

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

XIII JORNADAS DE INNOVACIÓN DOCENTE



Editores

Juana Cerdán Soriano

Víctor M. Ortiz Sotomayor

dma

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

XIII JORNADAS DE
INNOVACIÓN DOCENTE

Editores

Juana Cerdán Soriano

Victor Manuel Ortiz Sotomayor

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Jornadas celebradas en Valencia el 25 de junio de 2025

Copyright © 2025 Juana Cerdán Soriano & Víctor M. Ortiz Sotomayor

Todo el contenido de esta publicación está sujeto a una Licencia Internacional Creative Commons 4.0. Usted está autorizado a compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier formato o medio, siempre que cite al autor original, no modifique el contenido en modo alguno y no utilice esta obra con fines comerciales. Para más detalles sobre las condiciones de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

El formato de este libro incluye modificaciones basadas en la plantilla Caraumá, de Janderson Gomes, bajo la licencia CC BY 4.0. Formato original disponible en <https://es.overleaf.com/latex/templates/carauma/pjksmbfyrnkr>.

ISBN: 978-84-09-74878-5

dma

Publicado por Departamento de Matemática Aplicada

ÍNDICE

<i>Prólogo</i>	5
<i>Análisis del uso de Jupyter como recurso educativo en la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales</i> E. López-Navarro, A. Navarro-Quiles y C.L. Pérez	7
<i>Curso de capacitación docente aplicado en matemáticas</i> V. Asensio y A. López-Martínez	13
<i>Evaluación de la edad de razonamiento de LLMs en las Pruebas Cangur de la Comunitat Valenciana</i> A. Igualde-Sáez, L. Rhomrassi, Y. Ahsini, R. Vinuesa, S. Hoyas, J.P. García-Sabater, M.J. Fullana-i-Alfonso y J.A. Conejero	25
<i>Sobrecarga digital y rendimiento académico: estrategias educativas para promover el bienestar estudiantil</i> A. Carreño, S. Moll, E. Vega, L.M. Sánchez y J.A. Moraño	31
<i>Cuando la geometría suma: una aproximación visual y personalizada a la suma de series numéricas</i> J.A. Aledo, J.C. Cortés, M.E. Flores y J.P. Llano	41
<i>Aprendizaje basado en juegos con elementos de rol en Matemáticas I</i> A. Carreño, S. Sánchez, C. Delgado y A. Herrero	49
<i>Soluciones a problemas algebraicos donde la IA falla</i> M.J. Felipe e I. Gilabert	57
<i>La Metodologia de Modelisació General: una ferramenta transdisciplinaria per a la presa de decisions implementada en l'Educació Superior</i> J.C. Micó	65

Implementación de los Objetivos de Desarrollo Sostenible mediante la ecuación del calor

N. Ortigosa

PRÓLOGO

En esta decimotercera edición de las Jornadas de Innovación Docente del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València conmemoramos un hito especial: han pasado ya 25 años desde aquella primera edición celebrada en el año 2000. Un cuarto de siglo después, seguimos fieles al propósito fundacional de estas jornadas: generar un espacio donde compartir, reconocer y difundir experiencias docentes y metodologías innovadoras desarrolladas por el profesorado del departamento.

En un entorno universitario en constante transformación, donde los retos sociales, tecnológicos y pedagógicos se entrelazan, la labor docente exige visión, creatividad y compromiso. Estas jornadas aspiran a ser una respuesta a esa exigencia, visibilizando buenas prácticas que no solo enriquecen la experiencia formativa del estudiantado, sino que también permiten construir colectivamente nuevas formas de enseñar y aprender matemáticas.

En esta edición, los trabajos presentados abordan una variedad de enfoques y temáticas que reflejan la vitalidad de la labor docente en nuestro departamento. Se exploran, entre otros, el uso de herramientas digitales como Python para la enseñanza de ecuaciones diferenciales, estrategias para mitigar la sobrecarga digital y mejorar el bienestar estudiantil, nuevas metodologías lúdicas con elementos de rol, cómo implementar los Objetivos de Desarrollo Sostenible en asignaturas matemáticas o el análisis del papel de la Inteligencia Artificial en la resolución de problemas matemáticos.

Esta publicación abre así una ventana a prácticas pedagógicas que están transformando el aula universitaria desde dentro. Esperamos que los contenidos que recoge no solo inspiren nuevas ideas, sino que también motiven a seguir compartiendo, innovando y transformando juntos la educación matemática universitaria en los próximos años.

Desde la Dirección del DMA agradecemos sinceramente la participación de todos los autores y asistentes a estas Jornadas de Innovación Docente, y os animamos a participar en futuras ediciones.

Valencia, julio de 2025
La Dirección del DMA

I

ANÁLISIS DEL USO DE JUPYTER COMO RECURSO EDUCATIVO EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E. López-Navarro, A. Navarro-Quiles y C.L. Pérez

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta clave para el modelado matemático en problemas de ingeniería. Este trabajo preliminar presenta una comparación entre Mathematica[®] y Python (mediante Jupyter Notebooks) como herramientas de apoyo al aprendizaje de ecuaciones diferenciales, con el propósito de evaluar su idoneidad antes de su incorporación formal al aula. Para ello, se realiza un análisis comparativo de características técnicas (licencia, instalación, rendimiento, extensibilidad y facilidad de uso), seguido de un estudio práctico en el que se diseñan y ejecutan *notebooks* en ambos entornos, aplicados al modelo de crecimiento de Verhulst. A través de encuestas y cuestionarios a estudiantes de diversos grados de la Universitat Politècnica de València (UPV), se valorará la comprensión conceptual, la eficiencia en la resolución de problemas y la percepción del alumnado sobre cada plataforma. Los resultados permitirán determinar cuál de las dos opciones ofrece una mejor experiencia educativa y facilitarán la transición hacia entornos de ciencia abierta y accesibles.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales constituyen una potente herramienta matemática para describir situaciones o fenómenos reales: desde la evolución de poblaciones hasta el movimiento de fluidos. Su capacidad para relacionar variables y sus tasas de cambio permite modelar de manera intuitiva procesos dinámicos que, de otro modo, serían muy difíciles de comprender. En la formación de los ingenieros, estas ecuaciones son fundamentales para la modelización matemática, ya que ofrecen el marco teórico necesario para traducir problemas de ingeniería en sistemas de ecuaciones que pueden ser analizados y resueltos para extraer conclusiones prácticas.

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XIII Jornadas de Innovación Docente, pp. 7–12. Copyright © 2025
Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-74878-5

El abanico de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es realmente amplio. En ingeniería civil, por ejemplo, se emplean para el análisis estructural de vigas, donde las deformaciones y tensiones dependen de la carga aplicada y de las propiedades del material. En el ámbito de la ingeniería eléctrica, los circuitos RLC se describen mediante ecuaciones que relacionan voltaje, resistencia, inductancia y capacitancia. Asimismo, en epidemiología, surgen modelos de la dinámica de transmisión de enfermedades que, aunque a veces podemos establecer la existencia y unicidad de la solución, la forma explícita de la misma es desconocida o intratable.

Para trabajar con la mayoría de estos modelos, y especialmente cuando incorporan datos en tiempo real procedentes de sensores (como en redes eléctricas inteligentes o sistemas de monitorización ambiental), es imprescindible contar con herramientas informáticas que automatizen los cálculos. Incluso las ecuaciones más sencillas requieren software para procesar grandes volúmenes de datos y generar visualizaciones que permitan identificar anomalías o tendencias ocultas. Sin estos recursos, la resolución manual se vuelve inviable y el ingeniero carecería de la agilidad necesaria para afrontar retos prácticos de su vida profesional.

En el entorno académico de muchas universidades españolas, incluida la UPV, se dispone de licencias de Mathematica® [5], un lenguaje muy potente para el tratamiento de expresiones simbólicas. No obstante, la dependencia de software propietario supone un obstáculo para los estudiantes una vez concluidos sus estudios. Python, en cambio, es un lenguaje de programación de código abierto que, junto con Jupyter Notebooks, ofrece una interfaz intuitiva y muy adecuada para el aula (ver [2, 4]). Jupyter destaca por su rapidez, su parecido al lenguaje natural en la definición de funciones y por características como su gratuidad, su extensibilidad, la posibilidad de exportar en múltiples formatos y la integración con sistemas de control de versiones como Git o entornos de desarrollo como VS Code (cf. [1]). Además, sus diferentes interfaces, Lab, Notebook o Voilà, permiten adaptar el flujo de trabajo a las necesidades de cada proyecto y facilitar la transición hacia un modelo de ciencia abierta y accesible. Python también cuenta con el respaldo de una comunidad internacional muy activa, que constantemente desarrolla y mantiene librerías especializadas para abordar tanto los retos más recientes como las necesidades emergentes.

METODOLOGÍA

Proponemos integrar en la enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) herramientas tecnológicas accesibles e intuitivas que favorezcan la comprensión teórica y su aplicación práctica, dando cumplimiento al Artículo 33.1 de la Ley Orgánica del Sistema Universitario [3], que garantiza el acceso a formación para el desarrollo de las capacidades digitales y a recursos e infraestructuras digitales, así como impulsa la ciencia abierta mediante el uso de software libre para promover el inter-

cambio de conocimiento. Aunque Mathematica® demuestra gran potencia en este ámbito, su uso suele limitarse una vez finalizada la etapa de grado. Por ello, proponemos Jupyter como una solución abierta y sostenible, que no solo amplía el acceso a recursos sin barreras de licencia, sino que impulsa una educación más inclusiva, colaborativa y alineada con el marco legal y los principios de ciencia abierta.

El paso de un software cerrado a un modelo más accesible es fundamental en el ámbito universitario. El uso de herramientas de código abierto favorece la reproducibilidad de resultados, facilita la colaboración entre estudiantes y profesores, y reduce las barreras económicas para la adopción de tecnologías avanzadas. Esta transición no sólo responde a una demanda de transparencia científica, sino que también impulsa la innovación pedagógica al permitir que cualquier miembro de la comunidad académica adapte, mejore y comparta materiales de enseñanza.

Para explorar esta propuesta en la práctica, planteamos una integración progresiva de Jupyter en la docencia de EDOs. En esta primera fase, no buscamos una implantación formal, sino realizar un análisis comparativo de ventajas y desventajas entre Jupyter y Mathematica®. Con ejemplos sencillos y problemas de complejidad creciente, evaluaremos aspectos como la capacidad para ilustrar conceptos fundamentales y la efectividad en la resolución de ejercicios. En una segunda fase, llevaremos a cabo sesiones de prácticas específicas en las que los y las estudiantes utilizarán ambas plataformas y, mediante cuestionarios, recogeremos su percepción sobre usabilidad, interactividad y utilidad educativa.

Dentro de este marco, nos proponemos objetivos concretos: comparar la comprensión conceptual que facilita cada programa; medir su eficacia en la resolución de problemas de EDOs lineales y no lineales; y valorar factores como la facilidad de instalación, el mantenimiento y el lenguaje de programación. Además, analizaremos la experiencia de uso entre estudiantes de distintos grados —Ciencia de Datos, Informática, Telecomunicaciones, entre otros— para entender cómo varía la percepción según el perfil académico.

El plan de trabajo incluye una revisión bibliográfica inicial y un comparativo de software, seguido por el diseño didáctico y el desarrollo de materiales. Crearemos un conjunto de problemas típicos de EDOs, abarcando diferentes casuísticas, y construiremos *notebooks* interactivos en Jupyter junto a sus equivalentes en Mathematica®. Finalmente, compararemos ambos entornos atendiendo a criterios de claridad, interactividad, facilidad de interpretación y reproducibilidad, con el objetivo de ofrecer una guía sólida para la adopción de herramientas abiertas en la enseñanza de EDOs. Una comparación preliminar se propone en la Tabla I.1.

Categoría	Jupyter	Mathematica®
<i>Licenciamiento y costes</i>		
Licencia	Código abierto, gratuito	Propietaria, de pago por usuario o por núcleo
Comunidad y documentación	Muy activa, abundante contenido libre (GitHub, Stack Overflow, nbviewer)	Fuerte en entornos académicos; documentación oficial exhaustiva, pero mayormente cerrada
<i>Ecosistema y extensibilidad</i>		
Instalación y despliegue	Fácil via Conda o pip; ejecución local y en la nube (Binder, Colab)	Instalador propio; opción de servidor Wolfram Cloud o Wolfram Enterprise
Integración en la nube	SopORTE nativo en plataformas gratuitas y comerciales (Colab, Binder, Google Cloud AI)	Disponible en Wolfram Cloud con licencia
<i>Desempeño y capacidades</i>		
Rendimiento numérico	Excelente con NumPy / SciPy / Numba; GPU via RAPIDS, TensorFlow	Muy sólido para simbólico y numérico; ciertas operaciones paralelas optimizadas en kernel
Visualización	Matplotlib, Plotly, Seaborn, Bokeh, etc.; personalización “manual”	Gráficos 2D/3D dinámicos e interactivos integrados, sin librerías externas
<i>Colaboración y compartición</i>		
Compartición de resultados	‘.ipynb’, HTML, PDF, GitHub workflows, Colab links	Exporta a PDF, CDF, HTML; limitado en edición colaborativa en tiempo real
Colaboración en tiempo real	Soportado por Jupyter Lab + extensiones (Live Share, Voilà)	Disponible sólo en entornos Wolfram Enterprise Cloud
<i>SopORTE y ecosistema empresarial</i>		
SopORTE corporativo	Amplio abanico de opciones (consultoras, integradores, foros)	SopORTE oficial de Wolfram Research con contratos de mantenimiento
Compatibilidad de lenguajes	Arquitectura “polyglot” con kernels para decenas de lenguajes	Principalmente Wolfram Language; ‘ExternalEvaluate’ y WSTP permiten llamar a R, Python, Julia y Java

Tabla I.1. Comparativa entre Jupyter y Mathematica®.

Al trabajar con entornos interactivos como Jupyter o Google Colab, los estudiantes podrán explorar las ecuaciones diferenciales de forma directa, modificar parámetros en tiempo real y visualizar de inmediato los efectos de sus cambios. Esta inmediatez en la retroalimentación contribuye a afianzar conceptos y a mantener la motivación, reduciendo la barrera inicial que a menudo supone el manejo de interfaces más complejas.

Por otro lado, se desarrollarán materiales didácticos accesibles y modernos, adaptados a las necesidades de los y las estudiantes. Los *notebooks* interactivos incluirán explicaciones claras, bloques de código comentados y ejercicios guiados que permitan avanzar de forma progresiva, desde la formulación básica de las EDOs hasta modelos más avanzados. Gracias a la naturaleza abierta de estos recursos, podrán ser compartidos y reutilizados en repositorios institucionales o profesionales, favoreciendo su actualización continua y la colaboración entre docentes.

Asimismo, estos recursos contribuirán a una transición más natural hacia herramientas más modernas, impulsando la modernización de la enseñanza de las EDOs y alineándola con las exigencias formativas actuales. Al comparar directamente ejemplos resueltos en Mathematica® y en Jupyter, el profesorado podrá valorar las ventajas de cada plataforma y elegir la que mejor se ajuste a su estilo docente y a los objetivos del curso, sin renunciar a las prestaciones avanzadas de los sistemas comerciales.

En consonancia con los principios de la Ley Orgánica del Sistema Universitario, se seguirá fomentando el uso de herramientas accesibles y de código abierto para garantizar la equidad en el acceso al software. De este modo, se elimina cualquier barrera económica o de licencia, permitiendo que todos los estudiantes —independientemente de su centro o recurso económico— puedan practicar y profundizar en EDOs con un mínimo de requisitos técnicos.

Como ejemplo práctico de colaboración y aplicación de estos resultados, se ha preparado un *notebook*¹ en Google Colab que implementa el modelo de crecimiento logístico de Verhulst. En este entorno colaborativo, los estudiantes pueden ejecutar el código directamente en la nube, modificar parámetros y observar cómo varía la dinámica poblacional.

El objetivo es realizar una comparación directa, apoyada en encuestas, que nos permita evaluar de la manera más imparcial posible el apoyo que proporcionan tanto Jupyter como Mathematica® al aprendizaje en el aula.

CONCLUSIONES

Principales hallazgos. Jupyter se ha demostrado como una alternativa válida y accesible frente a Mathematica® en la enseñanza de EDOs, ofreciendo interactividad inmediata, facilidad de uso y un modelo de ciencia abierta que favorece la colaboración y la equidad.

Estado actual. Hasta la fecha se ha realizado el trabajo preliminar de diseño didáctico, desarrollo de *notebooks* comparativos y revisión bibliográfica, sentando las bases metodológicas para la evaluación en el aula.

¹<https://colab.research.google.com/drive/1NT3eM918GbLz8oz-8FZR99UJY6fGJ2gW?usp=sharing>

Pasos futuros. En la próxima fase se implementarán sesiones prácticas con estudiantes, se recogerá su percepción mediante cuestionarios y se analizarán los resultados para ajustar los materiales y validar la eficacia de Jupyter frente a Mathematica®.

REFERENCIAS

- [1] P. Gajdoš. Interactive Jupyter notebooks with SageMaker for collaborative learning, *Journal of Computational Education*: **5** (2022), 45–60.
- [2] A. Johnson. Benefits and pitfalls of Jupyter in the classroom, *Computing in Education Review*: **12** (2020), 12–25.
- [3] Ministerio de Universidades. *Ley Orgánica del Sistema Universitario (LOSU)*, BOE-A-2023-7500. 2023.
- [4] L.G. Trujillo Franco, J.A. Guízar García, J. González Sierra, J.D. Rivera Fernández, H.F. Abundis Fong y E. López-Vázquez. Jupyter Notebook como auxiliar en la enseñanza de ecuaciones diferenciales con experimentos, *Pàdi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*: **12** (2024), 120–127.
- [5] Wolfram Research. *Mathematica*®, Version 14.2, released January 23rd, 2025.

AFILIACIONES

Ana Navarro Quiles - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València.

Elena López Navarro - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Cristina Luisovna Pérez Diukina - Departamento de Matemática Aplicada (autora de correspondencia: cperdiu@posgrado.upv.es), Universitat Politècnica de València

II

CURSO DE CAPACITACIÓN DOCENTE APLICADO EN MATEMÁTICAS

V. Asensio y A. López-Martínez

Con la entrada de la nueva Ley Orgánica del Sistema Universitario, a las nuevas incorporaciones como Profesoras y Profesores Ayudantes Doctoras/es se les requiere participar, en su primer año de contrato, en un curso de formación docente inicial. En la Universitat Politècnica de València, por medio del Instituto de Ciencias de la Educación, se ha diseñado un curso de capacitación docente llamado CAyD². El objetivo de esta contribución es exponer los contenidos de dicho curso y mostrar una aplicación de los conocimientos adquiridos en el mismo mediante una propuesta de rediseño en las asignaturas *Matemáticas 2*, del Grado en Fundamentos de la Arquitectura, y *Matemáticas*, del Grado en Biotecnología.

INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que la actividad docente constituye una parte fundamental de las funciones del Personal Docente e Investigador en las universidades españolas. De hecho, junto con la investigación, la docencia representa uno de los pilares esenciales sobre los que se construye la misión universitaria, orientada tanto a la generación como a la transmisión del conocimiento. En este contexto, la calidad de la enseñanza adquiere una relevancia estratégica, no solo para el desarrollo académico del estudiante, sino también para el prestigio y la responsabilidad social de las instituciones de educación superior.

Conscientes de esta importancia, y en el marco de los cambios introducidos por la nueva Ley Orgánica del Sistema Universitario (en adelante LOSU) con entrada en vigor en abril de 2023, se ha establecido la obligatoriedad para el nuevo profesorado Ayudante Doctor de recibir formación docente específica durante su primer año de incorporación. En efecto, en el Artículo 78b) de Profesoras y Profesores Ayudantes Doctoras/es de la LOSU, se incluye el texto:

«Para el desarrollo de su capacidad docente, las Profesoras y Profesores Ayudantes Doctores deberán realizar, en el primer año de contrato, un

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XIII Jornadas de Innovación Docente, pp. 13–24. Copyright © 2025
Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-74878-5

curso de formación docente inicial cuyas características serán establecidas por las universidades, de acuerdo con sus unidades responsables de la formación e innovación docente del profesorado.»

Esta medida responde a la necesidad de garantizar una docencia universitaria de calidad, adaptada a las nuevas demandas pedagógicas y al contexto de la innovación educativa. En esta dirección, la Universitat Politècnica de València (en adelante UPV), por medio del Instituto de Ciencias de la Educación (en adelante ICE), diseñó el **Curso de Capacitación del Ayudante Doctor en Docencia** (en adelante **CAyD²**), un programa de formación pedagógica de 100 horas de duración, con el propósito de dar respuesta a lo establecido en la nueva ley.

Durante este año académico 2024/2025 se está llevando a cabo la segunda edición de dicho curso, cuya primera edición tuvo lugar en el curso 2023/2024. En esta breve contribución trataremos de exponer la organización actual del CAyD² (sesiones, contenidos, dinámica, etc.), nuestra experiencia como participantes en el mismo, y el resultado de los aprendizajes adquiridos a lo largo de esas 100 horas de formación.

La organización de este artículo es la siguiente. Comenzamos dando una descripción del CAyD², contemplando su organización actual e incluyendo de forma general los temas tratados en este curso. Posteriormente proponemos una aplicación de lo aprendido a la asignatura *Matemáticas 2* del Grado en Fundamentos de la Arquitectura de la UPV. Finalmente hacemos lo propio para la asignatura *Matemáticas* del Grado en Biotecnología.

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CAyD²

Tal como hemos mencionado en la Introducción, el curso CAyD² ha sido diseñado por el ICE de la UPV con el objetivo de proporcionar una formación pedagógica inicial al nuevo profesorado Ayudante Doctor. En esta sección detallaremos las características de la segunda edición de este curso celebrada en el año académico 2024/2025.

Empecemos por mencionar los tres objetivos principales del CAyD²:

- Desarrollar las capacidades docentes del profesorado universitario LOSU.
- Aprender a diseñar curricularmente una asignatura completa.
- Iniciar el desarrollo profesional docente.

Para lograr un correcto desarrollo del curso, el equipo docente y/o formativo del CAyD² ha estado formado por tres figuras fundamentales:

- **Mentores.** Son profesores/as que pertenecen al mismo departamento que el/la participante y que trabajan en el proceso de rediseño curricular de la asignatura.
- **Profesorado de la UPV.** Profesores/as con experiencia en la formación del profesorado, de distintas áreas, que explican su experiencia docente sobre el

tema principal de la sesión correspondiente (ya sea sobre Resultados de Aprendizaje, ejemplos de Aprendizaje Basado en Proyectos, temas de Interacción en el Aula, etc.).

- **Asesoras pedagógicas del ICE.** Colaboran con los miembros del equipo formativo y asesoran a los participantes en su proceso formativo.

La estructura del programa consiste en tres talleres y dos seminarios, además de una jornada inaugural y una de clausura, todo celebrado entre diciembre de 2024 y octubre de 2025. Además, debido a la alta participación de estudiantes, a estos se les ha dividido en dos grupos durante esta edición del curso. En estos talleres y seminarios, de 7 horas de duración cada uno, se trabajan aspectos como la iniciación al desarrollo profesional, el aprendizaje activo, la evaluación como aprendizaje, los entornos de aprendizaje constructivo, la interacción educativa o los entornos de aprendizaje virtuales. La organización y programación temporal concreta del CAyD² en el año académico 2024/2025 puede consultarse en la Figura II.1, donde puede apreciarse la partición en dos grupos (G1 y G2) tal como mencionábamos en líneas anteriores.

La metodología que se utiliza a lo largo del curso se basa en un enfoque académico de la enseñanza y el aprendizaje llamado SoTL (*ScholarShip of Teaching and Learning*), que busca la mejora de la práctica docente a través de la reflexión e investigación sobre la misma. En el caso que nos atañe, se parte de la experiencia docente de los participantes del curso a través de lo que se hace en las asignaturas que imparten y de sus concepciones docentes previas. En efecto, al estudiantado de este curso se le plantean, a lo largo de las sesiones que hemos mencionado (talleres y seminarios), preguntas tan generales (e incluso abiertas) como “¿qué es enseñar?” o “¿qué es aprender en la universidad?”. A lo largo del curso se espera una evolución, motivada por estas reflexiones, de la percepción de los participantes respecto a la docencia universitaria.

Para llevar a cabo este tipo de reflexiones se ofrece, en una de las sesiones iniciales, una guía de autoevaluación para la mejora de la enseñanza universitaria. Esto permite a los estudiantes conocer en qué punto se encuentran, hacia dónde quieren ir y en qué trabajar para lograr una mejora docente significativa. Dicha guía toma como referencia las siete dimensiones que el ICE establece para lograr una buena docencia universitaria, alineadas con los estándares del programa *Docentia UPV*. Estas dimensiones son las siguientes:

- D1. Diseño curricular coherente y valioso.
- D2. Aprendizaje activo-constructivo: metodologías de enseñanza-aprendizaje.
- D3. Enseñanza para la autonomía y autorregulación.
- D4. Clima e interacción.
- D5. Evaluación como aprendizaje.
- D6. Entornos de aprendizaje.
- D7. Desarrollo profesional.

Programación de actividades CAYD ² 2024-25	
JORNADA INAUGURAL. "Cómo enseñar y ser un buen docente en la UPV"	10 de diciembre de 10 a 14 horas
Actividad previa. Guía de autoevaluación	Del 10 al 13 de diciembre
TALLER 1. Iniciación al desarrollo profesional	G1. 17 de diciembre G2. 19 de diciembre de 10 a 12 horas
ENTREGABLE 1. Análisis inicial de los resultados de aprendizaje	Del 19 de diciembre al 7 de enero
Revisión del ENTREGABLE 1	Del 8 al 12 de enero
SEMINARIO 1. Aprendizaje activo. Evaluación como aprendizaje	G1. 13 de enero G2. 14 de enero de 10 a 14 y de 16 a 19 horas
INFORME 1 del ENTREGABLE 1 (Peer review)	Del 15 de enero al 15 de febrero
ENTREGABLE 2. Rediseño de los resultados de aprendizaje y sistema de evaluación	Hasta el 23 de febrero
Revisión del ENTREGABLE 2	Del 24 de febrero al 9 de marzo
SEMINARIO 2. Entornos de aprendizaje constructivo	G1. 26 de marzo G2. 27 de marzo de 10 a 14 y de 16 a 19 horas
ENTREGABLE 3. Primera propuesta	Hasta el 4 de mayo
Revisión del ENTREGABLE 3	Del 5 al 18 de mayo
TALLER 2. Interacción educativa	3 de junio de 10 a 14 y de 16 a 19 horas
ENTREGABLE 4. Propuesta integrada	Hasta el 29 de junio
Revisión del ENTREGABLE 4	Del 30 de junio al 15 de julio
TALLER 3. Entornos de aprendizaje PoliformaT	ONLINE Del 15 al 22 de septiembre
ENTREGABLE 5. Portafolio	Hasta el 1 de octubre
Revisión del ENTREGABLE 5	Hasta el 20 de octubre
JORNADA DE CLAUSURA	2 de octubre de 10 a 14 horas

Figura II.1. Programa del CAYD²

Otra de las grandes vías para la reflexión en la docencia es la revisión sobre la propia práctica docente en el aula. En efecto, cada participante del curso debe seleccionar una de las asignaturas que imparte y, en colaboración con la figura de mentor/a, empezar por reflexionar a partir de los Resultados de Aprendizaje que figuran en la guía docente de dicha asignatura. En concreto, se reflexiona sobre la importancia de estos resultados y sobre cómo está estructurado el proceso de enseñanza-aprendizaje y evaluación para que los estudiantes de la asignatura los alcancen. Posteriormente, y a través de los aprendizajes adquiridos en las distintas sesiones del CAyD², se pretende que cada participante del curso proponga una mejora del enfoque de la asignatura en cuestión. Este proceso de indagación se trabaja, especialmente, en los dos seminarios del curso que han sido diseñados con tal fin (véase de nuevo la Figura II.1). Por otro lado, en los tres talleres propuestos se trabaja la interacción en el aula con el estudiantado y el diseño de entornos de aprendizaje favorecedores, factores que un buen docente debe dominar.

Para llevar a cabo todo este programa se crean comunidades de práctica, que consisten en grupos más pequeños, con el fin de facilitar la interacción y poder compartir reflexiones y trabajos realizados a través de la revisión por pares (*peer review*) y a través de la figura del mentor/a. Dicho progreso debe quedar reflejado en la elaboración, de manera progresiva, en un portafolio docente que sirva como instrumento de mejora personal y de evaluación final del programa, donde se recojan argumentos y evidencias de los principales logros a nivel docente.

MATEMÁTICAS 2 - GRADO EN FUNDAMENTOS DE LA ARQUITECTURA

En esta sección exponemos la mejora propuesta para la asignatura *Matemáticas 2*, que tratará de ser aplicada en el próximo curso académico 2025/2026. La asignatura en cuestión se sitúa en el primer cuatrimestre del segundo curso del Grado en Fundamentos de la Arquitectura de la UPV, es una asignatura obligatoria y tiene un peso de 6 ECTS. A lo largo de esta sección se debe tener en cuenta que para el curso 2024/2025 ha habido 390 alumnos matriculados divididos en 7 grupos, es decir, una asignatura con muchos estudiantes.

Situación actual de la asignatura (Matemáticas 2)

Los actuales Resultados de Aprendizaje de esta asignatura pueden encontrarse enunciados en la respectiva Guía Docente del año académico 2024/2025 como sigue:

«Familiarizarse con el tratamiento analítico y geométrico de las curvas y superficies que con más frecuencia aparecen en las aplicaciones a la Arquitectura. Ser capaz de hacer cálculos de funciones de varias variables y

de localizar sus extremos, de utilidad en varios problemas reales de optimización. Adquirir los conceptos fundamentales de los diferentes tipos de integración de funciones de varias variables que le permiten afrontar con éxito los problemas de estructuras, estática, dinámica, teoría de campos, transmisión del calor, resistencia de materiales, elasticidad, etc., que surjan en las diferentes áreas relacionadas con la Arquitectura. Ser capaz de aplicar los conocimientos teóricos adquiridos a la resolución de problemas prácticos. Conocer y aplicar los métodos matemáticos, con la correspondiente implementación informática, en la resolución de problemas de Arquitectura.»

Para llevar a cabo todo esto, son necesarios conocimientos básicos derivados de los estudios previos de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y de la asignatura *Matemáticas 1* de primer curso de este grado, conformado la materia Matemáticas dentro del módulo Propedéutico. Entre estos conocimientos se encuentran los de función de una variable, derivadas e integrales y la resolución de ecuaciones algebraicas. Estos conceptos son fundamentales para la introducción a los resultados propios de la asignatura *Matemáticas 2*, tales como funciones de varias variables, derivación e integración de funciones de varias variables o cálculo de extremos. En la asignatura se hace énfasis en la interpretación geométrica de conceptos como el plano tangente, el volumen o el centro de masas de un cuerpo y la correcta traducción de problemas reales al lenguaje matemático formal y simbólico (con el ordenador). Véase [1, 2] para referencias de la asignatura y [3] para las prácticas de ordenador.

Para el curso 2024/2025, la evaluación de esta asignatura ha consistido en la realización de dos pruebas escritas de respuesta abierta (Nivelación 1 y Nivelación 2) que consisten en exámenes cuyas preguntas se basan en la respuesta a meros ejercicios de cálculo, con un peso del 40 % cada uno de ellos. El 20 % restante corresponde a actividades relacionadas con prácticas de informática y, de acuerdo con la Guía Docente, se puede proponer entrega de prácticas realizadas en el aula, controles en las clases prácticas, entrega de ejercicios o un trabajo académico.

Pensamos que los objetivos descritos en la asignatura, así como la forma de evaluar, fomentan un aprendizaje muy superficial y que no añade valor alguno a la formación del alumnado. Por ese motivo, presentamos propuestas en varias direcciones para paliar dichas deficiencias.

Propuesta de mejora (Matemáticas 2)

En primer lugar, proponemos reescribir los Resultados de Aprendizaje como sigue:

«Analizar, plantear y resolver el cálculo diferencial e integral en varias variables, así como aplicarlo a la resolución de problemas arquitectónicos relacionados con el cálculo de extremos relativos y absolutos, áreas,

volúmenes, centros de masas, etc. Además, fomentar el razonamiento geométrico a través de la interpretación de figuras en el plano y en el espacio, el razonamiento lógico y la argumentación matemática rigurosa.»

Esta modificación se basa en que el razonamiento a desarrollar por el estudiantado gira en torno a tres ejes: el razonamiento geométrico, pues se deberán interpretar y visualizar objetos bidimensionales y tridimensionales; el razonamiento lógico, porque habrá que argumentar matemáticamente el porqué de las cosas y el razonamiento aplicado, por el estudio de las modelizaciones en los problemas arquitectónicos y su coherencia, para su posterior resolución numérica.

En segundo lugar, también proponemos dos cambios que creemos imprescindibles para que la evaluación sea formativa y sumativa. El primer cambio es el diseño de una actividad en la que se puedan demostrar de verdad los Resultados de Aprendizaje descritos anteriormente. Esto buscaría una evaluación auténtica e integradora, que reemplace la actual actividad derivada de prácticas de informática y que únicamente fomenta la reproducción.

El segundo de los cambios sería el contenido en las pruebas escritas (Nivelaciones), que actualmente se basan también en la reproducción, con una sucesión de ejercicios muy similares y cuyo enfoque favorece enormemente el aprendizaje superficial. Proponemos incluir una distancia entre “lo que se les da a los estudiantes” y lo que “les pedimos que realicen”, pues actualmente la dificultad de la resolución de los problemas en las pruebas escritas y la de los ejercicios de la lista de problemas que resuelve el profesor en clase son muy similares. En concreto, de acuerdo con la nueva redacción de los Resultados de Aprendizaje, las pruebas escritas incluirán problemas adaptados al grado en Fundamentos de Arquitectura en los que sea necesario e imprescindible la modelización del problema, habilidad que será fundamental para su profesión.

Para lograr que estos cambios sean efectivos, queremos promover una reformulación en los porcentajes distribuidos a las actividades de evaluación, pasando a un 35 % para cada una de las pruebas escritas efectuadas bajo control, y el 30 % restante para la actividad de evaluación continua que explicamos a continuación. Esto impulsaría, a su vez, una mayor participación y presencia del alumnado en las sesiones presenciales.

La actividad que proponemos fomentaría el uso del software Mathematica mediante un trabajo original que gire en torno a una temática común y que, a medida que vaya avanzando la asignatura, fuera incorporando contenidos propios del temario. En efecto, cada una de las tareas pedidas se adaptará a las distintas unidades didácticas de la asignatura. El esquema de esta actividad consiste en cuatro tareas:

1. Diseño de la estructura del objeto a estudiar. Para ello, el objeto contará con al menos, una cónica o una cuádrica de las vistas en clase. El objeto deberá ser incorporado en un sistema de referencia y deberá cumplir con unas ciertas premisas. A modo orientativo, se puede diseñar un edificio con paredes rec-

tas, esto es, mediante planos, y que tenga un techo que cumpla con algunas de las ecuaciones de las cuádricas vistas en clase, como partes de elipsoides, paraboloides, etc.

2. Definir una función de varias variables sobre la superficie elegida y estudiar sus extremos. A modo orientativo, se puede estudiar una función que estudie la temperatura, la luz, la densidad estructural o factores ambientales como la eficiencia térmica o exposición solar. Se podrá incitar a la lectura de recursos bibliográficos.
3. Calcular áreas, volúmenes y centros de masa del objeto diseñado en la Tarea 1. A modo orientativo, podrían estudiar el volumen y los momentos de inercia del propio edificio y que analizaran el resultado desde el punto de vista arquitectónico.
4. Modelización de un campo vectorial que aplique al contexto estudiado, cálculo del flujo e interpretación del resultado. A modo orientativo, estudiar el flujo de aire que pasa a través de una de las paredes del edificio diseñado. Para ello, tendrán que modelizar un campo vectorial adecuado y calcular la integral de superficie a través de la pared seleccionada

Con esta propuesta de actividad integradora se trataría de fomentar el conocimiento de cónicas y cuádricas (sus ecuaciones, desplazamientos, rotaciones, etc.), debiendo realizar una modelización de una estructura arquitectónica que podría ser real (Tarea 1), el estudio de funciones de varias variables y una aplicación del cálculo diferencial (Tarea 2) y finalizando con un análisis exhaustivo de aplicaciones de las integrales múltiples (Tareas 3 y 4).

También cabe mencionar que el alumnado de *Matemáticas 2* ya ha sido introducido, en la asignatura *Matemáticas 1*, a una utilización básica del software Mathematica. En efecto, en *Matemáticas 1* aplican conocimientos de funciones de una variable y álgebra lineal, por lo que en la actividad que proponemos tendríamos una menor carga explicativa en cuanto a los comandos a usar con este programa.

Para que la actividad sea percibida como importante y atractiva por parte del alumnado pensamos que sería fundamental pedir dos entregas: una primera al finalizar las dos primeras tareas, con el objetivo de dar *feedback* y que la modelización del objeto sea correcta y apropiada para el proyecto, y una segunda en el que se integren las cuatro tareas. Para ello se destinarían 6 de las 30 sesiones de 2 horas que la asignatura tiene, las cuales se distribuirían de acuerdo con el progreso de la asignatura. En las sesiones 1, 2, 4 y 5 se haría una breve explicación de las tareas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Estas serían sesiones en las que los alumnos tendrían tiempo para reunirse en grupos y avanzar en su proyecto con la orientación del profesorado. En la sesión 3 se daría un *feedback*, primero general, focalizándose en fallos generalizados, y posteriormente el/la profesor/a se reuniría con cada uno de los grupos para hacer una discusión pormenorizada de la

entrega. Finalmente, en la sesión 6, cada uno de los grupos haría una breve exposición (5-6 minutos) de sus proyectos delante del resto de estudiantes.

MATEMÁTICAS - GRADO EN BIOTECNOLOGÍA

En esta sección exponemos la mejora propuesta para la asignatura *Matemáticas*, que de nuevo tratará de ser aplicada el próximo curso académico 2025/2026. La asignatura en cuestión se sitúa en el primer cuatrimestre del primer curso del Grado en Biotecnología de la UPV, es una asignatura obligatoria y tiene un peso de 7.5 ECTS. A lo largo de esta sección se debe tener en cuenta que para el curso 2024/2025 ha habido 124 alumnos matriculados divididos en 2 grupos.

Situación actual de la asignatura (Matemáticas)

Los actuales Resultados de Aprendizaje de esta asignatura pueden encontrarse enunciados en la respectiva Guía Docente del año académico 2024/2025 como sigue:

«Capacidad para la búsqueda y utilización de información, utilizar herramientas matemáticas y capacidad de resolver problemas complejos.»

Para entender a que se refieren estos Resultados de Aprendizaje debemos recordar que las matemáticas son una herramienta fundamental en la biotecnología a través de la cual se pueden entender y modelizar procesos biológicos complejos (como la dinámica de poblaciones de microorganismos, la cinética de las reacciones bioquímicas, la optimización de procesos de producción de proteínas, etc.). En esta asignatura se tratan temas relacionados con el cálculo diferencial e integral y el álgebra lineal. Estas son, probablemente, las áreas más básicas de las matemáticas en las que se apoyan otras herramientas más complejas. Las principales referencias con las que trabaja el profesorado son los libros de texto [4, 5] y [6]. Este curso pretende preparar a los alumnos en aquellos conceptos matemáticos básicos que necesariamente utilizarán en cursos posteriores (pues no tienen más asignaturas de matemáticas durante el grado), por lo que esta es una asignatura instrumental.

Actualmente, la evaluación de esta asignatura se basa en la realización de tres pruebas escritas de respuesta abierta denominadas P1, P2 y P3. Estas pruebas son exámenes tradicionales parciales que contribuyen a la nota final un 20 %, 40 % y 40 % respectivamente.

Después de cursar el CAyD² es claro que el principal problema de esta asignatura, a la hora de conseguir un aprendizaje significativo por parte del estudiantado, es el carácter reproductivo de la evaluación cuyo 100 % de su peso depende de exámenes tradicionales.

Propuesta de mejora (Matemáticas)

En primer lugar, proponemos reescribir los Resultados de Aprendizaje para que sean más completos y concretos que los actuales. De hecho, proponemos los siguientes:

«Interpretar y utilizar el lenguaje matemático básico, junto con el método lógico-deductivo propio de las matemáticas; modelizar y plantear matemáticamente problemas aplicados al Grado en Biotecnología, y conocer, escoger y utilizar las técnicas más adecuadas para la resolución matemática de dichos problemas; y evaluar e interpretar físicamente los resultados obtenidos de la resolución matemática de problemas aplicados al Grado en Biotecnología.»

Es claro que estos Resultados de Aprendizaje son menos concretos que los establecidos para la asignatura *Matemáticas 2* desarrollada en la sección anterior. Sin embargo, debemos tener en cuenta que los estudiantes del Grado en Biotecnología de la UPV solamente tienen esta asignatura de matemáticas, por lo que en *Matemáticas* deben aprender todo lo que necesitan de las mismas en su grado. Esto es evidente en la formulación de los nuevos Resultados de Aprendizaje pues contemplan todo lo que básico que se necesita de las matemáticas: poder utilizar el lenguaje matemático, saber modelizar situaciones reales mediante las matemáticas, aprender a resolver esos problemas modelizados y, finalmente, interpretar las soluciones obtenidas.

En segundo lugar, también proponemos dos cambios que creemos imprescindibles para que la evaluación sea formativa y sumativa. El primero de estos cambios sería reformular la dinámica de las clases y la elaboración de los exámenes, para tratar de potenciar el razonamiento de los estudiantes frente a la pura reproducción. Para lograrlo se trataría de introducir una distancia significativa entre “lo que se les da a los estudiantes” y “lo que tienen que hacer”.

El segundo de los cambios sería el añadir una actividad de evaluación transversal a los exámenes y que valdría un 30 % de la nota final, reduciendo el peso de las pruebas P1, P2 y P3 mencionadas anteriormente a un 10 %, 30 % y 30 % respectivamente. La actividad que se propone sería una experiencia de evaluación auténtica, acercando a los estudiantes una situación que puedan encontrar en la realidad como egresados del Grado en Biotecnología.

En concreto, a los estudiantes se les dividiría por grupos/equipos y se les facilitaría la contextualización general de un problema relacionado con su grado. En este momento es importante matizar varios aspectos:

- El problema podría versar sobre diversos temas como la dinámica de poblaciones de microorganismos, cinética de las reacciones bioquímicas, optimización

de procesos de producción de proteínas, etc. Siempre se tratarían de encontrar problemas estrictamente relacionados con el Grado en Biotecnología.

- Con contextualización general nos referimos a la descripción escrita del problema, redactada como se la deberían encontrar en futuras asignaturas o en un futuro como egresados del grado. Este punto implica el contacto del profesorado de matemáticas con otros departamentos y/o unidades docentes que impartan asignaturas más avanzadas y específicas en el Grado en Biotecnología.
- A los estudiantes se les aportaría dicha contextualización, en lugar de pedirles que la busquen o que propongan ellos el problema, porque nuestra asignatura es de primer curso (y de primer semestre también).

El objetivo final de cada grupo sería:

- Modelizar o formular matemáticamente el problema dado.
- Resolver el problema formulado desde un punto de vista matemático.
- Interpretar las soluciones obtenidas desde un punto de vista físico y real.
- Exponer los resultados en una última sesión grupal a los demás equipos de estudiantes.

La dinámica del curso seguiría un desarrollo similar al actual: tendríamos las clases de teoría y los seminarios (donde se explican conceptos y técnicas de resolución, y donde también se resuelven problemas concretos), pero, cada semana, los distintos grupos evaluarían si su problema contextualizado puede modelizarse o no con los contenidos vistos en clase. En el momento en que el problema se pueda empezar a modelizar con las herramientas matemáticas estudiadas, cada semana deberían ir aportando los avances realizados en formalización y resolución. Finalmente, se utilizarían algunas de las sesiones de clases para realizar la interpretación de los resultados.

COMENTARIOS FINALES

En esta contribución únicamente hemos tratado de exponer los rasgos generales del curso CAyD² y de organización actual en el año académico 2024/2025, que es la que hemos cursado los autores de este texto. Cabe mencionar que todavía no hemos terminado el curso (que finaliza en octubre de 2025), ni hemos aplicado las propuestas descritas en las secciones anteriores (se espera su aplicación en el siguiente año académico). Por tanto, emplazamos a los lectores interesados a las correspondientes jornadas de innovación docente del próximo año 2026, donde pretendemos aportar unas conclusiones finales y una opinión completa sobre la formación recibida en el CAyD².

REFERENCIAS

- [1] S. Bartoll Arnau, J. Bonet Solves y M.C. Gómez Collado. *Fundamentos matemáticos en arquitectura*, Editorial UPV. ISBN: 978-84-8363-480-6. España, 2009.
- [2] J. Bonet Solves, V. Calvo Roselló, A. Peris Manguillot y F. Rodenas Escribá. *Integración múltiple y vectorial*, Editorial UPV. ISBN: 84-8363-048-6. España, 2006.
- [3] V. Calvo Roselló, A. Peris Manguillot y F. Ródenas Escribá. *Diagonalización y cálculo multivariable con Mathematica*, Editorial UPV. ISBN: 978-84-940688-0-5. España, 2013.
- [4] R. Larson. *Cálculo. Tomo I*, Cengage Learning. ISBN: 978-6075220154. 2015.
- [5] R. Larson. *Cálculo. Tomo II*, Cengage Learning. ISBN: 978-6075220178. 2018.
- [6] R. Larson. *Fundamentos de álgebra lineal*, Cengage Learning. ISBN: 978-6075198040. 2015.

AFILIACIONES

Vicent Asensio López - Departamento de Matemática Aplicada (autor de correspondencia: viaslo@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

Antoni López Martínez - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

III

EVALUACIÓN DE LA EDAD DE RAZONAMIENTO DE LLMs EN LAS PRUEBAS CANGUR DE LA COMUNITAT VALENCIANA

A. Igualde-Sáez, L. Rhomrassi, Y. Ahsini, R. Vinuesa, S. Hoyas,

J.P. García-Sabater, M.J. Fullana-i-Alfonso y J.A. Conejero

Este estudio analiza la eficacia de los modelos de lenguaje profundo (LLMs) de IA para resolver problemas de matemáticas mediante una evaluación de una batería de preguntas en valenciano, evaluando tanto la precisión como la coherencia de los razonamientos generados. Para ello, se ha generado un dataset con los enunciados extraídos por OCR de las ediciones 2014/2024 de las Pruebas Cangur, normalizado en CSV y evaluado mediante *prompts* sistemáticos idénticos para todos los modelos. DeepSeek, GPT-4o y LLaMA 3.3-70B lideran la tasa de acierto, alcanzando un rendimiento superior al 90 % en preguntas de puramente textuales sin igualar completamente la precisión humana, lo que subraya áreas clave para la innovación pedagógica y futuros desarrollos en entrenamiento multilingüe y adaptativo.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria y terciaria requiere no solo la resolución de ejercicios, sino también el desarrollo de un razonamiento estructurado y comunicable. En los últimos años, la Inteligencia Artificial (IA) ha emergido como apoyo potencial al profesorado y al estudiantado, ofreciendo explicaciones paso a paso personalizadas y retroalimentación inmediata. En particular, la capacidad de los LLMs para generar argumentos detallados podría reforzar la comprensión de conceptos complejos. Sin embargo, dado que su entrenamiento suele basarse en datos cuyo idioma es el inglés, surgen interrogantes sobre su rendimiento en idiomas minoritarios y en entornos educativos locales. Además, pueden llegar a surgir dudas sobre que campo de las matemáticas es el que presenta una mayor dificultad para los LLMs.

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XIII Jornadas de Innovación Docente, pp. 25–30. Copyright © 2025
Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-74878-5

Este estudio presenta una evaluación comparativa de modelos de lenguaje aplicados a la resolución de problemas matemáticos de secundaria en el marco de las Pruebas Cangur [1]. Se han analizado sistemas entrenados en las lenguas oficiales de España, valorando su precisión y la solidez de sus razonamientos en ejercicios de dificultad progresiva, desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato. Las Pruebas Cangur constan de treinta preguntas de opción múltiple, cada una con cinco alternativas y una única respuesta correcta, distribuidas en tres bloques de diez preguntas con valores de 3, 4 y 5 puntos. Cada contestación errónea penaliza con la deducción de un tercio de su valor nominal. La prueba parte de una puntuación inicial de 30 puntos y la máxima alcanzable es de 150.

Para obtener conclusiones rigurosas, se ha definido un marco metodológico común que abarca la generación del conjunto de datos utilizado, la configuración de conexiones API, la aplicación de *prompts* sistemáticos que solicitan explicaciones previas a la respuesta y la comparación con la respuesta correcta.

Este artículo describe el proceso de evaluación de distintos LLMs para la resolución de problemas matemáticos en el marco de las Pruebas Cangur, organizada por la Societat Catalana de Matemàtiques [4]. Concretamente, en la primera sección se expone la metodología empleada para evaluar los modelos y generar el conjunto de datos. La siguiente sección presenta los resultados, señalando qué modelos alcanzan el mejor desempeño y análisis de su rendimiento. La última sección recoge las conclusiones de este estudio y futuras líneas de trabajo.

METODOLOGÍA

El protocolo metodológico seguido en esta evaluación se articula en tres fases fundamentales: (i) construcción del conjunto de datos, (ii) parametrización y ejecución de las consultas a los modelos a través de sus API, y (iii) diseño de las métricas de evaluación junto con los recursos de visualización.

Para elaborar el conjunto de datos se procesaron las ediciones 2014/2024 de las Pruebas Cangur aplicando OCR a los archivos PDF para extraer el contenido textual de las cuestiones redactadas en valenciano. A continuación, cada registro se normalizó en formato CSV, incorporando el número de pregunta, el nivel de dificultad, el enunciado, las cinco opciones de respuesta y la opción correcta.

En la fase de parametrización y ejecución de consultas a los modelos de lenguaje se evaluaron los siguientes modelos: la familia ALIA –Salamandra-2B, Salamandra-7B y ALIA-40B–, DeepSeek-R1 –Distill-Qwen-1.5B, Distill-Qwen-14B y DeepSeek-R1-671B–, Gemma 2 –2B, 9B y 27B– y LLaMA 3 –3B, 8B y 70B–.

El acceso a las familias de modelos ha seguido una estrategia híbrida: los sistemas de gran escala se consultaron mediante API en las nubes de OpenAI, Google Cloud, Azure, Nvidia y Alibaba Cloud, mientras que los modelos con menos de 30B pará-

metros se ejecutaron localmente en nodos GPU a través de Docker y la biblioteca *Transformers*.

Para estandarizar la interacción con los modelos de lenguaje, se utilizó un único *prompt*, idéntico para cada uno de los modelos evaluados (Figura III.1).

```
prompt = """Analitza la pregunta {referencia_pregunta} i elegeix la
resposta correcta entre las opciones donades.

**Instruccions**:
```

Explica el teu raonament i proporciona la teua resposta final en este format específic, sense canvis:

Raonament: Descriu el procés de pensament que et va portar a la resposta.

Resposta: A), B), C), D) o E)."""

Figura III.1. Prompt sistemático utilizado para la evaluación de los LLMs en preguntas en valenciano.

El código utilizado, el conjunto de datos generado y las respuestas obtenidas de los modelos se han sido subido al siguiente repositorio de GitHub: <https://github.com/mc-flai/ALIA-math-test>.

Las métricas se han definido comparando las salidas de cada modelo con la solución correcta. En el análisis de los modelos de lenguaje se ha evaluado el rendimiento en función del número de parámetros y del nivel de dificultad de las preguntas.

RESULTADOS

En esta sección se detallarán los resultados obtenidos para el ensayo realizado, la evaluación de los modelos de lenguaje en preguntas íntegramente formadas por texto.

En este ensayo, tal y como se observa en [3], el rendimiento crece con el número de parámetros: DeepSeek-R1-671B alcanza una tasa de acierto del 96 %, mientras que ALIA-40B se queda en un 19 %, equivalente a responder aleatoriamente preguntas de cinco opciones. El gráfico de barras representado en [3] muestra cómo el nivel de dificultad apenas afecta los resultados, pero sí existen diferencias significativas entre los distintos modelos evaluados.

Al observar las respuestas, se distinguen tres tipologías principales:

1. **Razonamiento completo y correcto:** la respuesta despliega un argumento lógico riguroso que conduce a la opción acertada (Figura III.2).

Raonament:

1. "Dues meitats" és el mateix que $2 \cdot (1/2) = 1$.
2. "Tres terços" és el mateix que $3 \cdot (1/3) = 1$.
3. Sumem els resultats: $1 + 1 = 2$.

Figura III.2. Razonamiento de una pregunta contestada correctamente.

2. **Analógia parcial:** la resposta aplica mètodes de problemes previsos i ofereix el resultat més pròxim al càlcul efectuat, sin que ell garanteix la solució correcta (Figura III.3).

Raonament: Anem a calcular el nombre d'estudiants. Suposem que el nombre inicial de xics era x i el nombre inicial de xiques era y . Segons l'enunciat:

- El nombre de xics ha crescut un 20%, per tant, ara hi ha $1,2x$ xics.
- El nombre de xiques ha disminuït un 20%, per tant, ara hi ha $0,8y$ xiques.
- El total d'estudiants actuals és un més que abans, és a dir, $1,2x + 0,8y = x + y + 1$.

Simplifiquem l'equació: $1,2x + 0,8y = x + y + 1$
 $1,2x + 0,8y = x + y + 1$
 $1,2x - x + 0,8y - y = 1$
 $0,2x - 0,2y = 1$
 $0,2x - 0,2y = 1$
 $x - y = 5$

Això significa que hi ha 5 xics més que xiques inicialment. El nombre total inicial era $x + y$, que és igual al nombre total actual menys 1.

Ara calculem amb les opcions donades quin total actual compleix aquesta condició.

- Si el total actual és 29, el total inicial seria 28.
 - Suposem que inicialment $x = 16$ i $y = 11$ (ja que $x - y = 5$):
 $x = 16$ i $y = 11$
 - Després del canvi, hi ha $1,2 \cdot 16 = 19,2$ xics i $0,8 \cdot 11 = 8,8$ xiques.
 $1,2 \cdot 16 = 19,2$ xics i $0,8 \cdot 11 = 8,8$ xiques.
 - El total actual és $19,2 + 8,8 = 28$.

Figura III.3. Razonamiento de una pregunta contestada por aproximación de resultados.

3. **Desajuste:** el desenvolupament pas a pas desemboca en una solució diferent al conjunt d'opcions disponibles i, per lo tant, se emite directament "No Answer" (Figura III.4).

Raonament: A la pregunta se'ns diu que cada vegada que trenquem un tros de paper, es divideix en tres trossos més petits, i això es repeteix successivament durant 7 vegades. Comencem amb un sol tros de paper inicial.

1. Després del primer trencament, tindrem 3 trossos.
2. Després del segon trencament, cadascun dels 3 trossos es divideix en 3, resultant en 9 trossos.
3. Amb cada trencament successiu, el nombre de trossos es multiplica per 3. La fórmula per calcular el nombre de trossos després de 7 trencaments és: 3^n

On n és el nombre de trencaments. Així, després de 7 trencaments, tindrem $3^7 = 2187$ trossos.

Sembla que hi ha un error a l'enunciat o en les opcions, ja que cap

Figura III.4. Razonamiento de una pregunta no contestada.

La comparación con los resultados de los estudiantes revela que los estudiantes de mayor rendimiento alcanzaron tasas de acierto comprendidas entre el 70 % y el 95 % en las Pruebas Cangur de 2024, obteniendo puntuaciones desde 115.75 puntos en 3º de ESO hasta 145 puntos en 2º de ESO, incluidas las preguntas con elementos gráficos. Además, a medida que aumenta la dificultad, la dispersión de sus puntuaciones entre un mismo nivel de dificultad se incrementa. En contraste, los modelos de lenguaje evaluados mantienen un desempeño homogéneo, con variaciones mínimas, independientemente de la complejidad de los ejercicios.

CONCLUSIONES

Este artículo describe el *benchmark* diseñado para medir la eficacia de los grandes LLMs en la resolución de problemas matemáticos, con especial énfasis en aquellas basadas únicamente en texto.

En concreto, las familias de modelos LLaMA DeepSeek y GPT 4o ocupan las primeras posiciones del ranking, superando en promedio a sus competidores, aunque sin igualar de forma constante la precisión humana. Además, se observa una variabilidad notable entre los diferentes modelos, lo que sugiere que el entrenamiento en lenguas minoritarias y la complejidad intrínseca del enunciado influyen de manera decisiva en el desempeño.

Las futuras líneas de trabajo son, por un lado, evaluar LLMs entrenados en lenguas minoritarias –comparando ALIA con otros modelos– para determinar en qué idiomas se maximiza la precisión y por qué. Por otro, clasificar las preguntas según temáticas (álgebra, geometría, cálculo...) para identificar áreas de mayor dificultad y emparejar cada categoría con los modelos que ofrecen mejor tasa de acierto. Finalmen-

te, resultaría esclarecedor segmentar las pruebas en función de la presencia o ausencia de figuras, tal y como presenta [2], con el fin de cuantificar de manera más precisa el impacto de los componentes visuales en el rendimiento de los LLMs.

REFERENCIAS

- [1] R. Esteban-Romero. La Prova Cangur en la Comunitat Valenciana, *Modelling in Science, Education and Learning*: **2** (2009), 3–9.
- [2] A. Igualde-Sáez, L. Rhomrassi, Y. Ahsini, R. Vinuesa, S. Hoyas, J.P. García-Sabater, M.J. Fullana-i-Alfonso y J.A. Conejero. Evaluating visual mathematics in multimodal LLMs: a multilingual benchmark based on the Kangaroo Tests, (2025). <https://arxiv.org/abs/2506.07418v1>
- [3] L. Rhomrassi, Y. Ahsini, A. Igualde-Sáez, R. Vinuesa, S. Hoyas, J.P. García-Sabater, M.J. Fullana-i-Alfonso y J.A. Conejero. LLM performance on mathematical reasoning in Catalan language, *Results in Engineering*: **25** (2025), 104366.
- [4] Societat Catalana de Matemàtiques, *Concurs Cangur de Matemàtiques*. 2025

AFILIACIONES

Yusef Ahsini Ouariaghli - Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València

José Alberto Conejero Casares - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Màrius Josep Fullana i Alfonso - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

José Pedro García Sabater - Departamento de Organización de Empresas, Universitat Politècnica de València

Sergio Hoyas Calvo - Departamento de Máquinas y Motores Térmicos

Arnau Igualde Sáez - Grupo de Investigación en Reingeniería, Organización, trabajo en Grupo y Logística Empresarial: ROGLE (autor de correspondencia: arig-sae@etsii.upv.es), Universitat Politècnica de València

Lamyae Rhomrassi Amhar - Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València

Ricardo Vinuesa Motilva - Engineering Mechanics, KTH Royal Institute of Technology

IV

SOBRECARGA DIGITAL Y RENDIMIENTO ACADÉMICO: ESTRATEGIAS EDUCATIVAS PARA PROMOVER EL BIENESTAR ESTUDIANTIL

A. Carreño, S. Moll, E. Vega, L.M. Sánchez y J.A. Moraño

La hiperconectividad y el uso intensivo de dispositivos digitales están transformando la vida académica del estudiantado universitario, con consecuencias notables en su salud mental y su rendimiento. Esta charla presenta los resultados de un estudio mixto con 289 estudiantes STEAM de la UPV, que analiza la relación entre sobrecarga digital, bienestar emocional y desempeño académico. Los datos muestran una fuerte correlación entre la exposición constante a pantallas y la aparición de síntomas como ansiedad, fatiga cognitiva o dificultades para concentrarse.

A partir de estos resultados, se propone una serie de pautas concretas tanto para las clases de matemáticas como para las horas de estudio autónomo. Entre ellas se incluyen: pausas conscientes y estructuradas durante las sesiones, planificación del tiempo libre de pantallas, técnicas para reducir distracciones digitales, y metodologías activas que prioricen la atención plena. Esta propuesta promueve una docencia más sostenible emocional y digitalmente, alineada con los ODS 3 (salud y bienestar) y 4 (educación de calidad), y busca proporcionar herramientas prácticas al profesorado para proteger el bienestar estudiantil sin comprometer la exigencia académica.

INTRODUCCIÓN

La integración de la tecnología digital en entornos educativos ha transformado profundamente la educación superior. El uso de dispositivos como *smartphones*, tabletas y portátiles ha facilitado el acceso a recursos de aprendizaje, pero también ha introducido nuevos desafíos, especialmente en forma de distracciones digitales asociadas a redes sociales y aplicaciones de mensajería [1].

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XIII Jornadas de Innovación Docente, pp. 31–39. Copyright © 2025 Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-74878-5

Estas distracciones, cada vez más comunes en las aulas universitarias, favorecen el uso multitarea de los dispositivos con fines no académicos, lo que afecta negativamente la atención y la retención de contenidos [2]. Esta situación es especialmente preocupante en titulaciones STEAM, donde la concentración sostenida resulta esencial [12].

El fenómeno conocido como *cyberslacking* interfiere con los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje y perjudica la calidad de las interacciones en clase [11]. Además de afectar al rendimiento individual [3], puede alterar el ambiente general de aprendizaje cuando muchos estudiantes están distraídos [7].

Aunque los dispositivos pueden ser herramientas útiles, su uso para fines no académicos reduce el enfoque y la eficacia del aprendizaje, especialmente por el diseño adictivo de ciertas plataformas digitales [4]. Frente a ello, se han propuesto diversas estrategias: establecer normas claras sobre el uso de dispositivos [5], usar tecnología con fines pedagógicos concretos [13], y proporcionar retroalimentación constante al estudiantado [6].

Concienciar al alumnado sobre el impacto de las distracciones es clave para fomentar el autocontrol. Estudios recientes muestran que cuando los estudiantes comprenden cómo afecta esto a su rendimiento, adoptan comportamientos más autorregulados [9, 10]. Asimismo, intervenciones centradas en la autorregulación, como el entrenamiento en *mindfulness* o la gestión del tiempo, han demostrado ser efectivas, particularmente en contextos exigentes como la ingeniería [8].

Este estudio tiene como objetivo explorar e implementar estrategias eficaces para mitigar las distracciones digitales entre estudiantes de los grados de Ingeniería Aeroespacial, Mecánica y Electrónica y Automática de la Universitat Politècnica de València. Se enmarca en una iniciativa más amplia para promover habilidades de “aprender a aprender”, desarrollando la conciencia sobre los hábitos digitales y reforzando la autorregulación.

METODOLOGÍA

Se adoptó un enfoque mixto para analizar el impacto de las distracciones digitales y evaluar intervenciones en el aula. Participaron 289 estudiantes de los grados en Ingeniería Aeroespacial, Mecánica y Electrónica de la Universitat Politècnica de València (ETSIADI - Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial).

Durante los cursos 2023/2024 y 2025/2025 se realizaron encuestas e entrevistas en dos momentos: antes y después de las intervenciones. Inicialmente se evaluaron los hábitos de uso digital, percepción del rendimiento y tipos de distracción. Posteriormente, se repitieron las encuestas para detectar cambios. Se usó SPSS para el análisis estadístico y Nvivo para el análisis temático para los datos cualitativos.

Se aplicaron dos intervenciones:

- **Encuesta y retroalimentación:** análisis del uso de dispositivos y redes sociales, cuyos resultados se presentaron al alumnado para fomentar la reflexión.
- **Normas en el aula:** limitación explícita del uso del móvil durante las clases, comunicada y supervisada por el profesorado.

Se obtuvo consentimiento informado y se garantizó la confidencialidad. Como limitaciones, se señala el carácter auto-reportado de los datos y la circunscripción a un único centro. Futuros estudios deberían ampliar la muestra y considerar diseños longitudinales.

RESULTADOS

La encuesta fue completada por 289 estudiantes de diferentes grados de ingeniería de la Universitat Politècnica de València (UPV). Los estudiantes estaban repartidos de forma bastante equitativa entre tres grados principales: 34,5 % de Ingeniería Mecánica (M Eng), 33,8 % de Ingeniería Aeroespacial (A Eng) y 31,7 % de Ingeniería Electrónica y Automática (El Eng).

El análisis sobre el uso de dispositivos revela un uso intensivo del teléfono móvil durante clases y estudio, destacando una frecuencia muy alta para fines no académicos (78.9 %) y también elevada para fines académicos (40.8 % muy frecuente). La prueba chi-cuadrado mostró una relación significativa entre ambos tipos de uso ($p < 0.001$), así como diferencias entre titulaciones para el uso académico ($p = 0.012$), siendo menor en Ingeniería Aeroespacial.

En cuanto a tabletas y portátiles, su uso está claramente enfocado a fines académicos (más del 80 % los usa frecuente o muy frecuentemente), aunque también se emplean con otros fines, sin que exista una relación significativa entre ambos contextos ($p = 0.676$). Además, más del 89 % del alumnado reconoce combinar usos académicos y no académicos de forma simultánea, lo que pone de manifiesto la necesidad de estrategias para gestionar mejor la atención digital.

El cuestionario también evaluó la frecuencia con la que los estudiantes se distraen tanto durante las clases como al estudiar por su cuenta. Los resultados revelan que las distracciones son muy comunes, especialmente en el estudio individual: un 91.6 % afirmó distraerse “a menudo” o “muy a menudo” en ese contexto. En el aula, esta cifra fue del 60.6 %.

El análisis estadístico mostró que los estudiantes de Ingeniería Aeroespacial se distraen significativamente menos que sus compañeros de Mecánica y Electrónica, tanto en clase ($p = 0.009$) como al estudiar ($p = 0.01$).

Respecto a los tipos de distracciones, los resultados muestran que las distracciones más comunes entre el estudiantado son el uso de redes sociales (78.2 %) y aplicaciones de mensajería (79.6 %), seguidas por el visionado de vídeos en línea (24.6 %). Las

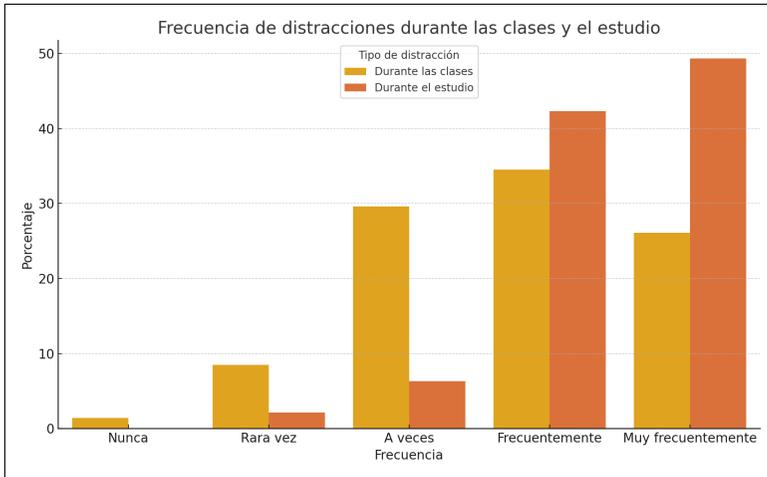


Figura IV.1. Frecuencia de distracciones durante las clases y el estudio.

distracciones menos frecuentes incluyen juegos en línea (21.8%), apuestas en línea (20.4%) y contenido para adultos (21.8%).

No se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre titulaciones para la mayoría de tipos de distracción.

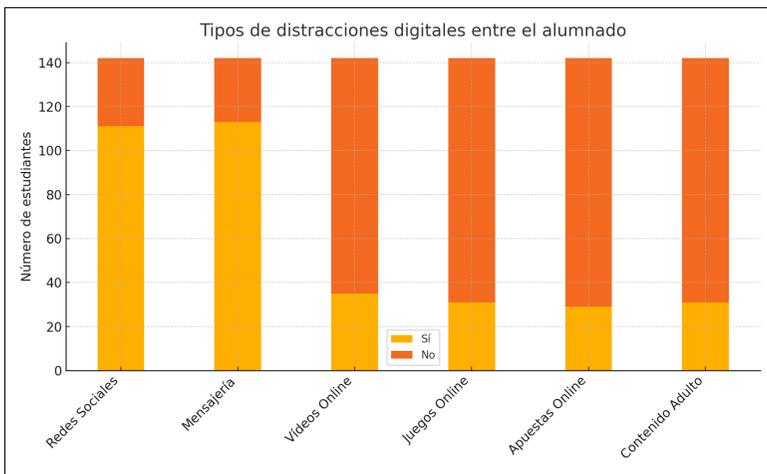


Figura IV.2. Tipos de distracción digital reportados por el estudiantado.

En referencia a la frecuencia de las distracciones en clase, el cuestionario preguntó cuántas veces los estudiantes se distraen durante una clase típica. La mayoría (31.7%) señaló distraerse entre 3 y 5 veces por sesión, mientras que un 26.8% reportó entre 6

y 8 distracciones. Un porcentaje menor indicó distracciones más frecuentes, como se muestra en la Figura IV.3.

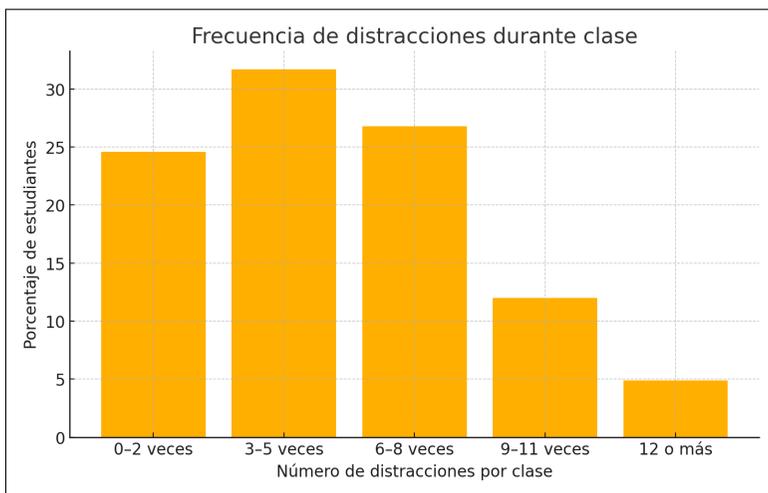


Figura IV.3. Frecuencia de distracciones reportadas durante una clase.

El estudio también exploró en qué tipo de clases los estudiantes se sentían más distraídos. La mayoría reportó mayores niveles de distracción cuando se usaban principalmente diapositivas (50.7%), seguidas de clases que combinaban pizarra y diapositivas (16.2%), solo pizarra (14.1%), resolución de problemas (12.7%) y trabajo por parejas (6.3%).

Se observaron diferencias en el nivel de distracción entre titulaciones. En la Figura IV.5 se resumen los datos de distracción media por clase y el tipo de clase donde los estudiantes reportaron más distracciones.

Los estudiantes de Ingeniería Aeroespacial fueron los que menos distracciones reportaron, mientras que los de Mecánica y Electrónica mostraron valores más altos. En todas las titulaciones, las clases basadas en diapositivas fueron las que más distracción generaron.

Frecuencia y contexto de las distracciones tras la intervención

Con el objetivo de evaluar el impacto de las sesiones de concienciación, se recogieron datos sobre el número de distracciones que el alumnado experimentaba durante las clases después de la intervención.

Se pidió al estudiantado que estimara cuántas veces se distraía durante una clase típica tras las sesiones informativas. Tal como se muestra en la Figura IV.6, se observa una reducción significativa en la frecuencia de distracciones.

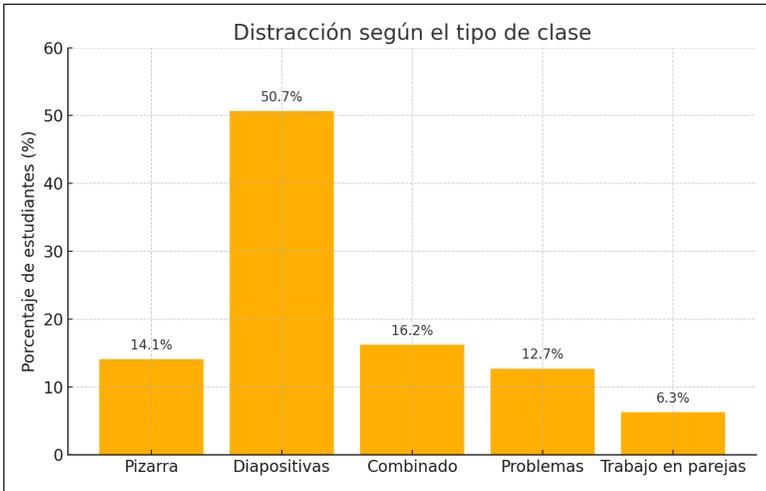


Figura IV.4. Distracción según el tipo de metodología utilizada en clase.

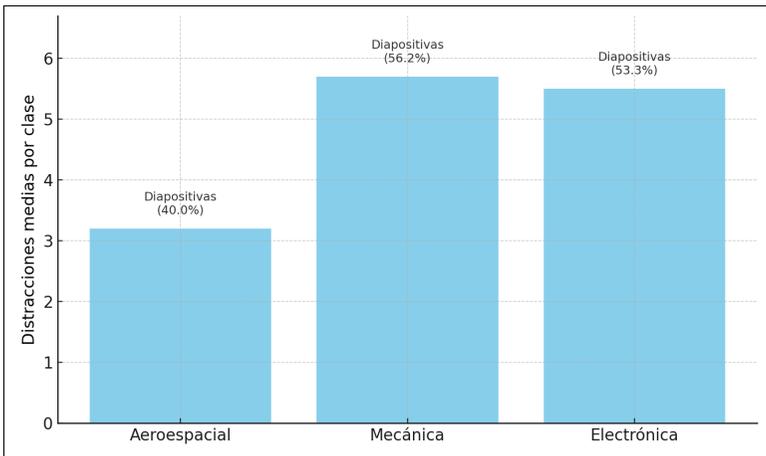


Figura IV.5. Distracción media por clase según titulación.

En concreto, el 38.7% indicó distraerse entre 0 y 2 veces por clase, mientras que solo un 2.8% reportó más de 12 distracciones. Estos datos reflejan una mejora respecto a la situación previa, especialmente en la reducción de distracciones frecuentes.

El análisis mostró cambios en los niveles de distracción entre el estudiantado de las diferentes titulaciones de ingeniería tras las sesiones de concienciación. Estos cambios se resumen en la Tabla IV.1.

El alumnado de Ingeniería Aeroespacial mostró una reducción significativa en la media de distracciones (2.1 por clase), siendo el contexto más distractor las clases

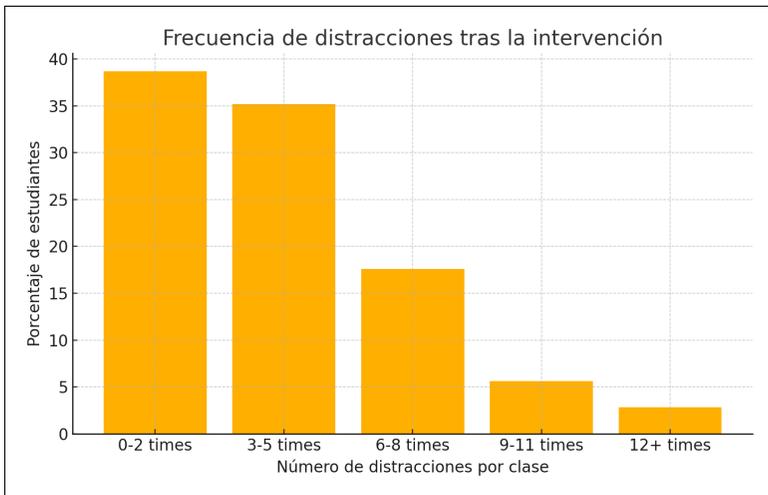


Figura IV.6. Frecuencia de distracciones tras la intervención.

Titulación	Media distracciones
Ing. Aeroespacial	2.1
Ing. Mecánica	3.8
Ing. Electrónica	3.5

Tabla IV.1. Media de distracciones por titulación tras la intervención.

con presentaciones (30.0%). También se observaron mejoras en Ingeniería Mecánica, con una media de 3.8 distracciones, y en Ingeniería Electrónica, con 3.5. En ambas titulaciones, las clases con presentaciones siguieron siendo las más distractoras para una mayoría del estudiantado.

En general, las intervenciones produjeron mejoras notables en la reducción de distracciones digitales, especialmente en las clases que hacen uso de presentaciones como método principal de enseñanza.

CONCLUSIÓN

Este estudio ha mostrado que las distracciones digitales, especialmente por redes sociales y mensajería, afectan significativamente al rendimiento académico del estudiantado de ingeniería. Las intervenciones aplicadas, como las sesiones de concienciación y las normas de uso del móvil en clase, tuvieron efectos positivos, destacando la importancia de promover la autorregulación desde etapas tempranas. La conciencia sobre los hábitos digitales motivó a muchos estudiantes a crear entornos de estudio

más enfocados. Sin embargo, las políticas restrictivas generaron opiniones divididas: si bien ayudaron a reducir distracciones, también generaron ansiedad en algunos casos por la necesidad académica de usar dispositivos. Estos resultados subrayan la necesidad de un enfoque equilibrado que combine estrategias educativas, autorregulación y bienestar digital, adaptado a las demandas del entorno universitario actual.

AGRADECIMIENTOS

Las autoras desean agradecer al profesorado y personal de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Diseño Industrial de la Universitat Politècnica de València por su apoyo y colaboración a lo largo de este estudio. Este proyecto ha sido financiado por el Proyecto de Innovación y Mejora Educativa (PIME) 2023-24 “Ingeniería del Aprendizaje: hacia el aprendizaje autorregulado mediante la competencia de aprender a aprender (ETSID L2L)”, del Instituto de Ciencias de la Educación y la UPV.

REFERENCIAS

- [1] J. Aagaard. Drawn to distraction: A qualitative study of off-task use of educational technology, *Computers in Education*: **87** (2015), 90–97.
- [2] S. Bellur, K.L. Nowak y K.S. Hull. Make it our time: In class multitaskers have lower academic performance, *Computers in Human Behavior*: **53** (2015), 63–70.
- [3] M. Demirebilek y T. Talan. The effect of social media multitasking on classroom performance, *Active Learning in Higher Education*: **19** (2018), 117-129.
- [4] A.J. Dontre. The influence of technology on academic distraction: A review, *Human Behavior and Emerging Technologies*: **3** (2021), 379–390.
- [5] L.R. Elliott-Dorans. To ban or not to ban? The effect of permissive versus restrictive laptop policies on student outcomes and teaching evaluations, *Computers in Education*: **126** (2018), 183–200.
- [6] A.E. Flanigan y W.A. Babchuk. Managing student digital distraction in the college classroom: A self-determination theory perspective, *Educational Psychology Review*: **35** (2023), 60.
- [7] A.E. Flanigan y K.A. Kiewra. What college instructors can do about student cyber-slacking, *Educational Psychology Review*: **30** (2017), 585–597.
- [8] G. Mackenzie y J. Ferrari. The necessity of advancing our knowledge on assistive technologies to better support students with attention deficit hyperactivity disorder, *Journal of ADHD Care*: **1** (2017), 1-13.

- [9] M.Á. Pérez Juárez, J.M. Aguiar Pérez, J. del Pozo Velázquez, M. Alonso Felipe, S. Rozada Raneros y M. Barrio Conde. From digital distraction to digital motivation: Utopia or reality, *Digital Distractions in the College Classroom* (EIGI Global, USA, 2022), 205–222.
- [10] M.Á. Pérez Juárez, D. González Ortega y J.M. Aguiar Pérez. Digital distractions from the point of view of higher education students, *Sustainability*: **5** (2023), 6044.
- [11] S.M. Ravizza, M.G. Uitvlugt y K.M. Fenn. Logged in and zoned out: How laptop internet use relates to classroom learning, *Psychological Science*: **28** (2017), 171–180.
- [12] J. Winter, D. Cotton, J. Gavin y J.D. Yorke. Effective e-learning? Multi-tasking, distractions and boundary management by graduate students in an online environment, *ALT-J Research in Learning Technology*: **18** (2010), 71–83.
- [13] E. Wood, A. Mirza y L. Shaw. Using technology to promote classroom instruction: Assessing incidences of on-task and off-task multitasking and learning, *Journal of Computers in Higher Education*: **30** (2018), 553–571.

AFILIACIONES

Amanda Carreño Sánchez - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Santiago Moll López - Departamento de Matemática Aplicada (autor de correspondencia: sanmollp@mat@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

José Antonio Morano Fernández - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Luis Manuel Sánchez Ruiz - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Erika Vega Fleitas - Instituto de Diseño y Fabricación, Universitat Politècnica de València

V

CUANDO LA GEOMETRÍA SUMA: UNA APROXIMACIÓN VISUAL Y PERSONALIZADA A LA SUMA DE SERIES NUMÉRICAS

J.A. Aledo, J.C. Cortés, M.E. Flores y J.P. Llano

Son muy pocas las series numéricas convergentes para las que se conocen fórmulas cerradas para calcular su suma. Cuando este importante contenido formativo se imparte en el aula se hace, casi siempre, mediante procedimientos algebraico-analíticos, ignorando ejemplos donde la belleza de la intuición geométrica nos puede permitir aproximarnos a estos problemas con otro enfoque mucho más atractivo. En este trabajo presentamos, mediante algunos ejemplos gráficos, la suma de series geométricas a través de series telescópicas. El enfoque que se propone se basa en construcciones geométricas que cada estudiante puede –y debe– personalizar, por lo que su uso y presentación en el aula conduce a un trabajo individual y su posterior discusión grupal, que da lugar de forma natural al uso de dinámicas colaborativas de enseñanza-aprendizaje. Además, el enfoque geométrico propuesto invita al uso de asistentes computacionales y gráficos para su implementación en el ordenador, facilitando la integración de tecnologías en el aula.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas se ha caracterizado por el uso –y a veces abuso– de la potencia del razonamiento abstracto, guiada, en muchos contextos, por la aplicación de cálculos algebraicos y desarrollos de naturaleza analítica. A menudo esta eficacia del lenguaje matemático ha sido utilizada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de forma exclusiva, omitiendo otros enfoques complementarios basados en algún tipo de intuición que permita deducir un resultado de interés a partir de una interpretación geométrica, física, etc. Este modo de enseñar ha sido muchas veces justificado por la posible falta de rigor que pudiera conllevar el uso de razonamientos basados

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XIII Jornadas de Innovación Docente, pp. 41–47. Copyright © 2025 Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-74878-5

en la intuición. Sin embargo, son muchos los estudios que avalan que –cuando los contenidos a enseñar así lo permiten– la combinación de la intuición y del rigor es un enfoque más enriquecedor en el proceso de enseñanza-aprendizaje [3–9]. En efecto, por una parte, el uso de la intuición activa ideas, promueve creatividad y conecta con lo más cercano y perceptivo. Por otra parte, el rigor da validez y estructura, y resulta esencial para que el aprendizaje sea matemáticamente sólido. De esta forma, el ciclo *intuición–formalización* fortalece una comprensión profunda de lo que se aprende.

En este trabajo proponemos un enfoque geométrico para introducir en el aula el estudio de la suma de series numéricas. Específicamente, nuestra propuesta ilustra cómo se puede obtener la suma de algunas series de tipo geométrico a partir de series telescópicas convergentes que aparecen de forma natural en distintas construcciones geométricas. Así, desde este primer paso basado en la *intuición* geométrica, mostraremos –en un segundo paso–, cómo formalizar los resultados obtenidos haciendo uso del *rigor* matemático. Cabe subrayar que en la literatura existente pueden encontrarse trabajos previos donde se propone la enseñanza de conceptos propios del Cálculo como, por ejemplo, el cálculo de límites [2] o la suma de series numéricas, a partir de construcciones geométricas [1]. Con este artículo pretendemos seguir aportando propuestas que enriquezcan esta línea de trabajo.

Aunque al final del artículo se resumen las principales ventajas pedagógicas de esta propuesta, consideramos pertinente destacar desde el inicio –para facilitar la comprensión del enfoque de este trabajo– que la misma admite múltiples variantes, en función de la construcción geométrica que se elija. Esta flexibilidad favorece, en una primera etapa, el trabajo autónomo y creativo de cada estudiante y, más adelante, la participación colaborativa al compartir su propuesta con sus compañeros y recibir sus sugerencias a través de un debate dirigido en el aula.

UNA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA PARA SUMAR SERIES NUMÉRICAS

En esta sección, presentamos una construcción geométrica en el plano que genera procesos recursivos para obtener la suma de series numéricas convergentes. Para ello, comenzamos con una función $y = f(x)$ que pasa por el origen de coordenadas y que es derivable y creciente, es decir, tal que $f(0) = 0$ y $f' > 0$. Elegimos un valor $x_0 > 0$ sobre el eje de abscisas y $m < 0$. El valor x_0 actúa como semilla del proceso recursivo que se muestra en la Figura V.1. Definimos una sucesión $\{x_i\}$ sobre el eje de abscisas mediante el siguiente proceso recursivo:

1. Trazamos la recta $s_0 : y = m(x - x_0)$, que pasa por el punto $(x_0, 0)$ y tiene pendiente $m < 0$. Esta recta interseca a la función $y = f(x)$ en el punto (x_1, y_1) . De esta manera, $f(x_1) = y_1 = m(x_1 - x_0)$.

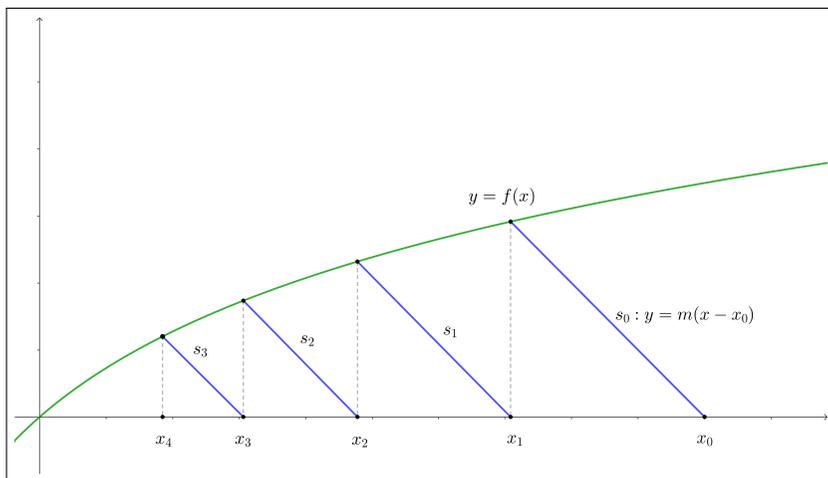


Figura V.I. Construcción geométrica base.

2. En general, obtenemos el valor x_{i+1} a partir de x_i de igual forma, para $i = 0, 1, 2, \dots$. Es decir, trazamos la recta $s_i : y = m(x - x_i)$, que pasa por $(x_i, 0)$ y tiene la misma pendiente m . Esta recta interseca a la función $y = f(x)$ en el punto (x_{i+1}, y_{i+1}) . De esta manera, $f(x_{i+1}) = y_{i+1} = m(x_{i+1} - x_i)$. De lo anterior, obtenemos que

$$f(x_{i+1}) - mx_{i+1} = -mx_i. \quad (\text{V.1})$$

La expresión (V.1) permite determinar una recurrencia sobre los términos de la sucesión $\{x_i\}$. Considerando esta sucesión de términos recurrentes, podemos definir la serie telescópica

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}).$$

A partir de la intuición que ofrece la geometría de esta construcción, representada en la Figura V.I, se observa claramente que la suma de la serie considerada es finita y corresponde al valor x_0 . Esto se debe a que dicha suma equivale a la suma de la longitud de los segmentos definidos por los pares x_i y x_{i+1} sobre el eje de abscisas, $i = 0, 1, 2, \dots$. En este trabajo mostraremos como, al tomar $y = f(x)$ una función lineal homogénea, la ley de recurrencia establecida en (V.1) nos permitirá transformar la serie telescópica anterior en una serie geométrica conocida cuya suma puede ser obtenida de manera intuitiva gracias a la geometría.

IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA MEDIANTE EJEMPLOS

Para llevar al aula esta construcción, vamos a considerar el caso particular en el que la función corresponde a una recta $y = f(x) = kx$ con pendiente positiva $k > 0$. Tomamos también una pendiente genérica $m < 0$ para las rectas $s_i, i = 0, 1, 2, \dots$. Esta construcción se ilustra en la Figura V.2.

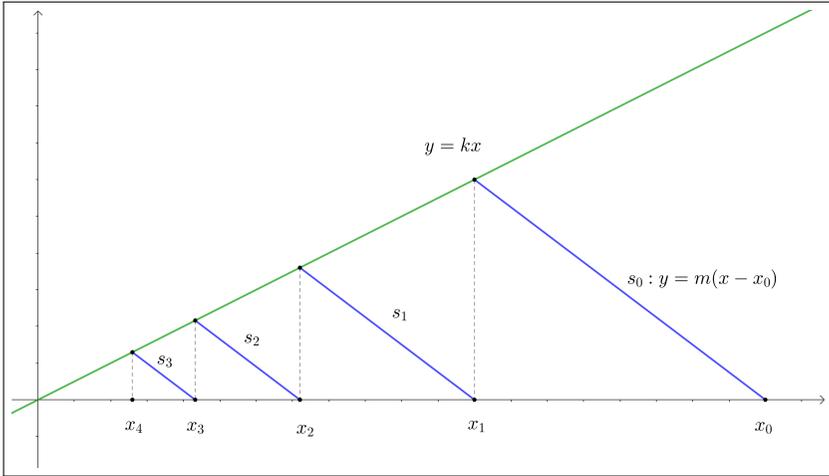


Figura V.2. Construcción geométrica base para $y = f(x) = kx, k > 0$.

En este caso particular, tenemos que $y_{i+1} = f(x_{i+1}) = kx_{i+1}$ y, sustituyendo en (V.1), obtenemos

$$kx_{i+1} - mx_{i+1} = -mx_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

de donde

$$x_{i+1} = \frac{m}{m-k} \cdot x_i = \dots = \left(\frac{m}{m-k}\right)^i \cdot x_1 = \left(\frac{m}{m-k}\right)^{i+1} \cdot x_0.$$

En consecuencia, la sucesión $\{x_i\}$ es una progresión geométrica de razón

$$0 < r := \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{m}{m-k} < 1,$$

pues se tiene que $m < 0$ y $k > 0$. Como antes, el segmento de extremos o y x_0 sobre el eje de abscisas puede expresarse como la suma infinita de los segmentos de extremos x_i y x_{i+1} sobre el eje de abscisas, $i = 0, 1, 2, \dots$; es decir, como la suma telescópica

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}).$$

Sustituyendo en esta expresión la forma explícita de x_i obtenida anteriormente, y realizando un sencillo cálculo, es inmediato obtener la suma de la serie geométrica de razón $0 < r = \frac{m}{m-k} < 1$ y primer término x_0 a través de la suma gráfica de una serie telescópica. Dejamos la comprobación al lector.

DE LA INTUICIÓN AL RIGOR

En la construcciones anteriores, hemos usado argumentos geométricos intuitivos que generan procesos recursivos para sumar distintas series que se siguen de las distintas posibilidades de elegir la función $f(x)$ y la pendiente de las rectas $s_i, i = 0, 1, 2, \dots$. Pretendemos ahora justificar teóricamente la validez de estos resultados. De este modo, completamos el proceso de aprendizaje desde la intuición a la formalización, tal como se indicó al inicio del trabajo.

En primer lugar, conviene observar que se cumple el siguiente resultado:

Teorema. *Una serie telescópica $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$ converge si, y solo si, la sucesión $\{x_i\}$ converge. En ese caso, si llamamos $L = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, entonces $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = x_0 - L$.*

La prueba de este resultado se basa en la caracterización de la convergencia de una serie en base a sus sumas parciales. Es decir, una serie es convergente si, y solo si, la sucesión de sus sumas parciales también lo es. En este caso, la suma parcial j -ésima es

$$z_j = \sum_{i=0}^j (x_i - x_{i+1}) = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \dots + (x_j - x_{j+1}) = x_0 - x_{j+1}.$$

De aquí, $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (x_0 - x_{j+1})$, que existe y es finito, si y solo si, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j+1}$ existe y es finito.

En nuestro caso, podemos ver, a partir de las propiedades de la función f que genera el proceso recursivo en la construcción geométrica, que la sucesión $\{x_i\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente, por lo que es convergente. En efecto, para ver que es monótona decreciente usaremos que al cumplir f : (i) $f(0) = 0$ y (ii) $f' > 0$, entonces $f > 0$ en un intervalo abierto que contenga a los puntos x_i . Usando (V.1) y que $m < 0$ se sigue que

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{m} \cdot f(x_{i+1}) < 0,$$

es decir, la sucesión $\{x_i\}$ es monótona decreciente. Por otra parte, como f es creciente, existe f^{-1} y ésta es también una función creciente. En consecuencia, como $f(x_i) > 0$ y $0 \in \text{dom}(f)$, se sigue que $x_i > f^{-1}(0)$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots$. Tenemos entonces, a partir de (V.1), que

$$x_i = x_{i+1} - \frac{1}{m} \cdot f(x_{i+1}) > x_{i+1} > f^{-1}(0),$$

es decir, $f^{-1}(0)$ es una cota inferior de $\{x_i\}$. Vemos finalmente que, como f es creciente y tiene un único cero, éste es por tanto el límite de la sucesión $\{x_i\}$. En efecto, denotando $L := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, tomando límites en (V.1) y usando la continuidad de f (por ser derivable) se obtiene

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{i+1}) - m \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1}\right) - m \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = -m \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} x_i,$$

de donde

$$f(L) - mL = -mL,$$

y, en consecuencia, $f(L) = 0$. Por tanto, el límite de la sucesión $\{x_i\}$ es un cero de la función f . En nuestra construcción geométrica de la Figura V.2, $f(x) = kx$, $k > 0$, y claramente el único cero de esta función es $L = 0$, es decir, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$, lo que justifica de forma rigurosa la intuición geométrica que se ha utilizado en el proceso recursivo-geométrico mediante el que se aceptaba que la serie telescópica es convergente. Más concretamente, en nuestro caso se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i - x_{i+1} = x_0 - \lim_{i \rightarrow \infty} x_i,$$

y dicha expresión es finita, dado que hemos probado que la sucesión $\{x_i\}$ converge al valor 0; entonces, la serie telescópica también converge y lo hace al valor $x_0 - 0 = x_0$, tal y como se observa gráficamente en la construcción geométrica (Figura V.2).

CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos propuesto una construcción geométrica basada en la recursividad, que puede ser explorada en el aula para abordar la suma de series numéricas. A partir de este proceso, podemos obtener series infinitas bien conocidas, cuyas sumas se calculan combinando el razonamiento recursivo y la intuición geométrica. La intuición inherente de la geometría y la recursividad contrasta con los enfoques usuales para la suma de series, que se basan principalmente en razonamientos algebraicos y el uso de fórmulas analíticas. Por último, hemos formalizado la intuición que proporciona el proceso geométrico recursivo descrito, estableciendo condiciones suficientes que garanticen la obtención rigurosa de la suma de ciertas series numéricas.

La principal ventaja de esta construcción es que puede ser personalizada. Esto es, modificando los parámetros de la construcción, cada estudiante puede obtener y explorar una versión individual del problema, lo que genera una riqueza de representaciones. Así, las particularidades de cada una de ellas pueden ser presentadas y discutidas conjuntamente en el aula.

REFERENCIAS

- [1] J.A. Aledo y J.C. Cortés. Suma geométrica de series numéricas, *Uno*: **27** (2001), 105-114.
- [2] J.C. Cortés y J.A. Aledo. Cálculo geométrico del límite de sucesiones trigonométricas, *Suma*: **34** (2001), 53-58.
- [3] P.J. Davis y R. Hersh. *Experiencia Matemática*, Editorial Labor/MEC. 1988.
- [4] W. D'Alessandro y I. Stevens. Mature intuition and mathematical understanding, *The Journal of Mathematical Behavior*: **76** (2024), 101203.
- [5] E. Fischbein. *Intuition in Science and Mathematics: An educational approach*, Mathematics Educational Library. 1987.
- [6] E. Fischbein. *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel Publishing Company (2nd ed.). 1994.
- [7] P. Lockhart. *A mathematician's lament: How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art form*, Bellevue Literary Press. 2009.
- [8] L. Peña Páez y O. Yesid Mariño. La importancia de la intuición matemática en los procesos de enseñanza, *Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología*: **7** (2020), 51-59.
- [9] U. Malaspina Jurado. La intuición matemática y sus componentes, *Matemática: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española*: **5** (2009).

AFILIACIONES

Juan Ángel Aledo Sánchez - Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

Juan Carlos Cortés López - Departamento de Matemática Aplicada (autor de correspondencia: jccortes@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

María Elena Flores Fernández - Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

Jose Pablo Llano Gómez - Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

VI

APRENDIZAJE BASADO EN JUEGOS CON ELEMENTOS DE ROL EN MATEMÁTICAS I

A. Carreño, S. Sánchez, C. Delgado y A. Herrero

Esta propuesta presenta una experiencia innovadora en la asignatura Matemáticas I del Grado en Ingeniería Aeroespacial de la Universitat Politècnica de València, basada en el uso del aprendizaje mediante juegos de rol, tanto digitales como de mesa. En el entorno digital, se desarrollaron juegos con RPG Maker MZ en los que el estudiantado personaliza su avatar y se enfrenta a retos matemáticos adaptados a su perfil, lo que favorece la motivación y la adquisición de competencias clave como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el trabajo colaborativo. Complementariamente, se han incorporado juegos de rol de mesa inspirados en mecánicas similares a *Dungeons & Dragons*, con narrativas contextualizadas en entornos científicos y espaciales. Estas dinámicas permiten reforzar conceptos matemáticos abstractos a través del trabajo en equipo, la toma de decisiones y la conexión emocional con el aprendizaje. La evaluación de la experiencia mediante encuestas y entrevistas ha revelado un alto nivel de satisfacción por parte del alumnado. La propuesta se alinea con los ODS 4 (educación de calidad) y 10 (reducción de desigualdades), y refuerza el compromiso con una docencia inclusiva y motivadora.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, las metodologías activas como el *game-based learning* (GBL) y la gamificación han ganado una notable presencia en el ámbito educativo, especialmente en titulaciones técnicas donde la motivación del estudiantado representa un desafío persistente [1, 4, 6]. Aprender a través del juego permite integrar dinámicas lúdicas con objetivos pedagógicos, favoreciendo un entorno más motivador, participativo y adaptado a las necesidades de los estudiantes [19, 20].

Numerosos estudios han señalado que el uso de juegos educativos genera emociones positivas como el interés, la curiosidad o la alegría, lo que potencia la retención

del conocimiento y el compromiso con el aprendizaje [12, 15, 18]. Este efecto es especialmente relevante en disciplinas STEM, donde el estudiantado a menudo percibe los contenidos como abstractos o difíciles [16, 21].

Dentro del abanico de estrategias lúdicas, los *escape rooms* y los juegos de rol (RPG) han demostrado ser particularmente eficaces para fomentar habilidades como la resolución de problemas, el trabajo en equipo y el pensamiento crítico [2, 3, 6, 8, 22]. Estas experiencias combinan narrativa, cooperación y desafíos adaptados al contexto educativo, creando un entorno inmersivo que favorece tanto el aprendizaje conceptual como el desarrollo emocional [9, 14].

La personalización del avatar, la progresión adaptativa y la elección de rutas dentro del juego, elementos tomados de los videojuegos comerciales, se han incorporado en experiencias educativas con resultados positivos en motivación y percepción del aprendizaje [5–7, 10].

El presente proyecto, desarrollado en el marco del programa PIME 2024, amplía el enfoque hacia una combinación de juegos digitales y físicos, estructurados alrededor de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Los estudiantes deben resolver problemas técnicos dentro de narrativas ambientadas en contextos de sostenibilidad, justicia climática o transición energética, lo que permite abordar simultáneamente competencias disciplinares e implicación social [13, 17].

METODOLOGÍA

Este proyecto se desarrolló en la asignatura de Matemáticas I del Grado en Ingeniería Aeroespacial de la Universitat Politècnica de València durante el curso 2024/2025. El objetivo principal fue fomentar la participación activa y el aprendizaje entre pares mediante dos experiencias diferenciadas de aprendizaje basado en juegos: una digital y otra presencial, ambas con elementos de rol y narrativa.

Diseño de las actividades

Se diseñaron dos sesiones independientes, cada una con una duración de una hora y media:

- **Sesión digital.** Se utilizó el software RPG Maker MZ para crear un videojuego con una narrativa centrada en la escasez de agua en un mundo ficticio. El estudiantado, organizado en grupos de 4 personas, debía superar retos matemáticos para avanzar por distintos niveles. Las pruebas incluían acertijos, cálculos simbólicos y razonamientos lógicos. A medida que avanzaban, se desbloqueaban nuevas zonas, personajes y recompensas. La dificultad se ajustaba dinámicamente en función de las decisiones tomadas y los errores cometidos.

Al finalizar, los grupos podían elegir distintos desenlaces, fomentando la toma de decisiones estratégicas y el pensamiento crítico.

- **Sesión presencial.** Esta actividad se llevó a cabo en el aula y adoptó el formato de un juego de rol físico, centrado en una misión de rescate y exploración espacial. Los estudiantes trabajaron en grupos de 5 personas, asumiendo diferentes roles dentro del equipo. A lo largo del juego, debían resolver de forma cooperativa cuatro pruebas matemáticas relacionadas con el temario de la asignatura. Las pruebas se presentaban en forma de desafíos contextualizados en la narrativa, y las decisiones del grupo influían en el desarrollo de la misión. Aunque esta sesión no integró directamente los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), sí fomentó habilidades como la innovación, el trabajo en equipo y la resolución de problemas en entornos inciertos, alineadas con competencias transversales promovidas por los ODS.

Participación y evaluación

Un total de 51 estudiantes participaron en las actividades. Tras su finalización, se les ofreció una encuesta anónima diseñada en Qualtrics con el fin de recoger retroalimentación sobre diversos aspectos de la experiencia. El cuestionario incluía ítems tanto de respuesta cerrada (escala Likert) como abierta, y se estructuraba en torno a las siguientes dimensiones: a) nivel de motivación generado por la actividad, b) percepción sobre la utilidad del juego para aprender contenidos matemáticos, c) preferencia entre el formato digital y el físico, d) dinámica grupal y colaboración y e) sugerencias de mejora.

RESULTADOS

Un total de 51 estudiantes del Grado en Ingeniería Aeroespacial participaron en ambas actividades y completaron el cuestionario de evaluación tras cada una de ellas. Esto permitió comparar directamente sus percepciones sobre el juego digital y la dinámica de rol presencial, valorando cada ítem en una escala de Likert de 1 (muy en desacuerdo) a 5 (muy de acuerdo).

En términos generales, ambas experiencias fueron valoradas positivamente, con medias superiores a 4 en la mayoría de los ítems. No obstante, se observaron ligeras diferencias a favor de la dinámica de rol presencial en aspectos como la motivación, la colaboración y el aprendizaje entre pares.

Para evaluar si las diferencias entre ambas experiencias eran significativas, se aplicó la prueba no paramétrica de rangos con signo de Wilcoxon para muestras relacionadas. Los resultados indicaron diferencias estadísticamente significativas a favor de la experiencia de rol presencial en la motivación para aprender matemáticas ($p = 0.021$) y el

Ítem evaluado	Digital	Rol
Motivación para aprender matemáticas	4.1 ± 0.8	4.4 ± 0.7
Comprensión de contenidos	4.2 ± 0.7	4.3 ± 0.6
Trabajo en grupo / aprendizaje entre pares	4.3 ± 0.6	4.6 ± 0.5
Comunicación y colaboración	4.1 ± 0.9	4.3 ± 0.8
Pensamiento crítico y resolución de problemas	4.0 ± 0.8	4.2 ± 0.7
Preferencia de actividad (1 digital–5 rol)	2.5 ± 0.9	2.6 ± 1.0

Tabla VI.1. Valoraciones medias (media ± DT) tras cada actividad (n = 51)

trabajo en grupo / aprendizaje entre pares ($p = 0.037$). En los demás ítems no se observaron diferencias significativas ($p > 0.05$), lo que sugiere que ambas experiencias fueron valoradas de forma similar en cuanto a comprensión de contenidos, desarrollo de competencias transversales y pensamiento crítico.

Las respuestas abiertas revelaron un alto grado de satisfacción. Algunos comentarios destacaron la inmersión narrativa del juego de rol, como señaló una estudiante: «*Me sentí parte de la historia, y eso me ayudó a entender y recordar los conceptos*». Otros estudiantes valoraron el diseño visual y la estructura por niveles del juego digital, así como la claridad de los acertijos. Entre las sugerencias de mejora, se mencionó disponer de más tiempo para debatir estrategias en grupo o incluir una explicación previa más detallada sobre la dinámica del juego.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos confirman el valor pedagógico de integrar juegos de rol en la enseñanza universitaria, especialmente en asignaturas técnicas. Tanto la experiencia digital como la presencial fueron bien valoradas, aunque la dinámica de rol mostró una ligera ventaja en motivación y percepción de trabajo en grupo. Esto coincide con estudios previos que destacan el potencial de los entornos inmersivos para fomentar el aprendizaje activo y colaborativo [1, 5, 11]. El uso combinado de narrativa, retos matemáticos y dinámicas de grupo facilitó la implicación emocional del alumnado, lo que refuerza la importancia de metodologías centradas en el estudiante. Futuras investigaciones podrían profundizar en el impacto de estas experiencias a medio plazo o en otros perfiles estudiantiles, así como explorar formatos híbridos que combinen ambas modalidades.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Universitat Politècnica de València, en el marco de la convocatoria PIME 2024. Proyecto: “Juegos de Rol en el Aula: Promoviendo el Aprendizaje Profundo y la Colaboración a través de los ODS” (PIME/24-25/439).

REFERENCIAS

- [1] E. Boyle, T. Hainey, T. Connolly, G. Gray, J. Earp, M. Ott y J. Pereira. An update to the systematic literature review of empirical evidence of the impacts and outcomes of computer games and serious games, *Computers & Education*: **94** (2016), 178–192.
- [2] J. Charlo. Educational escape rooms as a tool for horizontal mathematization: Learning process evidence, *Education Sciences*: **10** (2020), 213.
- [3] A. Gordillo, D. López Fernández, S. López Pernas y J. Quemada. Evaluating an educational escape room conducted remotely for teaching software engineering, *IEEE Access*: **8** (2020), 225032–225051.
- [4] T. Hainey, T. Connolly, E. Boyle, A. Wilson y A. Razak. A systematic literature review of games-based learning empirical evidence in primary education, *Computers & Education*: **102** (2016), 202–223.
- [5] J. Hamari, D. Shernoff, E. Rowe, B. Coller, J. Asbell-Clarke y T. Edwards. Challenging games help students learn: An empirical study on engagement, flow and immersion in game-based learning, *Computers in Human Behavior*: **54** (2016), 170–179.
- [6] A. Herrero Debón, D. Roselló Ferragud, S. Moll López, J.A. Moraño Fernández, L.M. Sánchez Ruiz, S. Sánchez López y E. Vega Fleitas. Game-based learning with role-playing elements using RPG Maker MZ, *Modelling in Science Education and Learning*: **16** (2023), 55–65.
- [7] S. Huang, Y. Kuo y H. Chen. Applying digital escape rooms infused with science teaching in elementary school: Learning performance, learning motivation, and problem-solving ability, *Thinking Skills and Creativity*: **37** (2020), 100681.
- [8] C. Jiménez, N. Arís, Á. Magrenán Ruiz y L. Orcos. Digital escape room, using genial.ly and a breakout to learn algebra at secondary education level, *Education Sciences*: **10** (2020), 271.
- [9] A. Kapoor, W. Burlinson y R. Picard. Automatic prediction of frustration, *International Journal of Human-Computer Studies*: **65** (2007), 724–736.
- [10] S. Lopez Pernas, A. Gordillo, E. Barra y J. Quemada. Examining the use of an educational escape room for teaching programming in a higher education setting, *IEEE Access*: **7** (2019), 31723–31737.
- [11] A. Makri, D. Vlachopoulos y R. Martina. Digital escape rooms as innovative pedagogical tools in education: A systematic literature review, *Sustainability*: **13** (2021), 4587.

- [12] V. Mellado, A. Borrachero, M. Brígido, L. Melo, M. Davila, F. Canada y G. Martínez. Las emociones en la enseñanza de las ciencias, *Enseñanza de las Ciencias: 32* (2014), 11–36.
- [13] D. Menon y M. Romero. Game mechanics supporting a learning and playful experience in educational escape games, *Global Perspectives on Gameful and Playful Teaching and Learning* (IGI Global, 2020), 143–162.
- [14] S. Nicholson. Ask why: Creating a better player experience through environmental storytelling and consistency in escape room design, *Proceedings of Meaningful Play* (2016), 521–556.
- [15] M. Ninaus, S. Greipl, K. Kiili, A. Lindstedt, S. Huber, E. Klein y K. Moeller. Increased emotional engagement in game-based learning: A machine learning approach on facial emotion detection data, *Computers & Education: 142* (2019), 103641.
- [16] M. Papastergiou. Digital game-based learning in high school computer science education: Impact on educational effectiveness and student motivation, *Computers & Education: 52* (2009), 1–12.
- [17] S. Pozo Sánchez, G. Lampropoulos y J. López Belmonte. Comparing gamification models in higher education using face-to-face and virtual escape rooms, *Journal of New Approaches in Educational Research: 11* (2022), 307.
- [18] J. Sabourin y J. Lester. Affect and engagement in game-based learning environments, *IEEE Transactions on Affective Computing: 5* (2014), 45–56.
- [19] V. Shute, S. D’Mello, R. Baker, K. Cho, N. Bosch, H. Ocumpaugh y V. Almeda. Modeling how incoming knowledge, persistence, affective states, and in-game progress influence student learning from an educational game, *Computers & Education: 86* (2015), 224–235.
- [20] E. Um, J. Plass, E. Hayward y B. Homer. Emotional design in multimedia learning, *Journal of Educational Psychology: 104* (2012), 485–498.
- [21] F. Villavicencio y A. Bernardo. Positive academic emotions moderate the relationship between self-regulation and academic achievement, *British Journal of Educational Psychology: 83* (2013), 329–340.
- [22] F. Zamora Polo, M. Corrales Serrano, J. Sanchez Martín y L. Espejo Antúnez. Nonscientific university students training in general science using an active-learning merged pedagogy: Gamification in a flipped classroom, *Education Sciences: 9* (2019), 297.

AFILIACIONES

Amanda Carreño Sánchez - Departamento de Matemática Aplicada (autora de correspondencia: amcarsan@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

Carlos Delgado Caro - INGENIO/CSIC, Universitat Politècnica de València

Alicia Herrero Debón - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Sara Sánchez López - INGENIO/CSIC, Universitat Politècnica de València

VII

SOLUCIONES A PROBLEMAS

ALGEBRAICOS DONDE LA IA FALLA

M.J. Felipe e I. Gilabert

El sistema GAP, apodado de esta manera por las siglas inglesas *Groups, Algorithms, Programming* es un lenguaje de programación acompañado de extensas bibliotecas de funciones y objetos algebraicos [5]. Por su enfoque en la teoría de grupos computacional y el manejo de otras estructuras algebraicas, es de particular utilidad para cualquier persona (incluidas las autoras) con interés tanto en la docencia como la investigación en el campo del álgebra abstracta. Además, por ser un software libre (a diferencia de otros de álgebra computacional como Magma), es adecuado para ser usado por estudiantes de álgebra en grado y posgrado. No obstante, el sistema requiere, como todo lenguaje de programación, seguir una sintaxis precisa, desde una interfaz poco dinámica que al alumnado no le suele agradar.

En marcado contraste, el programa de Inteligencia Artificial Generativa ChatGPT se ha convertido durante los últimos años en una de las herramientas más populares entre estudiantes. Si el calificativo de ‘herramienta’ podría estar sujeto a debate, su popularidad se comprende a simple vista. Tanto su diseño en forma de *chatbot* (es decir, uno que permite interactuar con él en lenguaje natural) como su interfaz moderna y su acceso gratuito desde web y aplicación móvil priorizan la comodidad del usuario. Para consultar con ChatGPT un enunciado matemático, no es necesario ningún conocimiento previo: basta con plantearle directamente la pregunta como si de un diálogo entre dos personas se tratara.

Ahora bien, a pesar de que el programa se autodescriba en términos de productividad y aprendizaje [3], todavía queda por demostrar si sus efectos educacionales a un nivel más profundo son realmente positivos [2, 4]. A eso se añade una pregunta más práctica: si un alumno acude a ChatGPT en busca de ayuda para realizar un ejercicio, ¿está verdaderamente obteniendo una respuesta correcta y/o suficiente?

En esta comunicación, describimos una actividad dirigida a estudiantes que se sitúan en la intersección del público objetivo de ambos programas. En ella resolvemos un sencillo problema matemático con la ayuda de GAP, para luego estudiar hasta qué punto la inteligencia artificial es capaz de proporcionar respuestas correctas al

mismo problema. Nuestra intención es hacerles reflexionar sobre un uso crítico de las tecnologías a su alcance, tanto aquellas que introducimos en el aula como aquellas a las que acceden por su cuenta, y simultáneamente presentarles nociones teóricas vistas en clase de una forma más lúdica a partir de aplicaciones ilustrativas del álgebra en la vida real.

PRÁCTICAS DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS II EN 2024

Nuestro trabajo se enfoca en las prácticas informáticas de la asignatura Estructuras Algebraicas II impartida por primera vez en 2024/2025 dentro del Grado en Matemáticas de la Universitat Politècnica de València. A ella asistieron, en este curso académico, estudiantes de dobles titulaciones pertenecientes también al cuarto año del Grado en Ingeniería Civil y del Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. La asignatura está concebida como una prolongación de Estructuras Algebraicas I, que cursan en segundo año. Así, sumándose a las definiciones de grupo y de anillo que ya aprendieron, se les introduce en Estructuras Algebraicas II el concepto de cuerpo, a partir del cual se desarrolla en la segunda mitad de la asignatura una introducción a la teoría de Galois.

En las prácticas informáticas de la asignatura, presentamos para el alumnado algunas ampliaciones y aplicaciones de la teoría, a través de ejemplos construidos en el programa GAP que permitan poner de manifiesto el potencial de este sistema computacional. Estos van acompañados de ejercicios entregables, que han de tratar de resolver por grupos, y de un examen final donde se les pide contestar a cuestiones similares a las trabajadas en las clases de informática.

Al ser este el primer año en el que se impartía Estructuras Algebraicas II, nos era de particular interés usar las horas de este tipo de clases como un marco en el que estudiar las necesidades y carencias de cada estudiante en cuanto a comprensión y absorción del contenido teórico de la asignatura. De manera esperable, en la mayoría de los casos, parecía motivarles la aplicabilidad de las nociones presentadas, lo cual les permitía afrontar la dificultad para asimilar las nociones conceptualmente abstractas. Hemos de señalar que al encontrar dificultades en la resolución de ejercicios, varios de ellos reconocían abiertamente recurrir a ChatGPT.

UNA PROPUESTA DE ACTIVIDAD

Con la actividad que describimos aquí, tratamos de ofrecer un problema no muy alejado de la teoría y que se acerca a la vez a aplicaciones de las estructuras algebraicas en el mundo real (en particular, aplicaciones de los cuerpos finitos a la ciberseguridad). Al tener, como veremos, una implementación muy sencilla en GAP, el objetivo es

que el aspecto informático no ahogue el teórico, y quede todavía espacio para que el estudiantado reflexione autónomamente.

El punto de partida, tanto de la actividad como del capítulo central de la asignatura, es la estructura de cuerpo. Esto es un anillo unitario y conmutativo donde todos los elementos no nulos son unidades (es decir, admiten un elemento inverso). El ejemplo más común de cuerpo es el de \mathbb{R} , el conjunto de los números reales. Los estudiantes también han trabajado anteriormente en otros cuerpos como \mathbb{C} , el conjunto de los complejos, que también es infinito. En esta asignatura aprenden en cambio sobre la existencia y propiedades de los cuerpos finitos.

Cuando F es un cuerpo finito con elemento uno 1_F y elemento cero 0_F , entonces debe existir un entero positivo n tal que $n \cdot 1_F = 0_F$. Al valor de n más pequeño que cumple esa igualdad se le llama característica del cuerpo, y se tiene que, en los cuerpos finitos, la característica es siempre un número primo. Un ejemplo básico de cuerpo finito son los cuerpos cíclicos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para un primo p , donde se trabaja con los enteros $\{0, \dots, p-1\}$ y la suma y multiplicación módulo p . Todo cuerpo finito de característica p es el cuerpo (único, salvo isomorfismo) de cardinal p^n para algún entero positivo n .

Dado un cuerpo F , ya sea finito o infinito, podemos definir el anillo $F[x]$ de los polinomios con coeficientes en ese cuerpo. Al considerar un polinomio $r = r(x) \in F[x]$, una cuestión clásica es buscar sus raíces en F . Sabemos por un teorema elemental que el número de raíces del polinomio r en F está acotado superiormente por $\deg(r)$, donde $\deg(r)$ es el grado del polinomio r . Si en F encontramos menos de $\deg(r)$ raíces, entonces existe una extensión de F (es decir, un cuerpo más grande que contiene a F) donde r sí tiene $\deg(r)$ raíces. Lo denominamos cuerpo de escisión de r sobre F . No obstante, aunque podamos controlar el número de raíces de r , conocer sus valores exactos en el cuerpo F requiere de herramientas específicas.

El ejemplo más sencillo y no trivial para hallar raíces de un polinomio sobre un cuerpo F es hallar las de un polinomio de grado 2. Cuando $r \in F[x]$ es de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0_F$ y $F = \mathbb{R}$, las herramientas necesitadas se reducen a algo sencillo: aplicar la fórmula clásica de las ecuaciones cuadráticas. Así, las raíces son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a condición de que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ exista. Esta fórmula puede generalizarse sin alteraciones a polinomios en \mathbb{C} y cualquier cuerpo finito de característica distinta de 2. Sin embargo, cuando F es un cuerpo finito de característica 2, el elemento $2a$ es nulo y por lo tanto no invertible.

En este caso, las soluciones se obtienen mediante el concepto de *traza absoluta*. Si $\alpha \in F$, definimos esta traza como

$$\text{tr}(\alpha) = \alpha + \sigma(\alpha) + \dots + \sigma^{n-1}(\alpha),$$

donde n es tal que $|F| = 2^n$ y $\sigma : F \rightarrow F$ es el automorfismo de Frobenius, visto en clase, tal que $\sigma(\alpha) = \alpha^p$. El concepto teórico de traza es fundamental cuando se trabaja, por ejemplo, en teoría de códigos y criptografía con cuerpos finitos. Teniendo en cuenta esto, distinguimos dos casos. Si $b = 0$, entonces r tiene una única raíz doble $\sqrt{c/a}$, que siempre existe. Si $b \neq 0$, definimos $d = ca/b^2$. Si $\text{tr}(d) \neq 0$, entonces r no tiene raíces en F . En cambio, si $\text{tr}(d) = 0$, entonces las raíces de r son bs/a y $b(s+1)/a$, donde

$$s = kd^2 + (k+k^2)d^4 + \dots + (k+\dots+k^{2^{n-2}})d^{2^{n-1}}$$

y k es cualquier elemento de F de traza 1. A nivel teórico, las explicaciones de este método pueden encontrarse por ejemplo en [1]. Si lo desean, los estudiantes pueden profundizar sobre las demostraciones en la citada referencia.

Sin embargo, el objetivo de la práctica es doble. Por un lado, que apliquen en GAP los conceptos descritos anteriormente sobre varios ejemplos de ecuaciones y de cuerpos. Esto les permite familiarizarse con la manipulación de polinomios y de cuerpos en el programa. Por otro lado, han de comparar y constatar sus resultados a los que ofrece ChatGPT, y así reflexionar: ¿cómo de satisfactorias son las respuestas que da la Inteligencia Artificial?

IMPLEMENTACIÓN EN GAP

Detallamos a continuación un ejemplo de código a evaluar en GAP a fin de encontrar las raíces de un polinomio r de segundo grado en el cuerpo de p^n elementos, para un primo p y un entero n . Por simplicidad, ya que basta con el cambio de variable $y = ax/b$ para reducirnos a un polinomio de esta forma, suponemos que $r(x) = x^2 + x + d$. Además, como de otro modo no habrá soluciones, suponemos que $\text{tr}(d) = 0$. Asumimos que los valores de n y d ya han sido definidos al programa.

GAP cuenta con un acceso sencillo a cuerpos finitos ya construidos. Definimos el nuestro con

```
> F:=GF(2^n);;
```

Para definir el valor s en nuestras raíces, basta con un sencillo programa. El lenguaje de GAP, igual que muchos otros, cuenta con la posibilidad de hacer bucles `for`. Para definir k , seleccionamos un elemento de F que cumpla con la condición $\text{tr}(k) = 1$.

```
> s:=function(n,d,k)
> local i,j,v,w;
> v:=0;
> for i in [1..n-1] do w:=0; for j in [0..i-1] do w:=w+k^(2^j);
> od; v:=v+w*d^(2^i); od;
```

```
> return v; end;  
> k:=Filtered(Elements(F),x->Trace(F,x)=Z(2)^0)[1];;
```

Así, las soluciones son:

```
> s(n,d,k);  
> s(n,d,k)+1;
```

Existen funciones generales de GAP ya programadas para hallar raíces de polinomios en cuerpos finitos, como es el caso de `RootsOfPolynomial`, pero nos resulta más educativo que los alumnos sean capaces de resolver el problema planteado usando programación sencilla a partir de comandos elementales. En otro caso, el alumno puede pecar de utilizar los comandos ya implementados sin saber realmente lo que estos están haciendo.

La implementación del uso en ChatGPT no podría ser más sencilla: le preguntamos verbalmente. Para la preparación de esta práctica, hemos probado a variar entre *prompts* más directos como «*Dame las raíces del polinomio [...] en el cuerpo de [...] elementos*» y más indirectos como «*¿Cómo puedo resolver [...] en un cuerpo [...]?*», todos ellos con los mismos resultados.

RESULTADOS

Como es de esperar, GAP siempre permite encontrar las raíces deseadas. Sólo recorrer los elementos de F para encontrar un valor conveniente de k requiere un tiempo de cálculo más elevado, en cuerpos grandes de cardinal 2^n con $n \geq 15$. De ser necesario, eso puede solucionarse cambiando la construcción de k por un bucle condicional

```
> i:=1;;  
> while Trace(F,Elements(F)[i])<>Z(2)^0 do i:=i+1; od;  
> k:=Elements(F)[i];
```

el cual dividirá al menos por 2 (y en la práctica por mucho más) la complejidad temporal.

Al pedirle a ChatGPT que encuentre las raíces de $x^2 + x + d$ en el cuerpo de 2^n elementos con $n = 1, 2, 3$, el programa ofrece una respuesta rápida y correcta, independientemente de d . Según él mismo explica, se limita a evaluar el polinomio en cada elemento del cuerpo.

Cuando $4 \leq n \leq 6$, ChatGPT logra encontrar las raíces de $x^2 + x + 1$ mediante otros métodos numéricos. Al cambiar d por otro valor distinto de 1, sin embargo, empezamos a constatar problemas. En el peor de los casos, nos ofrece una fórmula incorrecta:

Queremos resolver la ecuación en \mathbb{F}_{64} :

$$x^2 + x + \alpha^2 = 0$$

Paso 1: Reescribir la ecuación

La ecuación es:

$$x^2 + x = \alpha^2$$

Paso 2: Resolver la ecuación cuadrática

Este es un polinomio cuadrático de la forma $x^2 + x + c = 0$, donde $c = \alpha^2$. La solución de una ecuación cuadrática en un cuerpo finito \mathbb{F}_q generalmente puede ser resuelta mediante el **teorema de resolución cuadrática**.

La fórmula general para resolver $x^2 + x + c = 0$ en \mathbb{F}_q es:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c}}{2 \cdot 1}$$

En \mathbb{F}_2 , simplificamos las constantes y el cálculo de discriminante:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

Y, dado que el cuerpo \mathbb{F}_2 tiene características especiales, esta forma se reduce más en los cálculos.

Figura VII.1. Una de las respuestas proporcionadas por ChatGPT.

En el mejor de los casos, nos recomienda que usemos otros programas de cálculo para resolver la ecuación.

Soluciones de $x^2 + x + 1 = 0$ en \mathbb{F}_{2^6}

Las raíces de esta ecuación son las que satisfacen el polinomio $x^2 + x + 1 = 0$ y pueden expresarse como generadores o combinaciones de ellos en el cuerpo.

Sin una herramienta computacional, te sugiero que utilices algún software de álgebra computacional como **SageMath** o **SymPy** para obtener las soluciones exactas. Si quieres intentarlo, el código que te proporcioné en el mensaje anterior debería funcionar perfectamente.

Figura VII.2. Otra respuesta proporcionada por ChatGPT.

Esta es también la solución por la que opta el *chatbot* para valores de n superiores a 7. Tras insistirle, ofrece un código explícito que ejecutar en SageMath, pero, al llegar a $n = 20$, sólo hemos logrado que nos sugiriera la fórmula clásica (e incorrecta aquí) de ecuaciones cuadráticas.

Los resultados descritos arriba, no obstante, han de tomarse con matices. Corresponden a nuestras observaciones a fecha de julio de 2025, pero es plausible que el programa evolucione en un futuro próximo.

Por último, señalamos que experimentar con ChatGPT en polinomios de otros grados muestra que tampoco ahí el programa puede ofrecer soluciones particularmente eficaces (y en especial no más eficaces que la resolución teórica). Por ejemplo, al preguntarle sobre raíces de polinomios de tercer grado en cuerpos finitos, sólo puede aconsejarnos, de manera obvia, evaluarlos en cada elemento del cuerpo.

✓ 1. Verifica que el cuerpo sea finito

Estás trabajando sobre un cuerpo \mathbb{F}_q con un número **finito** de elementos.

- Si $q = p$, es un cuerpo primo.
- Si $q = p^n$, con $n > 1$, es una **extensión de campo** y puede requerir representar los elementos como polinomios módulo un polinomio irreducible.

✓ 2. Evalúa el polinomio en cada elemento del cuerpo

Como el cuerpo es finito, puedes simplemente **evaluar el polinomio en cada elemento de \mathbb{F}_q** .

Por cada $x \in \mathbb{F}_q$, calcula $f(x) \pmod p$. Si el resultado es 0, entonces x es una **raíz** del polinomio.

Figura VII.3. Respuesta proporcionadas por ChatGPT con polinomios de tercer grado.

CONCLUSIONES

Este es un trabajo preliminar de preparación de una actividad para las prácticas de Estructuras Algebraicas II. Esperamos, cuando la llevemos a cabo, poder realizar un análisis cuantitativo de qué fiabilidad tiene ChatGPT sobre el ordenador de cada estudiante, a fin de comprobar también qué sensibilidad tiene al historial de búsqueda de cada ordenador y a la variación en la redacción de los *prompts*. Asimismo, podremos escuchar las reflexiones posteriores del alumnado.

De momento, hemos comprobado que existen problemas de gran sencillez donde ChatGPT no sabe cómo actuar. Sospechamos que, al tratarse de un problema explicado en varios libros pero no tan abordado en las páginas web a las que ChatGPT tiene acceso, no conoce los métodos adecuados. Es posible que su rendimiento mejore con el tiempo, pero esto es un recordatorio de que ChatGPT también depende de conocimientos externos. El objetivo de esta práctica no es pues paliar un vacío dejado por la Inteligencia Artificial, sino hacerle ver al estudiantado que estos vacíos existen, incluso en ocasiones donde las matemáticas ya los ha completado. La comodidad de una herramienta no la vuelve imprescindible: cada estudiante ha de recordar que las respuestas de ChatGPT, cuando son correctas, están basadas en una teoría que son

perfectamente capaces de comprender, y no al revés. Para la confianza de los estudiantes a la hora de manipular objetos abstractos, sería quizás beneficioso recordarles que hay siempre más de lo que creen a su alcance. En ocasiones (y aunque el entorno del sistema a priori les incomode), a sólo una decena de líneas en GAP de distancia.

REFERENCIAS

- [1] D.A. Cox. *Galois Theory*, Wiley. 2004.
- [2] M. Gerlich. AI tools in society: Impacts on cognitive offloading and the future of critical thinking, *Societies*: **15** (2025), 6.
- [3] OpenAI. <https://openai.com/es-ES/chatgpt/overview/>. Último acceso 02/07/2025.
- [4] M. Stadler, M. Bannert y M. Sailer. Cognitive ease at a cost: LLMs reduce mental effort but compromise depth in student scientific inquiry, *Computers in Human Behavior*: **160** (2024).
- [5] The GAP Group. *Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.14.0, 2024. <https://www.gap-system.org>

AFILIACIONES

María José Felipe Román - Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Iris Gilibert Manzanares - Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada (autora de correspondencia: igilman@posgrado.upv.es), Universitat Politècnica de València

VIII

LA METODOLOGIA DE MODELISACIÓ GENERAL: UNA FERRAMENTA TRANSDISCIPLINAR PER A LA PRESA DE DECISIONS IMPLEMENTADA EN L'EDUCACIÓ SUPERIOR

J.C. Micó

Se presenta la Metodologia de Modelisació General (MMG) implementada en l'aula d'Educació Superior de l'Universitat Politècnica de València. La MMG fon dissenyada pel professor Antonio Caselles, en el marc de l'Escola d'Investigació Operativa i Sistemes, com una adaptació del Método Científic o Método Hipotètic-Deductiu al camp de la modelisació matemàtica dinàmica. La MMG té com a immediat antecedent la Dinàmica de Sistemes (DS), creada pel professor Jay W. Forrester mitant segle XX en l'Institut de Tecnologia de Massachusetts (MIT). L'experiència investigadora de l'autor d'este artícul en este camp ha impulsat a dur a l'aula Educació Superior la MMG. La forma en que és impartida en l'aula es desenrolla a lo llarg de tot l'artícul.

INTRODUCCIÓ

Este artícul presenta una metodologia innovadora per a la modelisació i simulació per ordenador de sistemes complexos en l'aula universitària de l'Universitat Politècnica de València (UPV): la Metodologia de Modelisació General (MMG). En l'actualitat està sent impartida per l'autor, en anglés, en el nom Computer Simulation, Innovation and Entrepreneurship. Ademés, la MMG ha segut impartida en l'UPV per l'autor fins a l'actualitat durant dos periodos diferenciats: en primer lloc, en l'Escola Tècnica Superior d'Edificació (ETSIE), tant en l'especialitat de Tecnologia del Màster d'Edificació, en castellà, durant els cursos 2007/2022, en el nom d'Optimización, Simulación i Tratamiento de Senyes en Edificación, i en el Grau d'Edificació, en castellà, durant els cursos 2010/2017, en el nom de Simulación de Procesos en Edificación; en segon lloc, en l'Escola Tècnica Superior d'Ingenieria Industrial (ETSII), en els graus d'Ingenieria en Tecno-

logies Industrials i d'Ingenieria de l'Energia, en anglés, durant els cursos del període 2021/2025, en el nom de Computer Simulation, Innovation and Entrepreneurship. Per tant, l'implementació de la MMG en l'aula d'Educació Superior ha seguit contrastada durant molts anys en èxit.

La MMG capacita a l'ingenier a pensar i actuar en contacte en la realitat de les senyes crues, de la seua experiència, i dels seus coneiximents, convertint un problema en un Model Matemàtic Dinàmic (MMD) programat en ordinador. El MMD pot ser utilitzat a continuació per a la presa de les millors decisions o estratègies davant diferents escenaris, en un entorn complex, és dir, com a eina de presa de decisions. La MMG fou dissenyada per Antonio Caselles en l'Escola d'Investigació Operativa i Sistemes de l'Universitat de València. Està concebuda com una adaptació del Mètode Científic o Mètode Hipotètic-Deductiu al camp de la modelització matemàtica dinàmica. L'última actualització de la MMG pot trobar-se en l'article [4], on l'autor i els seus col·laboradors (entre els que es troba l'autor d'aquest article) integren totes les seues investigacions prèvies en el camp de la modelització i simulació de sistemes complexos en l'ús de la MMG, contribuint a millorar-la. Per exemple, entre aquests treballs previs poden destacar-se els articles [2, 3, 9–12].

Ademés, la MMG té com a immediat precedent a la Dinàmica de Sistemes (DS), creada pel professor Jay W. Forrester a mitjan segle XX en l'Institut de Tecnologia de Massachusetts (MIT), presentada per primera volta en 1961 [5]. La DS permet modelitzar els sistemes complexos en forma d'equacions diferencials o diferències finites, encara que admet també les equacions funcionals, els retards temporals o la multidimensionalitat, com, per exemple, la modelització espai-temporal. La contribució especial de la DS realitzada per Forrester radica en el Diagrama Hidrodinàmic (DH) com a forma de convertir les relacions causals en equacions dinàmiques. Sobre la contribució al coneixement de la DS, vegeu [5–8]. Les contribucions de Forrester [5–7] i Meadows [8] demostren la potencialitat de la DS. No obstant, la MMG d'Antonio Caselles proporciona millores importants sobre la DS:

1. Organiza en etapes la metodologia.
2. Introduïx la regressió no lineal.
3. Proporciona la possibilitat d'obtenir resultats estocàstics, és dir, intervals dinàmics de confiança en nivells de confiança.
4. Proporciona formes d'obtenir les estratègies òptimes respecte a escenaris possibles de futur.
5. Converteix la MMG en una verdadera Teoria General de Sistemes, com a llenguatge matemàtic unificador de la Ciència [4].

Tota esta metodologia pot trobar-se en accés lliure en la pàgina web d'Antonio Caselles¹.

¹<https://www.uv.es/caselles/>

Per a que els estudiants puguin afrontar en èxit el deprentatge de la MMG, estos han de posseir estudis previs en càlcul, àlgebra, equacions diferencials, càlcul numèric, estadística inferencial i coneiximent mig-alt d'un llenguatge de programació bàsic, com pot ser C++.

Estes són, no obstant, condicions necessàries, les condicions suficients vénen donades ademés per una inclinació a l'esforç intel·lectual i una inclinació cap al coneiximent multidisciplinar.

Els continguts d'este artícl es presenten a continuació, i comprenen el desenroll de l'innovació presentant la MMG en 8 etapes, acompanyada d'un dels eixemples presentats en l'aula.

LA METODOLOGIA DE MODELISACIÓ GENERAL (MMG)

Se presenta en este apartat la MMG descomposta en 8 etapes [4], nomenades com a S_1, S_2, S_3 , etc. (per S de Step en anglés). Ademés, cada subapartat d'este apartat es correspon en una d'estes etapes, podent ademés tindre vàries subetapes cascuna d'elles. Junt a cada etapa se presenta un eixemple de modelisació usat en classe per este autor, sense el qual seria impossible entendre-les be, pero tenint en conte la llimitació d'espai d'un artícl de congrés que, desafortunadament, no permet una presentació exhaustiva.

Una primera aproximació resumida i motivadora de la MMG se presenta en la Figura VIII.1. Donat un problema o objectiu de modelisació, els principals factors involucrats (A, B, C, \dots), es presenten com a relacions causals, les quals poden transformar-se en les equacions dinàmiques del MMD ($B = f(A, C), C = f(A), \dots$). A continuació, una volta validat el MMD en les senyes del passat, este és utilisat per a simular el futur en el model i trobar la solució o solucions del problema.

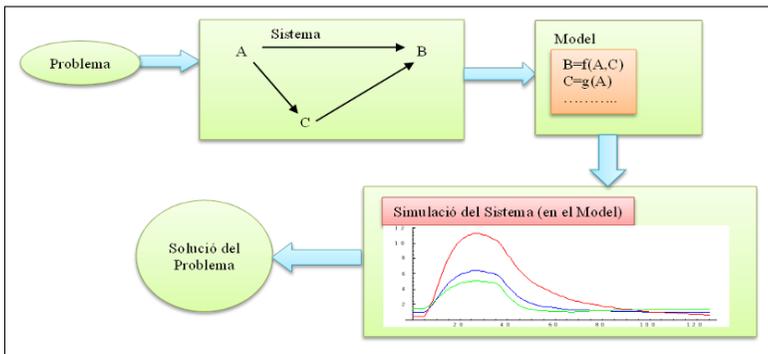


Figura VIII.1. Resum intuïtiu de la MMG.

Ans de passar a descriure la MMG etapa per etapa, és convenient presentar-la també en el seu conjunt en la Figura VIII.2. Note's que, en el procés de modelisació per a obtenir el MMD validat i el seu us com a ferramenta de decisió, s'ha de tindre en conte que les 8 etapes no es recorren llinealment sense tornar ad alguna etapa anterior (a excepció de la primera etapa). En general, seran necessaris passos cap arrere, a modo de realimentació, per a tornar a continuar cap a avant. Este procés de realimentació és continu i necessari si es vol fer un us adequat de la MMG.

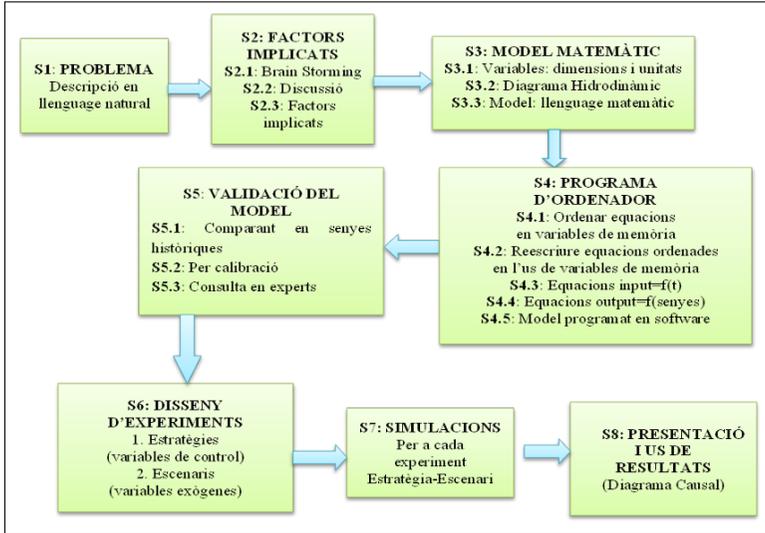


Figura VIII.2. Las 8 etapas de la MMG.

Etapa S1. Descripció del problema/objectiu en llenguatge natural

En esta etapa l'objectiu ha de quedar clar i concís. Quadra be la frase de Baltasar Gracián de «*lo bo si breu, dos voltos bo*». S'ha d'insistir que mai la complexitat pot expressar-se matemàticament des del principi en el procés modelisador. De fet, és millor escomençar en objectius senzills que conduïxquen a models senzills per a, despuix de validar-los, procedir a incorporar noves variables i/o equacions. La versió definitiva del MMD deu ser una versió validada, sobretot per a la variable objectiu, i deu contindre les variables de control (aquelles que proporcionen les estratègies) i les variables exògenes (aquelles que proporcionen els escenaris). Si el MMD se valida en unes atres variables, pero no conté explícitament estes tres variables, el MMD no podrà ser usat de cap modo com a ferramenta de decisió. L'exemple S1 en classe: evolució de l'índex de desenroll humà (hdi) definit per l'ONU en Espanya.

Etapa S2. Obtenició dels factors implicats

Com pot observar-se en la Figura VIII.2, esta etapa té tres subetapes, encara que algunes pogueren obviar-se com passarem a comentar. Lo més destacable és que proporcionen els factors implicats en el problema/objectiu de modelisació (S_1), és dir, aquelles idees o conceptes que el modelisador considera fonamentals. És imprescindible que siguen pocs i importants perquè si més són necessaris sorgiran de forma natural (per coherència matemàtica) en l'etapa 3 (S_3). En la subetapa S2.1 (*brain storming* o tempesta d'idees) els modelisadors generen espontàneament un conjunt de factors implicats relacionats en el problema sense cap restricció. En la subetapa S2.2 se discuteixen els factors generats en l'etapa anterior, aplegant en la subetapa S2.3 als factors implicats definitius. L'exemple S2.3 en classe: els factors implicats fonamentals són població, naiximents, defuncions, immigració, emigració i índex de desenvolupament humà (hdi). Vem que les variables en la següent etapa són moltes més. Això és degut a que són necessàries per a un correcte disseny del DH i a la desagregació del hdi de l'ONU segons esta organització la definix.

Etapa S3. Model Matemàtic Dinàmic (MMD)

Com indica la Figura VIII.2, esta etapa conté tres subetapes que també s'expliquen baix. L'importància d'esta etapa és que permet transformar una informació qualitativa, una espècie de pre-teoria donada pel DH, a una primera versió quantitativa del MMD. És una primera versió perquè si en l'etapa S_5 no se valida el model, s'ha de replantejar, tornant a esta etapa o a una anterior canviant les hipòtesis de modelisació. La subetapa S3.1 és crucial si havem de convertir una informació qualitativa en una informació quantitativa. Tot factor implicat ha de redefinir-se com a variable matemàtica. Per ad això s'ha de construir una taula que continga el símbol de la variable, una curta descripció del seu significat, les dimensions de les variables i les unitats de les variables. L'exemple S3.1 en classe: la Taula VIII.1 presenta, com a exemple, dos variables del MMD corresponents al subsistema demogràfic.

Símbol	Descripció	Dimensions	Unitats
pop	població	P/T	p
nac	naiximents	P/T	p/any

Tabla VIII.1. Dos variables del MMD.

En la subetapa S3.2 se presenta el DH com a ferramenta fonamental inventada per Forrester [1-5, 9-12]. És una primera representació conceptual del MMD com si este fora un conjunt d'assuts hidràulics interconnectats per canals i variables auxiliars que

interrelacionen indirectament cada assut en els canals. L'exemple S3.2 en classe: veure Figura VIII.3 que presenta el DH del MMD.

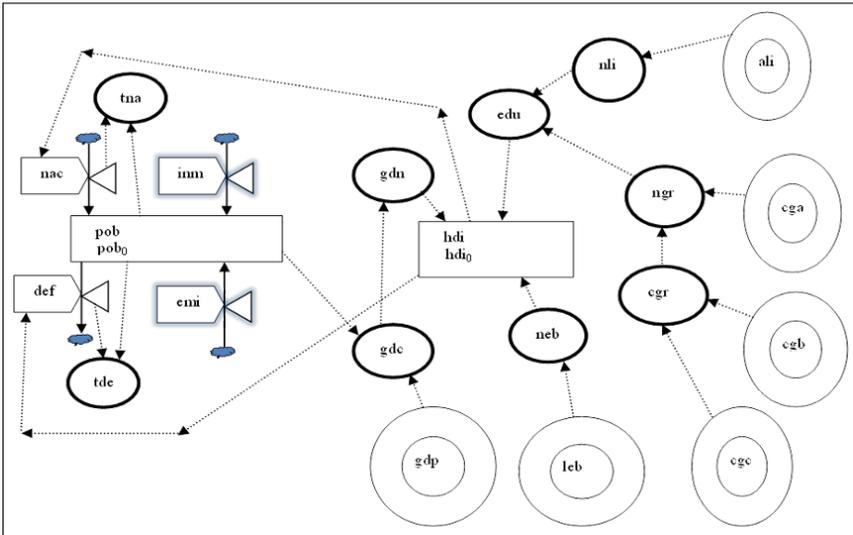


Figura VIII.3. Diagram Hidrodinàmic (DH) del MMD explicat en classe.

Les variables del DH són:

- **Variables *input* auxiliars:** leb (esperança de vida en nèixer), gdp (producte interior brut), ali (índex d'alfabetisació adulta en %), cga (% de nivells educatius 0-2), cgb (% de nivells educatius 3-4), cgc (% de nivells educatius 5-8).
- **Variables *input* de flux:** inm (immigració), emi (emigració).
- **Variables *output* auxiliars:** tna (taxa de natalitat), tde (taxa de defunció), gdc (producte interior brut per càpita), ndc (producte interior brut per càpita normalisat), neb (esperança de vida al nèixer normalisada), nli (índex d'alfabetisació adulta en % normalisat), cgr (% de nivells educatius combinats), ngr (% normalisat de nivells educatius combinats), edu (índex d'educació).
- **Variables *output* de flux:** nac (naiximents), def (defuncions).
- **Variables d'estat/nivell:** hdi (índex de desenvolupament humà, variable objectiu), pop (població).

En la subetapa S3.3 el MDM se formula en llenguatge matemàtic. Observe's que hi haurà una equació per cada una de les variables *output*, i que les variables *input* o paràmetres, o tenen un valor constant o, lo que és el cas més general, se li ha d'ajustar una curva temporal en la subetapa 4.3. L'exemple S3.3 en classe:

- (1) $\text{pob}(t) = \text{pob}(t - dt) + dt \cdot (\text{nac}(t) - \text{def}(t) + \text{inm}(t) - \text{emi}(t)),$
- (2) $\text{tna}(t) = 1000 \cdot \text{nac}(t) / \text{pob}(t),$
- (3) $\text{tde}(t) = 1000 \cdot \text{def}(t) / \text{pob}(t),$
- (4) $\text{nac}(t) = F2(\text{pob}(t), \text{hdi}(t)),$
- (5) $\text{def}(t) = F3(\text{pob}(t), \text{hdi}(t)),$
- (6) $\text{hdi}(t) = \sqrt[3]{\text{ndc}(t) \cdot \text{neb}(t) \cdot \text{edu}(t)}$ (segons l'ONU),
- (7) $\text{neb}(t) = (\text{leb}(t) - \text{mleb}) / (\text{Mleb} - \text{mleb})$ (segons l'ONU),
- (8) $\text{gdc}(t) = \text{gdp}(t) / \text{pob}(t),$
- (9) $\text{ndc}(t) = (\ln(\text{gdc}(t)) - \ln(\text{mgdc})) / (\ln(\text{Mgdc}) - \ln(\text{mgdc}))$ (segons l'ONU),
- (10) $\text{edu}(t) = (2/3) \cdot \text{nli}(t) + (1/3) \cdot \text{ngr}(t)$ (segons l'ONU),
- (11) $\text{nli}(t) = (\text{ali}(t) - \text{mali}) / (\text{Mali} - \text{mali})$ (segons l'ONU),
- (12) $\text{ngr}(t) = (\text{cgr}(t) - \text{mcgr}) / (\text{Mcgr} - \text{mcgr})$ (segons l'ONU),
- (13) $\text{cgr}(t) = (3/9) \cdot \text{cga}(t) + (2/9) \cdot \text{cgb}(t) + (4/9) \cdot \text{cga}(t)$ (segons l'ONU).

Note's en estes equacions que, entre paréntesis, s'indica en moltes d'elles que són "segons l'ONU". Efectivament, s'han seguit les prescripcions de l'ONU per a calcular l'índex de desenvolupament humà (hdi). No obstant, la novetat d'este MMD és que els naiximents i les defuncions se calculen en funció d'esta variable i la població, indicades respectivament en (4) i (5), simbòlicament com a $F2(\text{pob}(t), \text{hdi}(t))$ i $F3(\text{pob}(t), \text{hdi}(t))$. Estes dos equacions es calculen explícitament en la subetapa 4.4. L'idea de vincular els naiximents i les defuncions a la qualitat de vida, representada ací com a índex de desenvolupament humà, es presentà per primera vegada en els treballs d'investigació [3, 10]. De fet, el MMD ací presentat és una simplificació (encara que rigorosa per quedar validat el MMD en l'etapa S₅ dels models presentats en estos treballs.

Etapa S4. El MMD en programa de ordenador

En esta etapa, el MMD ha de quedar preparat per a ser programat en el software elegit. En classe s'utilisen, cada curs, les últimes versions de Wolfram Mathematica, ya que en ell se poden integrar càlculs complexos i les gràfiques de les dinàmiques de les variables. De fet, per la flaquea de temps en les assignatures de l'actual Pla Bolonya, els alumnes usen les plantilles preparades pel professor. Respecte a les subetapes en la subetapa S4.1 se trau l'orde de càlcul en nivells (al treballar en diferències finites), i és necessari definir variables de memòria per a desfer els bucles: $\text{pobm} = \text{pob}(t - dt)$ i $\text{hdim} = \text{hdi}(t - dt)$. Els nivells de càlcul queden de la següent manera:

- Nivell 0: leb, inm, emi, gdp, ali, cga, cgb, cgc, Mleb, Mali, Mcgr, Mgdc, mleb, mali, mcgr, mgdc, pobm, hdim.
- Nivell 1: nli, cgr, neb, nac, def.
- Nivell 2: pob, ngr.

- Nivell 3: tna, tde, gdc.
- Nivell 4: ndc, edu.
- Nivell 5: hdi.

En la subetapa S4.2 les equacions del MMD són reescrites per orde de càlcul en l'ús de les variables de memòria. En la subetapa S4.3 les variables *input* no constants se calculen com a funció del temps, fent ús de la funció del Wolfram Mathematica `NonLinearModelFit`. És important destacar que les funcions han de ser combinacions de transformades acotades en el temps. El que siguen acotades és fonamental per a que, en projectar-les al futur en l'etapa S7, no tendixquen a l'infinit. Per a acceptar una curva com a bona es requereix:

- (a) Una adaptació visual entre curva i senyes històriques.
- (b) Un coeficient de determinació ($R^2 = \text{raó entre covariança i producte de les variances}$) lo més propenc a l'unitat possible.
- (c) Una distribució aleatòria visual dels residus.
- (d) Una prova de normalitat dels residus de mijja zero i desviació típica constant (proves d'Anderson-Darling i Chi-Quadrat).
- (e) Evaluació dels errors relatius ($100 \cdot |\text{valors històrics} - \text{valors del model}| / \text{valors històrics}$), en la finalitat de que siguen lo més baixos possible.

Pot vore's la Figura VIII.4 per a $\text{pib}(t)$ com un eixemple dels presentats en classe per a esta subetapa.

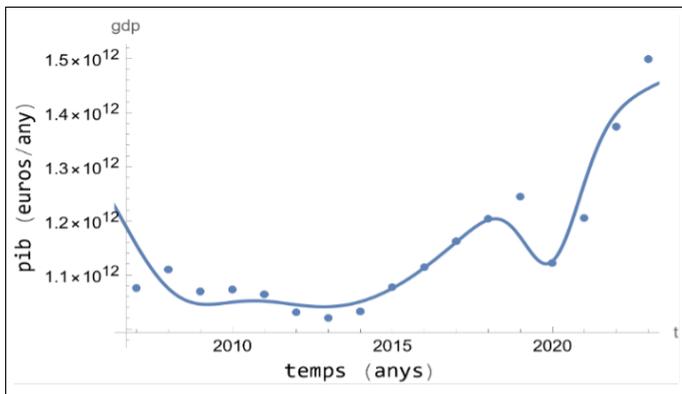


Figura VIII.4. PIB d'Espanya en el periodo 2007-2023 ($R^2 = 0.94$): els punts són les senyes històriques i la curva la funció ajustada.

En la subetapa S4.4 s'obtenene les equacions de variables *output* a partir de les senyes històriques, seguint els criteris (a)-(d) de la subetapa anterior: $F^2(\text{pob}(t), \text{hdi}(t))$ i

$F3(\text{pob}(t), \text{hdi}(t))$. La representació gràfica és impossible d'apreciar per ser en tres dimensions, per lo que se voran en la presentació. Finalment, en la subetapa S4.5 el MMD és programat en el software Wolfram Mathematica. També se vorà en la presentació, en que s'integra en el programa la programació en sí, i la validació de l'etapa S5.

Etapa S5. Validació del MMD

Les subetapes S5.1, S5.2 i S5.3 són tres formes de validar un model, depenent respectivament de si n'hi ha senyes històriques de la variable objectiu i el restant de les variables, només de la variable objectiu, o no n'hi ha senyes. En classe prenim la subetapa 5.1 de la validació, i se fa de tres formes: per inspecció visual de les senyes històriques front als calculats pel MMD (a lo manco per a la variable objectiu), pels errors relatius i per càlcul del coeficient de determinació. Ací reproduïm només en la Figura VIII.5 la validació del MMD en la variable objectiu hdi per a Espanya en el periodo 2007-2023.

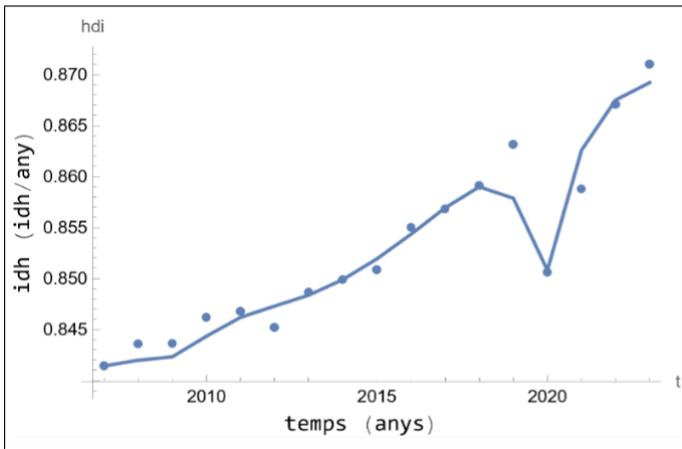


Figura VIII.5. Índex de desenvolupament humà (hdi) d'Espanya en el periodo 2007-2023 ($R^2 = 0.96$): els punts són les senyes històriques i la curva les senyes predites pel MMD unides per segments.

Etapa S6. Disseny d'experiments de futur en el MMD

En esta etapa, les variables *input* susceptibles de canviar en el futur a predir, es classifiquen en variables de control, en les que es definixen les Estratègies, i en variables exògenes (no controlables), en les que es definixen els Escenaris. Les Estratègies ($S_i, i = 1, \dots, n$) són combinacions plausibles de tendències de les variables de control, mentres que els Escenaris són combinacions plausibles de tendències de les variables exògenes ($E_j, i = 1, \dots, m$). Un Experiment és la combinació d'un

Escenari i una Estratègia: $E_j - S_i$. Note's puix que existiran $n \cdot m$ experiments. Ademés, s'ha d'establir quin és el valor o la tendència de la variable objectiu a les que les prediccions de futur del MMD s'han d'aproximar. En l'exemple en classe l'optimització consistix en augmentar el valor de la variable hdi; les variables de control són inm, ali, cga, cgb, cgc i les variables exògenes són leb, emi, gdp. Els experiments queden com:

Experiment 1.

$$E_1 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_1 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 2.

$$E_1 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_2 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Experiment 3.

$$E_1 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_3 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 4.

$$E_1 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_4 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Experiment 5.

$$E_2 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_1 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 6.

$$E_2 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_2 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Experiment 7.

$$E_2 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_3 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 8.

$$E_2 : \text{gdp}_1 (-2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_4 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Experiment 9.

$$E_3 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_1 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 10.

$$E_3 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_2 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Experiment 11.

$$E_3 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_3 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 12.

$$E_3 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_1 (-5\%) \quad S_4 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Experiment 13.

$$E_4 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_1 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 14.

$$E_4 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_2 : \text{gcg}_1 (0\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Experiment 15.

$$E_4 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_3 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_1 (0\%)$$

Experiment 16.

$$E_4 : \text{gdp}_2 (2\%) - \text{emi}_2 (5\%) \quad S_4 : \text{gcg}_2 (5\%) - \text{inm}_2 (5\%)$$

Etapa S7. Simulació dels experiments de futur en el MMD

En esta etapa, els Experiments E_j-S_i se projecten al futur. El període futur de predicció per a cada Experiment sol ser el mateix en duració que el de validació. Se deu presentar una taula resum del resultat de la variable objectiu per a cada Experiment, calificant com a viables l'Estratègia, o Estratègies, que coincidixen en el resultat buscat davant cada Escenari, i com no viables les contràries. La Taula VIII.2 presenta els resultats de l'exemple seguit per als 16 Experiments dissenyats en l'etapa S6 anterior.

	E1	E2	E3	E4
S1	No viable	No viable	Viable	Viable
S2	No viable	No viable	Viable	Viable
S3	Viable	Viable	Viable	Viable
S4	Viable	Viable	Viable	Viable

Tabla VIII.2. Resultats per als 16 Experiments de futur realitzats en el MMD.

Els 16 Experiments de la Taula VIII.2 són el resultat de projectar la variable objectiu hdi al futur en el període 2021-2035, i observar si el hdi creix (viable), o decreix o s'estanca (no viable). Com a eixemple, presentem en la Figura VIII.6 dos prediccions: la de l'Experiment 2, no viable, i la de l'Experiment 11, viable.

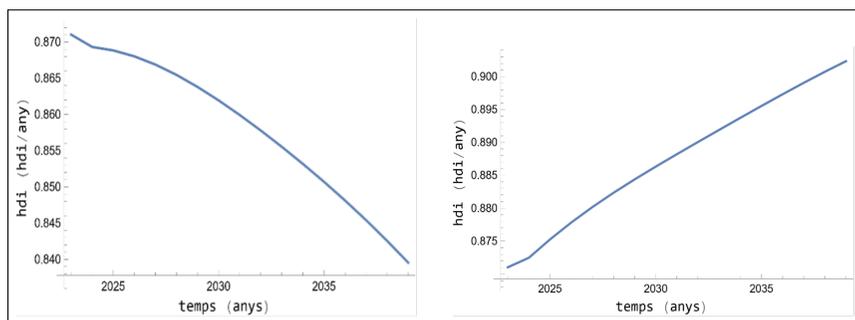


Figura VIII.6. Predicció de l'índex de desenvolupament humà d'Espanya en 2021-2035. Esquerra: predicció (no viable) per a l'Experiment 2. Dreta: predicció (viable) per a l'Experiment 11.

Etapa S8. Presentació i us de resultats

En esta etapa, l'estudiant deu preparar un informe del treball i defensar-hi públicament (80 % de la nota). És essencial que discutixca els resultats sobre la taula de resultats (Taula VIII.2 de l'exemple), i que dissenye un diagrama causal de les relacions entre totes les variables del MMD, molt més intuïtiu que el DH, com a part essencial de les conclusions del treball. El diagrama causal és necessari per a que pugui ser entès

per aquells que li han encarregat el treball o per al públic en general. Només està justificat no presentar el diagrama causal quan estem davant un treball d'investigació en una revista especialitzada sobre el tema. També a partir del diagrama causal se'ls demana als estudiants que proposin propostes de millora en un futur. El diagrama causal de l'exemple seguit no es presenta ací per espai, però és fàcilment deduïble del DH de la Figura VIII.6 sense més que representar les variables en cíclics i les relacions causals en fletxes senzilles. El restant 20 % de la nota consisteix en un examen individual, en tot el material de classe.

REFERÈNCIES

- [1] S. Amigó, A. Caselles, J.C. Micó, M.T. Sanz y D. Soler. Dynamics of the general factor of personality: A predictor mathematical tool of alcohol misuse, *Mathematical Methods in Applied Sciences*: **43** (2020), 8116–8135.
- [2] A. Caselles, J.C. Micó y S. Amigó. Cocaine addiction and personality: a mathematical model, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*: **63** (2010), 449–480.
- [3] A. Caselles, D. Soler, M.T. Sanz y J.C. Micó. Simulating demography and human development dynamics, *Cybernetics and Systems: An International Journal*: **45** (2014), 465–485.
- [4] A. Caselles, D. Soler, M.T. Sanz y J.C. Micó. A methodology for modeling and optimizing social systems, *Cybernetics and Systems: An International Journal*: **51** (2020), 265–314.
- [5] J.W. Forrester. *Industrial Dynamics*, The M.I.T. Press. 1961.
- [6] J.W. Forrester. *Urban Dynamics*, The M.I.T. Press. 1969.
- [7] J.W. Forrester. *World Dynamics*, The M.I.T. Press. 1973.
- [8] D.H. Meadows, D.L. Meadows y J. Randers. *Más allá de los Límites del Crecimiento*, El País-Aguilar, 1994.
- [9] J.C. Micó, D. Soler, M.T. Sanz, A. Caselles y S. Amigó. Minimizing dependency ratio in Spain through demographic variables, *Mathematics*: **10** (2022), 1471.
- [10] M.T. Sanz, J.C. Micó, A. Caselles y D. Soler. A stochastic model for population and well-being dynamics, *The Journal of Mathematical Sociology*: **38** (2014), 75–94.
- [11] M.T. Sanz, A. Caselles, J.C. Micó y D. Soler. A stochastic dynamical social model involving a human happiness index, *Journal of Computational and Applied Mathematics*: **340** (2018), 231–246.

- [12] D. Soler, M.T. Sanz, A. Caselles y J.C. Micó. A stochastic dynamic model to evaluate the influence of economy and well-being on unemployment control, *Journal of Computational and Applied Mathematics*: **330** (2018), 1063–1080.

AFILIACIÓ

Joan Carles Micó Ruiz - Departament de Matemàtica Aplicada (autor de correspondència: jmico@mat.upv.es), Universitat Politècnica de València

IX

IMPLEMENTACIÓN DE LOS OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE MEDIANTE LA ECUACIÓN DEL CALOR

N. Ortigosa

Es por todos conocido que, debido al cambio climático, se está produciendo un aumento significativo de la temperatura global del planeta. Según los estudios recientes, se prevé que se produzca un aumento de 1.5°C cada próxima década. Este incremento de temperatura se espera que tenga consecuencias en diferentes ámbitos, también en infraestructuras críticas, como son los puentes de acero. Los puentes construidos en acero y hormigón son susceptibles a la expansión y contracción durante cambios de temperatura extremos, lo que puede causar roturas y debilitar la estructura global del mismo.

En este contexto, en este trabajo se presenta una actividad enmarcada en la asignatura de segundo curso Matemáticas III, donde se estudian las ecuaciones en derivadas parciales, dentro del Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Se propone, a través de un modelo simplificado, resolver la ecuación del calor y estudiar cómo afectan los incrementos de temperatura a un puente construido en acero. Este problema se contextualiza previamente para así trabajar los ODS número 9 (Industria, Innovación e Infraestructuras) y número 13 (Acción por el Clima) mediante la actividad propuesta, de forma que se puedan plantear medidas que ayuden a mitigar los riesgos en este tipo de estructuras.

INTRODUCCIÓN

Naciones Unidas adoptó en 2015 la denominada Agenda 2030 para el desarrollo sostenible, de cara a dotar de un marco global en el que desarrollar los desafíos sociales, medioambientales y económicos mediante la definición de 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) [6]. Estos objetivos, mostrados en la Figura IX.1, van desde la erradicación de la pobreza hasta la acción por el clima y pasando también por una educación de calidad, y hacen un llamamiento a todos los estamentos de la sociedad para

J. Cerdán & V. Sotomayor (Eds.): XIII Jornadas de Innovación Docente, pp. 79–85. Copyright © 2025 Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València. ISBN: 978-84-09-74878-5

poder cumplirlos. Entre otros, hacen referencia a la educación superior [1], en la que los estudios de ingeniería pueden jugar un papel estratégico para obtener soluciones tecnológicas, diseño de sistemas y capacitación científica para poder implementarlos.



Figura IX.1. Objetivos de Desarrollo Sostenible. Fuente: [6].

Las asignaturas de las titulaciones de ingeniería no deberían limitarse únicamente a la transmisión de conocimientos técnicos, sino que deberían abarcar una comprensión crítica sobre el impacto en el medio ambiente del desarrollo profesional de la actividad de los titulados. En este sentido, el contenido de asignaturas básicas como son las del área de matemáticas suelen presentar habitualmente una menor conexión con aplicaciones reales. Por ende, tampoco con las metas para conseguir los ODS [7]. Sin embargo, incluir aplicaciones reales y relacionarlas con los contenidos de matemáticas que se estudian y a su vez con la problemática del mundo real no solo contextualiza el aprendizaje, sino que además proporciona competencias transversales como el pensamiento crítico, la modelización y el análisis cuantitativo aplicado a situaciones complejas. En este contexto, si buscamos en particular que dichas aplicaciones busquen implementar algunos de los ODS, podemos encontrar en los últimos años múltiples referencias precisamente sobre cómo integrar los ODS a la enseñanza del nivel universitario [8]. Por ejemplo, en las referencias [3] y [4] se presentan modelizaciones matemáticas aplicadas a la sostenibilidad.

En este artículo se presenta una sesión práctica de una asignatura de matemáticas cuyos contenidos incluyen el estudio de ecuaciones en derivadas parciales a modo de ejemplo sobre cómo incorporar aplicaciones reales en asignaturas de tipo más teórico, enmarcándolas en el contexto de los ODS. La sesión práctica propuesta ha tenido lugar en un grupo de prácticas de la asignatura Matemáticas III (que se imparte en el segundo curso) del Grado en Ingeniería En Tecnologías Industriales de la Universitat Politècnica de València, en el primer cuatrimestre del curso 2024/2025. Dicha asigna-

tura tiene una carga lectiva de 6 créditos ECTS repartidos en 3 créditos de teoría y 3 créditos de prácticas, con resolución de problemas en sesiones también presenciales. Estas sesiones de prácticas se organizan en desdobles con subgrupos reducidos para que los alumnos puedan trabajar en clases menos numerosas. El objetivo de la asignatura es resolver problemas de valor inicial y problemas de contorno para ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, así como ecuaciones integrales e integrodiferenciales lineales (básicas en el análisis de sistemas eléctricos, sistemas mecánicos, sistemas de control, entre otros) mediante la utilización de funciones de variable compleja, la transformada de Laplace, series de potencias, cambios de variable y la teoría de funciones matriciales. También se resuelven diferentes problemas de valor inicial y de frontera para ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden (básicas en teoría de vibraciones, conducción de calor en sólidos, problemas hidrodinámicos, problemas de física nuclear, etc.) mediante el método de separación de variables y transformadas integrales.

Así, en la actividad que se presenta en este trabajo, se ha buscado aprovechar estos contenidos para trabajar de forma transversal problemas en el contexto de la implementación de algunos de los ODS. Para ello, en una sesión de problemas, tras una breve presentación de los ODS (para aquellos alumnos que no los conocieran de antemano), se plantea la realización de la actividad práctica. Se busca aplicar una modelización simplificada de la ecuación de propagación del calor en un puente de acero, que sufre variaciones extremas de temperatura asociadas al incremento de temperaturas por el calentamiento global. De esta forma, se propone modelizar cómo varía la temperatura a lo largo de la longitud y el tiempo para un puente de longitud total L , y resolver la ecuación en derivadas parciales asociada.

Por tanto, el objetivo principal de la sesión es mostrar a los estudiantes de Ingeniería Industrial cómo se pueden relacionar los contenidos de esta asignatura con algunos de los ODS, y cómo esta actividad aplicada puede ayudarles a comprender los métodos estudiados para resolver este tipo de ecuaciones. A través de la actividad presentada, se trabajan el ODS número 13 (Acción por el Clima) así como el ODS número 9 (Industria, Innovación e Infraestructuras), que busca construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización sostenible y la innovación.

Una vez finalizada la actividad presentada en este trabajo, 12 de los alumnos respondieron a un cuestionario de evaluación anónimo. A continuación, se presenta una descripción detallada de las actividades y los resultados obtenidos, junto con un análisis de las respuestas obtenidas por los estudiantes a las encuestas finales planteadas.

METODOLOGÍA

Las actividades planteadas y llevadas a cabo se han enmarcado en el Proyecto de Innovación Docente y Mejora Educativa de la Universitat Politècnica de València “In-

novación y mejora educativa aplicada a los ODS en la ETSII^o (PIME-I/21-22/281), de la convocatoria Aprendizaje+Docencia 2021. En este proyecto, se analizó la situación de partida respecto a la formación en los ODS del plan de estudios de la titulación, y se han diseñado actividades de formación en relación a estos.

En particular, en la asignatura Matemáticas III, de segundo curso, se ha propuesto realizar una actividad durante las sesiones de prácticas en la que el alumnado pudiera hacer uso de los conocimientos adquiridos referentes a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de separación de variables previamente estudiados en las sesiones de teoría, y que a su vez se pudieran un ejemplo real de aplicación de los ODS en labores relacionadas con su futura actividad profesional como graduados. Tras una breve presentación de los ODS, para que los alumnos los conozcan en caso de no haber oído nada sobre ellos previamente, se da paso a contextualizar la actividad y a la resolución de la misma.

A continuación, se muestran los datos en los que la NASA indica que 2024 fue el año más cálido desde que hay registros, ya que la temperatura media fue aproximadamente 1.5°C superior al promedio de la segunda mitad del siglo XIX [2]. Hay numerosos artículos y noticias que han dado relevancia a los efectos que dicho incremento de temperatura está teniendo en carreteras, líneas de ferrocarril y otras infraestructuras como puentes de acero. Precisamente, en el mes de julio de 2024, se tuvo que cerrar un puente en Nueva York debido a las temperaturas extremas que estaba sufriendo la ciudad, teniendo que actuar sobre él para volver a ponerlo en funcionamiento [5]. Con esta contextualización, se indica el objetivo de la sesión: resolver la ecuación del calor para modelar cómo la temperatura varía debido a la radiación solar a lo largo del tiempo y de la longitud en un puente de acero, debido a la expansión térmica del mismo. Así, para modelar la temperatura a lo largo de un tiempo t en un puente de longitud L , se utiliza como modelo simplificado la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

donde $u(x, t)$ es la temperatura en el punto x sobre el puente en el instante t , α es el coeficiente de difusividad térmica del acero (medido en m^2/s) y $x \in [0, L]$ es la longitud del puente. Para el problema propuesto, se consideran las siguientes condiciones de contorno e iniciales:

- Condición inicial (distribución de temperatura en $t = 0$): $u(x, 0) = f(x)$, con $f(x)$ una función a elegir.
- Condiciones de contorno (temperatura fija en los extremos del puente): $u(0, t) = T1$, $u(L, t) = T2$.

Los estudiantes debían encontrar la solución aplicando los conceptos vistos previamente en clase. Contextualizando el problema así, se busca trabajar también con

el ODS número 9 (Industria, Innovación e Infraestructuras) y el ODS número 13 (Acción por el Clima) de una forma cercana a una aplicación real, e incluyendo los contenidos estudiados en la asignatura de forma aplicada.

Antes de terminar la sesión de prácticas, se solicitó a los estudiantes que respondieran a un breve cuestionario para conocer su opinión sobre la misma, así como que hicieran una breve reflexión y análisis del impacto que creían que pueden tener los contenidos estudiados en la asignatura con su titulación y, a su vez, en la consecución de los ODS. Las preguntas de dicho cuestionario se muestran a continuación:

- ¿Conocías los ODS antes de esta práctica?
- En caso afirmativo, ¿cómo los conociste?
- ¿Te ha gustado trabajarlos en esta asignatura?
- ¿Te gustaría tener más actividades como la propuesta?
- ¿Crees que su aplicación es útil en el contexto de tus estudios en este Grado?
- ¿Crees que los ODS son importantes en tu vida diaria?
- ¿Has trabajado con los ODS en otras asignaturas?
- ¿Qué ODS crees que puedes trabajar en el contexto de esta asignatura?

RESULTADOS

A continuación se detallan los resultados obtenidos en el cuestionario planteado a los estudiantes y mostrado en la sección anterior.

Un total de 83 % de los estudiantes conocían qué eran los ODS y habían oído hablar de ellos, mayoritariamente en charlas en su instituto o en la universidad (habiéndolos trabajado la totalidad de ellos en otras asignaturas previas de la titulación). El mismo porcentaje de estudiantes indicó que les gustaba la actividad presentada, y que querrían tener más actividades similares.

El porcentaje de estudiantes que pensaba que era útil aplicar los ODS en sus estudios fue ligeramente superior (92 %), pero únicamente el 50 % indicó que creía que los ODS eran importantes en su vida diaria.

Respecto a la pregunta sobre qué ODS pensaban que podrían trabajarse en esta asignatura, los resultados se muestran en la Figura IX.2. Todos los estudiantes eligieron el ODS número 9 (Industria, Innovación e Infraestructuras), seguidos del ODS número 12 (Producción y Consumo responsables) elegido por el 64 %, y los ODS número 6 (Agua limpia y Saneamiento), número 7 (Energía asequible y No contaminante), número 11 (Ciudades y Comunidades Sostenibles) y número 14 (Vida submarina) seleccionados por el 36 % de los estudiantes.

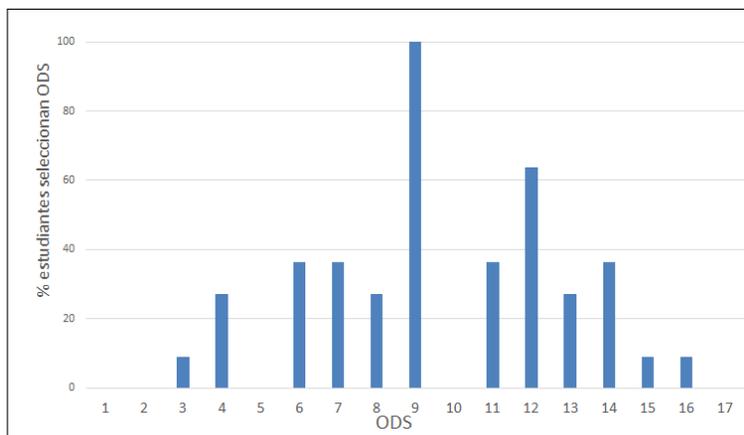


Figura IX.2. Respuestas obtenidas a la pregunta «¿Qué ODS crees que puedes trabajar en el contexto de esta asignatura?».

CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado una actividad para ser realizada en una de las sesiones de prácticas de la asignatura Matemáticas III (segundo curso) del Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. En ella, se plantea trabajar los contenidos estudiados previamente referentes a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de separación de variables mediante la resolución de la ecuación del calor. Dicha ecuación se utiliza para modelar la distribución de temperatura en un puente de acero, de cara a estudiar la influencia de las temperaturas extremas debidas al cambio climático en las dilataciones de dichas infraestructuras. Este contexto ayuda a poder trabajar en el aula los ODS número 9 y 13, mostrando los estudiantes un alto grado de aceptación de este tipo de actividades, especialmente en asignaturas de carácter más teórico.

AGRADECIMIENTOS

La autora agradece el soporte del proyecto “Innovación y mejora educativa aplicada a los ODS en la ETSII” (PIME-I/21-22/281) de la convocatoria Aprendizaje+Docencia 2021, de la Universitat Politècnica de València.

REFERENCIAS

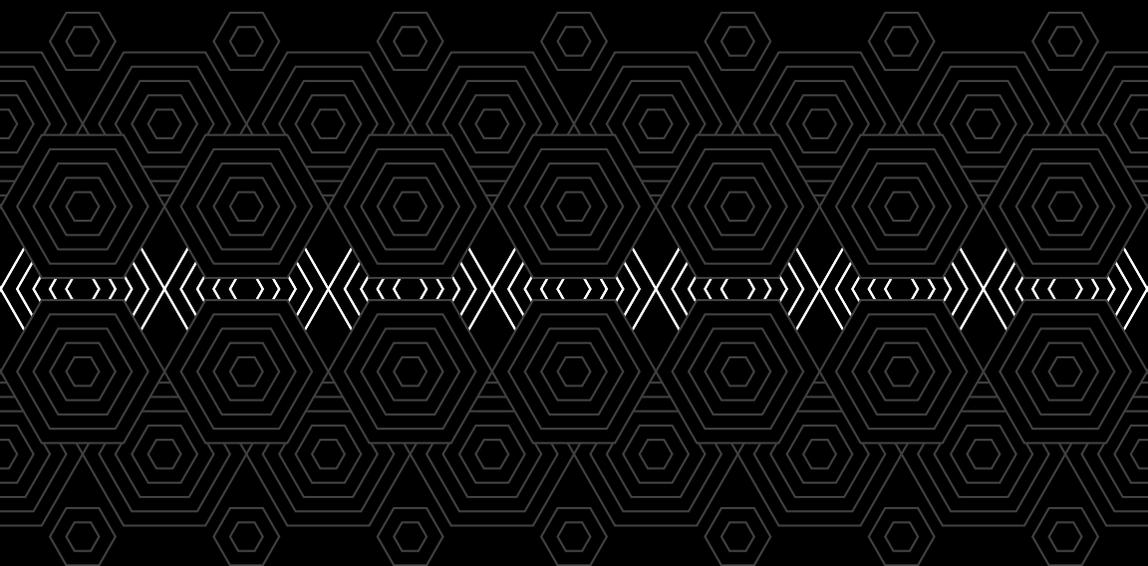
- [1] A. Amorós Molina, D. Helldén, T. Alfvén, M. Niemi, K. Leander, H. Nordensstedt, C. Rehn, R. Ndejo, R. Wanyenze y O. Biermann. Integrating the United

- Nations sustainable development goals into higher education globally: a scoping review, *Global health action*: **16** (2023), 2190649.
- [2] R. Bardan. *Temperatures Rising: NASA Confirms 2024 Warmest Year on Record*. <https://www.nasa.gov/news-release/temperatures-rising-nasa-confirms-2024-warmest-year-on-record/>. Último acceso 01/07/2025.
- [3] N. Karjanto. Mathematical modeling for sustainability: How can it promote sustainable learning in mathematics education, *Arxiv*: (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.13663>
- [4] F. M. Moreno Pino, R. Jiménez Fontana, D. Romero Portillo. El desarrollo de competencias para la sostenibilidad en el área de didáctica de las matemáticas, *Avances de Investigación en Educación Matemática*: **23** (2023), 37–60.
- [5] NBC New York. *It's so hot that an NYC bridge literally stopped working*. <https://www.nbcnewyork.com/news/its-so-hot-that-a-nyc-bridge-literally-stopped-working/5576418/>. Último acceso 01/07/2025.
- [6] Objetivos de Desarrollo Sostenible. <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/>. Último acceso 01/07/2025.
- [7] N. Ortigosa. Implementación de los Objetivos de Desarrollo Sostenible en asignaturas de ciencias básicas: experiencia en la asignatura Cálculo, *Proceedings Congreso In-Red*: (2023), 261–269.
- [8] F. Sánchez Carracedo, J. Segalàs, J. Cabré, J. Climent, D. López, C. Martín y E. Vidal. El proyecto EDINSOST: inclusión de los ODS en la educación superior, *Revista Española de Desarrollo y Cooperación*: **41** (2023), 67–81.

AFILIACIÓN

Nuria Ortigosa Araque - Departamento de Matemática Aplicada (autora de correspondencia: nuorar@upvnet.upv.es), Universitat Politècnica de València

EN ESTE LIBRO SE RECOGEN LOS RESÚMENES DE LAS CONTRIBUCIONES QUE SE HAN PRESENTADO EN LAS XIII JORNADAS DE INNOVACIÓN DOCENTE ORGANIZADAS POR EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA DE LA UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA. EL OBJETIVO ES DIVULGAR Y RECONOCER LAS EXPERIENCIAS Y METODOLOGÍAS LLEVADAS A CABO POR PARTE DEL PROFESORADO DE ESTE DEPARTAMENTO Y DE DEPARTAMENTOS AFINES, ESPECIALMENTE EN TEMAS RELACIONADOS CON EL USO DE DINÁMICAS COLABORATIVAS, LA INTEGRACIÓN DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA Y LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE EN ASIGNATURAS MATEMÁTICAS.



dma

Departamento
de Matemática
Aplicada

