que cada massa val n_i i està situada a x_i metres d'un origen situat a la barra. Aleshores, per definició, la posició del centre de masses del sistema ve donat per l'equació (VI.3). És a dir, en este cas l'analogia és completa.

Per exemple, considerem tres masses de valor un kilo, dos kilos i dos kilos, situades, respecte de l'inici d'una barra, en les posicions un metre, dos metres i dos metres i mig, respectivament. Aleshores, la posició (en metres) del centre de masses ve donada per:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2{,}5}{5} = \frac{10}{5} = 2,$$

tal com es mostra a la Figura VI.2 on hem dibuixat una barra de longitud quatre metres. Respecte de l'origen de la barra (que asumim a l'esquerra) el centre de masses está situat a dos metres, i és el punt d'equilibri del sistema.

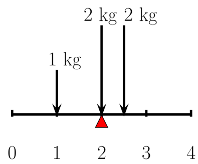


Figura VI.2. El centre de masses del sistema s'indica pel triangle roig. La seua posició és anàloga a la mitjana dels valors $\{1, 2, 2, 2{,}5, 2{,}5\}$.

Recta de mínims quadrats

En esta secció, basada en [23] i [2], ens interessem per la correlació lineal. Donades n parelles de valors (x_i, y_i), podem establir un model que les lligue, en la forma: $\widehat{Y} = f(X)$, on $\widehat{Y}$ denota el valor de la variable Y que ofereix el model. L'error, per a cada parella de valors (x_i, y_i) ve donat per $y_i - \widehat{y_i}$. En la regressió per mínims quadrats s'exigeix fer mínima la suma dels quadrats dels errors, és a dir, es minimitza la quantitat:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y_i})^2. \tag{VI.4}$$

El model més simple que podem prendre és quan $\widehat{Y} = k$. És a dir, un valor constant. És fàcil demostrar que, en este cas, el model que fa mínima la suma dels quadrats dels errors és, precisament:

$$\widehat{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \overline{y}.$$

Per a visualitzar l'error que cometem en agafar $\overline{y}$ per predir el valor de Y fem ús de l'analogia mostrada en la Figura VI.3 on hem representat l'error de cada parella (x_i, y_i) per un quadrat. La suma dels errors ve representada per eixa acumulació de quadrats de color taronja.

Passem ara a estudiar un model lineal. El model lineal $\widehat{Y} = aX + b$, s'anomena recta de mínims quadrats, i és conegut (veure per exemple [15]) que ve donat per

$$\widehat{y} - \overline{y} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}(x - \overline{x}),$$

on

$$S_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}, \qquad S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Anomenem ara l'error quadràtic (VI.4) com:

$$SQ_{res} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y_i})^2.$$

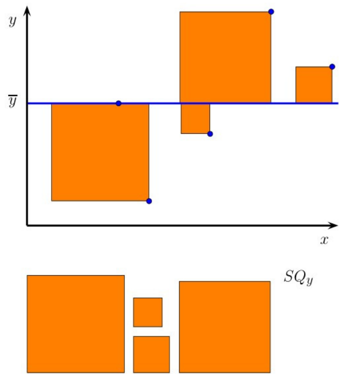


Figura VI.3. Visualització de l'error quadràtic $SQ_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$.

És conegut que una mesura de la bondat del model ens la dona el coeficient de correlació lineal r, que acompleix

$$r^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{y}_i)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} = 1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_y},$$

és a dir

$$r^2 = \frac{SQ_y - SQ_{res}}{SQ_y},$$

que és la quantitat que és fàcil de visualitzar fent servir la Figura VI.3 i la Figura VI.4, ja que en el numerador està la diferència entre els quadrats taronja i els quadrats verds, mentre que en el denominador està, com a factor de normalització, la suma dels quadrats taronja.

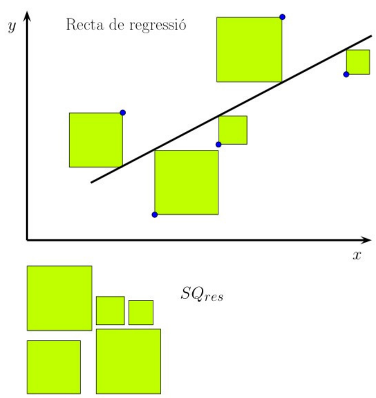


Figura VI.4. Visualització de l'error quadràtic $SQ_{res} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{y}_i)^2$.

Conclusions

En esta comunicació hem fet una breu revisió sobre la literatura científica referida a l'ús d'analogies i metàfores com a ferramentes docents. Així mateix, hem mostrat uns quants exemples d'ús de metàfores i analogies per explicar conceptes matemàtics com propietats matricials, mitjana aritmètica, i recta de regressió.

Referències

[1] J.I. Acevedo, V. Font, J. Giménez. *Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions*. Globalisation and mathematics Education 54: 336–342, 2004.

[2] A. Alam. *R^2 is a widely used measure of fit*. `https://www.linkedin.com/embed/feed/update/urn:li:share:7126535960493719552`

[3] W. Byers. *How mathematicians think: using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*, Princeton Univ. Press. ISBN: 978-1-4008-3395-5. 2007

[4] J.L. Devore. *Probability and statistics for engineering and the sciences*, Cengage Learning, 8th Edition. ISBN: 978-0-5387-3352-6. 2012.

[5] R. Duit. *On the role of analogies and metaphors in learning science*, Science Education 75 (6): 649–672, 1991.

[6] T. Fagúndez, M. Castells. *La argumentación en clases universitarias de física: una perspectiva retórica*, Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas 30 (2): 153–174, 2012.

[7] D. Gentner. *Structure-mapping: a theoretical framework for analogy*, Cognitive Science 7 (2): 155–170, 1983.

[8] S.W. Gilbert. *An evaluation of the use of analogy, simile, and metaphor in science texts*, Journal of research in science teaching 26 (4): 315–327, 1989.

[9] J.M. Hernández Terrés. *Pervivencia de la retórica. La docencia universitaria y la comunicación empresarial*, Llengua Societat i Comunicació 3: 47–57, 2005.

[10] J. Hey, J. Linsey, A. Agogino, K. Wood. *Analogies and metaphors in creative design*. The international journal of engineering education 24 (2): 283–294, 2008.

[11] G. Lakoff, M. Johnson. *Metaphors we live by*, University of Chicago Pres. ISBN: 978-0-2264-6801-3. 1980.

[12] G. Lakoff, R.E. Núñez. *Where Mathematics Comes From*, Basic Books. ISBN: 978-0-465-03771-1. 2000.

[13] A. Marchese, J. Forradellas. *Diccionario de retórica, crítica y terminologia literaria*, Editorial Ariel. ISBN: 978-84-344-0632-2. 1986.

[14] M.A. Martin. *Its like...you know: the use of analogies and heuristics in teaching introductory statistical methods*, Journal of Statistics Education 11: 1–28, 2003.

[15] A.M. Montiel, F. Rius, F.J. Barón. *Elementos básicos de estadística económica y empresarial*, Prentice Hall. ISBN: 9-788-4896-6020-5. 1997.

[16] S. Nama, M. Hayeen-Halloun, M. Ayalon. *Noticing of argumentation: a comparison between pre-service and in-service secondary-school mathematics teachers*, The Journal of Mathematical Behavior 72: 101098, 2023.

[17] F. Pedroche. *Integració de figures retòriques en exposicions orals en el context de l'assignatura Projecte I, Comprensió de Dades*, Jornades d'Innovació docent en Informàtica (JIDINF23): 84–102, 2023.

[18] C. Perelman, L. Olbrechts-Tyteca. *Tratado de la argumentación. La Nueva Retórica*, Editorial Gredos. ISBN: 978-8-424-92897-1. 1989.

[19] G. Polya. *Mathematics and plausible volume 1: induction and analogy in mathematics*, Princeton University Press. ISBN: 978-0-691-02509-4. 1954.

[20] M.F. Quintiliano. *Instituciones oratorias*, Biblioteca virtual Miguel de Cervantes. 2004.

[21] S. Serrano. *Paradoxes i argumentació. De la retòrica als refinaments de la matemàtica*, 53 reflexiones sobre aspectos de la fonética y otros temas de lingüística: 493–501, 2016.

[22] J.Á. Tamayo. *La formación del alumnado universitario a través de la retórica*, UNIVEST 2011: III Congreso Internacional "La autogestión del aprendizaje", Girona, 2011.

[23] Wikipedia: coefficient of determination. `https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination`. Visitat el 14/02/2024.

Afiliació

Francisco Pedroche Sánchez - Departament de Matemàtica Aplicada (autor de correspondència: pedroche@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

VII

Reflexiones sobre el estudiantado de los grados de ADE y Logística

S. Camp, L. Monreal, M.J. Pérez, C. Santamaría

Introducción

El estudiantado de los grados de Administración de Empresas (ADE) y Gestión del Transporte y la Logística (en adelante, Logísitica) presenta unas caracterísiticas propias que los diferencia del estudiantado de otros grados que se imparten en la Universitat Politècnica de València (UPV). De ellas, la más evidente es la modalidad de Bachillerato cursada: el 81 % procede del bachillerato de Ciencias Sociales (CCSS) en el Grado de ADE (72 % si añadimos a los estudiantes de los Dobles Grados de ADE con Informática y Tecnología de Alimentos (CTA)), y el 75 % en el Grado de Logística.

Con el fin de conocer mejor a nuestros estudiantes [1], durante el curso 2022-2023 nos reunimos con profesoras que impartían la asignatura Matemáticas Aplicadas a las CCSS (MatCCSS) en los IES el Clot y Serpis de Valencia [1], con el propósito de dar respuesta a las siguientes preguntas.

1. ¿Qué tipo de alumnos estudia bachillerato de ciencias sociales?
2. ¿Cuál es su relación de interés/afectiva hacia las matemáticas?
3. ¿Qué conceptos erróneos o carencias tienen?

La respuesta a las preguntas 1 y 2 nos la resumieron con la frase *a los mejores estudiantes se les suele dirigir al bachillerato de ciencias*. En consecuencia, aunque hay buenos alumnos en MatCCSS conviven con otros a los que no se le dan bien las matemáticas pero no quieren latín y griego, o están en bachillerato aunque realmente no quieren (por ejemplo porque no hayan tenido plaza en ciclos formativos de FP), o han cursado las matemáticas aplicadas en 4º ESO, o incluso tienen las matemáticas de 4º ESO suspendidas (académicas o aplicadas).

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XII Jornadas de Innovación Docente, pp. 55–59. Copyright © 2024 Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-64782-8

En cuanto a la tercera pregunta, nos confirmaron que un porcentaje elevado tiene dificultades con las operaciones elementales, identidades notables, resolución de ecuaciones e inecuaciones, uso del lenguaje matemático y presentan graves carencias en derivación, integración, trigonometría, etc. Hay estudios rigurosos que confirman también este hecho [2].

Los resultados del examen de MatCCSS en 2023 en las Pruebas de Acceso a la Universidad corroboran lo dicho anteriormente: un 58.6 % de aptos y una nota media de 5.2.

Pero, ¿nuestros estudiantes se corresponden con este perfil? La percepción es que presentan carencias y conceptos erróneos, y que la relación con las matemáticas de algunos de nuestros estudiantes no favorece el aprendizaje. En el Grado de ADE, que se lleva impartiendo desde hace bastantes años, conocemos los puntos débiles de nuestros estudiantes y ya llevamos años realizando acciones dirigidas a paliarlos: se han diseñado una serie de actividades evaluables que han permitido detectar dichas carencias en gran parte, y, sobre todo, que los alumnos sean conscientes de ello. Se realizan 12 sesiones de seminarios/prácticas, en grupos reducidos, lo que permite hacer un seguimiento individualizado. Con ello, se ha conseguido una gran mejora en los resultados finales: el porcentaje de estudiantes que aprobaron las asignaturas de MADE I y II en el curso 2022-2023 es, aproximadamente, del 70 %.

El que se imparta un nuevo grado (Logística) con un perfil de estudiante similar permite realizar una investigación más profunda al respecto. Durante el curso 2023-2024, nos hemos propuesto dar respuesta a las preguntas 1 y 3. Hemos analizado qué tipo de alumnado cursa los grados de ADE (incluidos los Dobles Grados con Informática y CTA) y cuáles son las carencias e ideas previas erróneas que presentan. Para ello, se ha diseñado un cuestionario para los alumnos de dichos grados que se ha pasado el primer día de clase del primer cuatrimestre. El cuestionario consta de dos partes. En la primera se pregunta sobre los estudios previos: modalidad de bachillerato, nota de matemáticas obtenida en 2º de bachillerato y en las pruebas de acceso, matemáticas cursadas en 4º de la ESO, etc. La segunda parte del cuestionario contiene de 16 preguntas sobre operaciones aritméticas elementales, uso de paréntesis, prioridad en las operaciones, funciones básicas... con el objetivo de averiguar las carencias y errores previos que presentan los alumnos, qué porcentaje de alumnos las tienen y si dependen de los estudios previos o no.

Resultados

A continuación, mostramos algunos de los resultados obtenidos. Respecto del perfil del estudiantado que accede a las titulaciones objeto del estudio, el 81 % procede del bachillerato de CCSS en el Grado de ADE, y baja al 72 % si añadimos a los estudiantes de los Dobles Grados con Informática y CTA. El 75 % ha estudiado el bachillerato de CCSS en el Grado de Logística. En ambos casos, el resto procede del bachillerato de ciencias, y en menor medida, de ciclos formativos de FP.

No obstante, si analizamos el perfil del estudiantado de un grupo de ADE (1ADEM) con el grupo de los dobles grados (1DZ), se observa que la situación es muy distinta: en el grupo 1ADEM el 79 % ha cursado MatCCSS, el 13 % Matemáticas II y el resto, ciclos formativos de FP; mientras que, en el grupo 1DZ, el 65 % ha cursado Matemáticas II, el 24 % MatCCSS y el resto, proviene de ciclos de FP. Esta composición tan distinta de los grupos que cursa las mismas asignaturas nos permitirá analizar los resultados desde distintas perpectivas.

Respecto de las notas de matemáticas obtenidas en las pruebas de acceso, el resultado es el que se muestra en la siguiente figura.

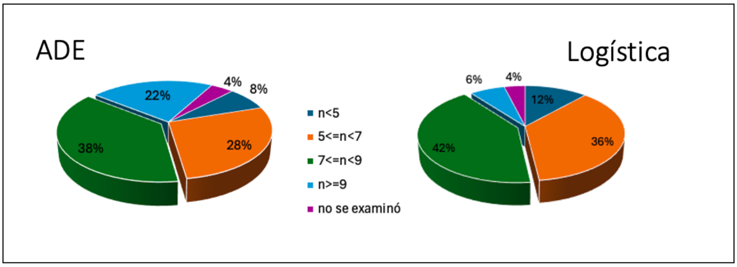


Figura VII.1. Nota de matemáticas en la EVAU.

Los resultados para ADE incluyen todos los grupos, incluidos los dobles grados. Con el fin de establecer una mejor comparativa con el Grado de Logísitica, podemos limitar el estudio al grupo 1ADEM, que ha cursado en un 81 % la asignatura de MatCCSS. En dicho grupo, el 22 % afirma haber obtenido una nota mayor o igual a 9 y el 45 % declara haber obtenido una nota mayor o igual a 7 y menor que 9 en las pruebas de acceso. Teniendo en cuenta que la nota media del estudiantado del Sistema Universitario Valenciano (SUV) en la asignatura de MATCCSS es de 5.24, los estudiantes de los Grados de ADE y Logísitca están muy por encima de este resultado.

Pero los resultados de la segunda parte del cuestionario, que pretende detectar carencias e ideas previas erróneas, nos muestran un panorama muy distinto. En el Grado de ADE, la media obtenida (sobre 16 puntos) ha sido de 9.91, mientras que en Grado de Logísitca baja a 7.66.

Si nos centramos en una de las preguntas del cuestionario, podemos analizar las respuestas en función del grado considerado, del grupo (1ADEM o 1DZ) y los estudios previos, en el caso de ADE. La pregunta elegida es una de las que peor resultado ha obtenido.

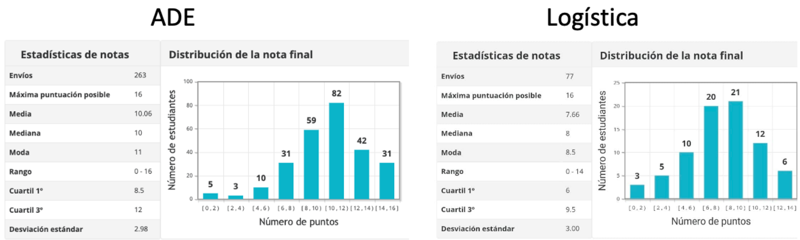


Figura VII.2. Resultados cuestionario inicial y final. ADE y Logística.

Pregunta 4. Si $b = \frac{3}{4}$ y $t = \frac{1}{3}$, calcula el valor de la expresión $1 - b(1 - t)$ (haz los cálculos de forma exacta y expresa el resultado como un entero o fracción simplificada $\frac{n}{m}$.

- El porcentaje de aciertos entre los estudiantes de ADE es del $38\,\%$.
- El porcentaje de aciertos entre los estudiantes de Logística es del $26\,\%$.
- Entre los estudiantes de ADE del grupo 1ADEM es del $40\,\%$.
- Entre los estudiantes de ADE del grupo 1DZ sube al $55\,\%$.
- Entre los estudiantes de ADE que han cursado Matemáticas II es de $49\,\%$.
- Entre los estudiantes de ADE que han cursado Mat. Aplicadas a las CCSS es del $34\,\%$.

Con el fin de medir la mejora, o no, de nuestros estudiantes en los conceptos analizados en el cuestionario, se ha pasado el mismo al grupo 1ADEM al final del segundo cuatrimestre, después de cursar las dos asignaturas de matemáticas (MADE I y II). Los resultados se muestran en la siguiente figura.

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Desviación
Total.inic	44	5,0	14,0	9,909	2,3828
Total.fin	44	8	16	11,47	2,125
N válido (por lista)	44				

Figura VII.3. Comparativa resultados inicial y final (1ADEM).

Cabe señalar que la percepción de los estudantes es que han mejorado en muchos aspectos, pero analizando los resultados individuales, de los 44 alumnos que han realizado las dos pruebas, 32 han mejorado, 10 han empeorado y 2 han obtenido el mismo resultado.

Conclusiones

Aunque este trabajo requiere de una investigación más profunda, el primer análisis muestra que influye más la nota de corte de acceso que los estudios previos. El Doble Grado ADE con Informática tiene una nota de corte mayor que ADE o Logística.

Todos presentan muchas carencias/errores previos que, hasta que llegan a la universidad, se enmascaran y son difíciles de detectar con el uso de, por ejemplo, calculadoras.

Se pueden detectar y corregir dichas carencias con actividades preparadas para ello: seminarios tutorizados, ejercicios, etc.

Es fundamental, si queremos mejorar el aprendizaje de nuestros alumnos, favorecer los intercambios y encuentros con el profesorado de educación secundaria.

Referencias

[1] F. Sánchez Lasheras, M.J. Fernández Gutiérrez, J. Cereijo Viña. *Coordination between high school and university teachers in Spain to reduce mistakes in calculus*, Mathematics 7: 817, 2019.

[2] M.J. Fernández Gutiérrez, F. Sánchez Lasheras, J.A. Trevejo Alonso. *An Intervention Based on Identifying Topics That Students Have Difficulties with*, Mathematics 8: 2220, 2020.

Afiliaciones

Sergio Camp Mora - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Llúcia Monreal Mengual - Departamento de Matemática Aplicada (autora de correspondencia: lmonreal@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

María José Pérez Peñalver - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Cristina Santamaría Navarro - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

En este libro se recogen los resúmenes de las contribuciones que se han presentado en las XII Jornadas de Innovación Docente organizadas por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València. El objetivo es divulgar y reconocer las experiencias y metodologías llevadas a cabo por parte del profesorado de este departamento, especialmente en temas relacionados con los Objetivos de Desarrollo Sostenible, la Inteligencia Artificial y la Investigación en Educación Matemática.

dma
Departamento
de Matemática
Aplicada

9 788409 647828