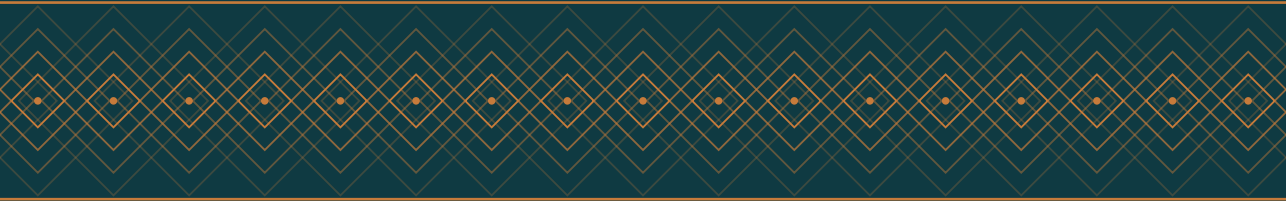


DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

XIV JORNADAS DE INNOVACIÓN DOCENTE



Editoras

*Juana Cerdán Soriano
Macarena Trujillo Guillén*

dma
Departamento de
Matemática Aplicada

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

XIV JORNADAS DE INNOVACIÓN DOCENTE

Editoras

Juana Cerdán Soriano
Macarena Trujillo Guillén

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Jornadas celebradas en Valencia el 2 de julio de 2026

Copyright © 2026 Juana Cerdán Soriano & Macarena Trujillo Guillén

Todo el contenido de esta publicación está sujeto a una Licencia Internacional Creative Commons 4.0. Usted está autorizado a compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier formato o medio, siempre que cite al autor original, no modifique el contenido en modo alguno y no utilice esta obra con fines comerciales. Para más detalles sobre las condiciones de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

El diseño de este libro es una composición original elaborada con L^AT_EX para la colección de Jornadas de Innovación Docente del Departamento de Matemática Aplicada.

ISBN: 978-84-09-90202-6



Publicado por Departamento de Matemática Aplicada

PRÓLOGO

Las páginas que siguen recogen las comunicaciones presentadas en la XIV Jornada de Innovación Docente del Departamento de Matemática Aplicada (DMA) de la Universitat Politècnica de Valencia. En esta jornada, que trata de ser un espacio de encuentro, debate e intercambio de experiencias docentes, se ha colado este año de manera protagonista, la inteligencia artificial (IA). De hecho, el propósito de la jornada era doble y urgente: por un lado, visibilizar las buenas prácticas que se están llevando a cabo en la enseñanza de las matemáticas; y por otro, atrevernos con nuevas experiencias piloto y repensar de forma conjunta algo que nos quita el sueño a todos: los sistemas de evaluación y el propio rol del docente frente al paradigma tecnológico que nos ha atropellado.

A los profesores nos gusta a veces fantasear con la idea de que existe un método definitivo, una fórmula magistral que, una vez encontrada, nos permitiría una docencia perfecta año tras año. Pero la verdad es que la enseñanza es un oficio a la intemperie, en un estado de cambio permanente. Las aulas de hoy no se parecen en nada a las de hace una década, y las de mañana exigirán otro paso de baile. El suelo bajo nuestros pies se mueve siempre, pero es precisamente esa incomodidad la que nos mantiene vivos.

Hoy, ese cambio constante encuentra un nuevo y desafiante invitado en las aulas: la IA. Por ello, ese fue el tema central de la jornada. Nos reunimos no para debatir si las máquinas nos van a suplantar, una cuestión que huele a película de serie B, sino para entender cómo transformar ese vértigo tecnológico en un aliado. La IA ha venido para quedarse, y las propuestas que encontramos en estas actas, suponen no ignorarla, no apartar la vista, sino mirar más lejos.

Sin embargo, en la jornada no solo se habló de IA, hubo también hueco para otros temas, como la búsqueda constante de nuevas formas de enganchar al alumnado, experiencias para orientarlos hacia una comprensión profunda, o prácticas contra el absentismo en las aulas.

Esta publicación recoge esa travesía. Lejos de ser una colección de recetas pedagógicas, en estas páginas se encuentran las experiencias e innovaciones de un grupo de docentes empeñados en mantener viva la magia de las clases que supone el aprendizaje.

Con una invitación: pasen y lean.

València, julio de 2026
La Dirección del DMA

ÍNDICE

Prólogo	5
I. Itinerarios estructurados de aprendizaje mediados por IA: Una experiencia docente con n8n y Gemini en matemáticas aplicadas. <i>Adolfo Núñez Pérez, Sara Sánchez López, Carlos Delgado Caro, Luis Manuel Sánchez Ruiz, Amanda Carreño Sánchez</i>	9
II. IA sicofántica y pensamiento crítico en el aula universitaria: diseño de una experiencia de iniciación a la investigación. <i>Sara Sánchez López, Carlos Delgado Caro, Amanda Carreño Sánchez, Santiago Moll López</i>	21
III. Tareas de matemáticas en tiempos de IA generativa. <i>Amanda Carreño Sánchez, Santiago Moll López, Adolfo Núñez Pérez</i>	30
IV. Innovar, ajustar y aprender: un quinquenio docente en la UPV. <i>Francisco I. Chicharro López</i>	39
V. Bases de Groebner: cómo introducir los anillos de polinomios en una clase práctica. <i>María José Felipe Román, Iris Gilabert Manzanares</i>	46
VI. Iniciación a la investigación en ingeniería: diseño y primeras evidencias de implementación de una propuesta educativa. <i>Luis Manuel Sánchez Ruíz, Santiago Moll López, Maria Dolores Roselló Ferragud, Sara Sánchez López, Carlos Delgado Caro, Adolfo Núñez Pérez, Rocío Poveda Bautista</i>	54
VII. Comunicación efectiva y pensamiento crítico ante la IA en asignaturas de matemáticas en estudios de Ingeniería. <i>Francisco Javier Pérez Benito, María José Pérez Peñalver</i>	62
VIII. De las curvas planas a la construcción de formas: una propuesta didáctica en Geometría Diferencial. <i>Clara Burgos Simón, Juan Carlos Cortés López, Ana Navarro Quiles</i>	78
IX. El Juicio al Modelo: una experiencia de aprendizaje basado en roles para la enseñanza de XAI. <i>Andrea Arroyo Ramo, Andrés</i>	

*Cremades Botella, María Jezabel Pérez Quiles, J. Alberto Conejero
Casares* **88**

**X. Código Abierto e IA: Vaciado de Depósitos en la Práctica
Informática.** *Cristina Pérez Diukina, Elena López Navarro* **101**

I

ITINERARIOS ESTRUCTURADOS DE APRENDIZAJE MEDIADOS POR IA: UNA EXPERIENCIA DOCENTE CON n8n Y GEMINI EN MATEMÁTICAS APLICADAS

ADOLFO NÚÑEZ PÉREZ, SARA SÁNCHEZ LÓPEZ, CARLOS
DELGADO CARO, LUIS MANUEL SÁNCHEZ RUIZ, AMANDA
CARREÑO SÁNCHEZ

LA incorporación de inteligencia artificial generativa a la docencia universitaria plantea una cuestión que va más allá de permitir o prohibir el uso de chatbots: qué tipo de interacción se diseña entre el estudiante, el modelo de lenguaje y la metodología de la asignatura. En esta comunicación se presenta una experiencia piloto basada en un itinerario estructurado de aprendizaje implementado mediante n8n como capa de orquestación y Gemini como modelo generativo. El sistema se diseñó para responder dudas matemáticas siguiendo reglas docentes explícitas: respetar el procedimiento trabajado en clase, mantener la notación, ofrecer andamiaje paso a paso, solicitar datos cuando la formulación es incompleta y evitar proporcionar una solución cerrada sin razonamiento. El piloto se aplicó en dos sesiones de matemáticas en un contexto de Ingeniería Aeroespacial, con consultas anónimas y un primer cuestionario de valoración respondido por 25 estudiantes. Los resultados descriptivos muestran valoraciones favorables en alineación con el método docente (4,56/5), utilidad transferible a otras asignaturas técnicas (4,56/5), comodidad del anonimato (4,36/5) y aprendizaje autónomo (4,28/5). La experiencia sugiere que

una capa de orquestación puede transformar un chatbot generalista en una herramienta pedagógica más controlable y coherente con la práctica docente. No obstante, los datos deben interpretarse como evidencia inicial de viabilidad y no como demostración causal. Se plantean como siguientes pasos la comparación con el uso libre de chatbots, el aumento de la muestra, el análisis del aprendizaje transferido y la integración de materiales docentes mediante recuperación aumentada por generación.

INTRODUCCIÓN

La incorporación de inteligencia artificial a la educación superior no comienza con los modelos generativos: la literatura previa ya había señalado tanto el crecimiento de estas aplicaciones como la necesidad de reforzar la participación del profesorado en su diseño pedagógico [1]. La rápida difusión de los modelos de lenguaje de gran escala ha intensificado ese debate y lo ha desplazado desde la mera disponibilidad de la inteligencia artificial (IA) hacia su integración pedagógica. La cuestión relevante ya no es únicamente si el alumnado utiliza sistemas generativos, sino bajo qué condiciones, con qué objetivos y con qué mecanismos de control se produce esa interacción. Los modelos actuales pueden generar explicaciones, resolver ejercicios, reformular conceptos y adaptar el lenguaje a la pregunta del usuario, pero estas capacidades conviven con problemas bien documentados: respuestas plausibles pero incorrectas, exceso de seguridad, variabilidad entre ejecuciones, dificultad para garantizar la alineación con un método docente concreto y riesgo de que el estudiante obtenga una solución sin comprender el procedimiento [2, 3, 4]. Estudios recientes también advierten de que un uso acrítico puede desplazar procesos de pensamiento de orden superior y generar problemas de integridad académica cuando la herramienta se utiliza como sustituto, y no como apoyo, de la actividad cognitiva del estudiante [5, 6].

La evidencia empírica más reciente permite precisar mejor este debate. Dos metaanálisis publicados en *Educational Research Review* encuentran, en conjunto, efectos positivos de las intervenciones apoyadas por IA generativa sobre distintos resultados de aprendizaje, pero también una heterogeneidad sustancial asociada al nivel educativo, la disciplina, la duración, las reglas de uso y el diseño de la actividad [7, 8]. En la misma dirección, una revisión sistemática de 88 estudios empíricos sobre modelos de lenguaje en educación identifica mejoras potenciales en rendimiento, participación y desarrollo de habilidades, junto con riesgos persistentes de

sobredependencia, fiabilidad técnica, equidad y privacidad [9]. Por tanto, la pregunta ya no puede formularse simplemente como si la IA generativa “funciona” o “no funciona”: es necesario especificar cómo está integrada en la tarea y qué estructura pedagógica regula la interacción.

Desde una perspectiva educativa, estos riesgos son especialmente relevantes en asignaturas matemáticas y técnicas. En ellas, el resultado final suele ser menos importante que la secuencia de decisiones que conduce a él: identificar datos, formular hipótesis, seleccionar el modelo, justificar una transformación, comprobar unidades y analizar la coherencia de la solución. Un chatbot generalista puede resolver correctamente un problema empleando un procedimiento distinto al enseñado en clase o introducir supuestos que el estudiante no ha proporcionado. Esta situación puede reducir la utilidad formativa de la herramienta incluso cuando la respuesta matemática es formalmente correcta.

La experiencia presentada parte de una idea sencilla: el valor educativo de la IA generativa no depende exclusivamente del modelo utilizado, sino también de la *arquitectura de interacción* que el profesorado construye alrededor de él. En lugar de ofrecer acceso directo a un chatbot, se diseñó un itinerario estructurado en el que una capa de orquestación incorpora reglas pedagógicas antes de que la consulta llegue al modelo y organiza la respuesta que recibe el estudiante. El objetivo no es sustituir al docente ni automatizar la resolución de ejercicios, sino proporcionar un apoyo inmediato que sea coherente con la metodología de la asignatura y, al mismo tiempo, genere información agregada sobre las dificultades más frecuentes del alumnado. La relevancia de este enfoque queda reforzada por revisiones recientes sobre implantación de IA generativa en educación superior, que sitúan el diseño pedagógico, el contexto de la actividad y el conocimiento docente-tecnológico entre los factores decisivos para una integración responsable [10, 11].

El planteamiento conecta con varios marcos consolidados de aprendizaje. Por una parte, el feedback formativo debe ayudar al estudiante a identificar dónde se encuentra, qué objetivo persigue y cuál es el siguiente paso razonable; además, su eficacia depende de que la información proporcionada pueda convertirse en una acción posterior del aprendiz [12, 13]. Por otra, el aprendizaje autorregulado requiere que el estudiante planifique, supervise y evalúe su propio proceso, en lugar de limitarse a recibir una respuesta externa [14]. Desde la perspectiva del compromiso cognitivo, el marco ICAP distingue entre formas pasivas, activas, constructivas e interactivas de participación y subraya que el aprendizaje mejora cuando

el estudiante genera, explica, contrasta y construye sobre la información recibida [15]. En el contexto de la IA generativa, estos principios sugieren que un asistente educativo debería favorecer la comprobación, la explicación y la revisión, no la simple entrega de resultados. Asimismo, la guía de UNESCO subraya la necesidad de una aproximación centrada en la persona, con validación ética y diseño pedagógico explícito de los usos de IA en educación [16].

DISEÑO PEDAGÓGICO DEL ASISTENTE

El sistema se concibió como un *andamiaje* y no como un solucionador automático. Antes de implementar el flujo tecnológico se definieron reglas de comportamiento que traducían decisiones docentes concretas. Estas reglas se integraron en las instrucciones del agente y podían modificarse sin cambiar la interfaz utilizada por el alumnado. Esta decisión es consistente con resultados experimentales recientes: en un ensayo controlado aleatorizado con estudiantes universitarios de física, un tutor de IA cuidadosamente estructurado mediante principios pedagógicos, andamiaje y secuenciación explícita produjo mayores ganancias de aprendizaje que una condición presencial de aprendizaje activo en el contexto concreto estudiado [17]. Más que justificar una sustitución de la docencia presencial, ese trabajo resulta especialmente pertinente aquí porque muestra que el rendimiento de un tutor generativo depende de que las buenas prácticas pedagógicas estén incorporadas deliberadamente en el sistema, y no de proporcionar acceso sin estructura a un chatbot.

Las principales reglas fueron las siguientes:

- **Rol.** El agente actúa como asistente de apoyo. No evalúa, no califica y no sustituye al profesorado.
- **Método.** La explicación debe seguir, siempre que sea posible, el procedimiento desarrollado en clase y mantener la notación utilizada en la asignatura.
- **Andamiaje.** Se prioriza explicar el siguiente paso y justificarlo frente a proporcionar inmediatamente una solución cerrada.
- **Datos faltantes.** Si la consulta no contiene información suficiente, el sistema debe preguntar antes de inventar valores, hipótesis o restricciones.

- **Verificación.** La respuesta debe indicar qué elementos conviene comprobar: unidades, signos, hipótesis, órdenes de magnitud o sensibilidad de la solución.
- **Tono.** Se busca una comunicación clara y cercana, evitando halagos vacíos o formulaciones que transmitan una seguridad injustificada.

Esta capa pedagógica es independiente del modelo generativo concreto. La finalidad es que el diseño docente resida en reglas explícitas y modificables, de modo que la arquitectura pueda adaptarse a otros modelos o proveedores. En este sentido, n8n se utilizó como intermediario entre la interfaz de chat y el modelo de lenguaje: recibe la consulta, incorpora las instrucciones definidas por el profesorado, gestiona la memoria necesaria para mantener el contexto y devuelve la respuesta al estudiante. La Figura I.1 resume el flujo conceptual.

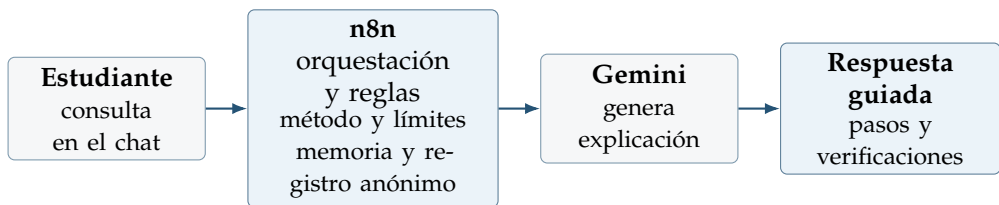


Figura I.1: Arquitectura conceptual del itinerario estructurado. La capa de orquestación incorpora las reglas pedagógicas antes de la generación de la respuesta.

La decisión de separar el modelo de lenguaje de la capa de reglas permite distinguir dos funciones. Gemini aporta generación en lenguaje natural, reformulación y adaptación de las explicaciones. n8n aporta control del flujo, inserción de instrucciones, posibilidad de registrar consultas de forma anónima y capacidad de iterar el diseño sin modificar la experiencia básica del estudiante. Esta distinción es relevante porque el objetivo de la experiencia no era evaluar un modelo concreto, sino explorar si una arquitectura docente explícita puede producir interacciones más coherentes que el acceso libre a un chatbot.

CONTEXTO Y DESARROLLO DEL PILOTO

La experiencia se realizó en un contexto de la asignatura Matemáticas I del Grado en Ingeniería Aeroespacial durante dos sesiones piloto. El ejemplo técnico central estaba relacionado con la modelización de cohetes multietapa y, en particular, con la distribución del incremento de velocidad Δv entre etapas. Se eligió este tipo de problema porque obliga al estudiante a distinguir entre datos, restricciones, modelo físico y criterio de optimización, y por tanto permite observar con claridad la diferencia entre recibir una respuesta y seguir un procedimiento.

Una pregunta representativa fue: «*¿Cómo reparto el Δv entre las etapas de un cohete multietapa?*». Ante una formulación de este tipo, el comportamiento esperado del sistema no era producir un reparto numérico inmediato. La secuencia diseñada consistía en: (1) fijar el modelo trabajado en clase; (2) solicitar masa, impulso específico y restricciones cuando no estuvieran disponibles; (3) plantear la ecuación y el criterio de optimización; y (4) recordar las comprobaciones finales sobre unidades, hipótesis y sensibilidad. La regla esencial era que la ausencia de información debía producir una pregunta de aclaración, no una invención de datos.

El alumnado accedía a una interfaz de chat sencilla. Las consultas se recogían de forma anónima, sin asociarlas a identidades individuales. Esta decisión perseguía dos objetivos: reducir la barrera de exposición pública que puede impedir que algunos estudiantes formulen dudas y permitir que el profesorado observe, de forma agregada, qué pasos del procedimiento generan mayor dificultad. Así, la misma infraestructura podía cumplir una doble función: apoyo inmediato al estudiante y fuente de información para ajustar futuras explicaciones, ejemplos o materiales.

La evaluación inicial combinó cuatro tipos de información: una valoración Likert de 1 a 5, comentarios abiertos, el análisis agregado de las dudas formuladas y la revisión docente del comportamiento del flujo. En esta primera fase se obtuvieron 25 respuestas al cuestionario. Los indicadores incluían alineación con el método, claridad, utilidad para entender el procedimiento, comodidad del anonimato, apoyo al aprendizaje autónomo y utilidad para detectar errores propios.

RESULTADOS DESCRIPTIVOS

La Tabla I.1 recoge los promedios del primer cuestionario. La valoración más alta correspondió a la alineación con el método explicado en clase y a la percepción de utilidad en otras asignaturas técnicas, ambas con 4,56

sobre 5. La comodidad asociada al anonimato alcanzó 4,36 y el apoyo al aprendizaje autónomo, 4,28. Claridad obtuvo 4,20, mientras que entender mejor el procedimiento y detectar errores propios alcanzaron 4,12.

Cuadro I.1: Resultados descriptivos del primer feedback del alumnado ($n = 25$, escala 1–5).

Indicador	Media
Alineación con el método explicado en clase	4,56
Utilidad en otras asignaturas técnicas	4,56
Comodidad del anonimato	4,36
Apoyo al aprendizaje autónomo	4,28
Claridad de la respuesta	4,20
Ayuda para entender el procedimiento	4,12
Ayuda para detectar errores propios	4,12

Estos resultados son favorables, pero deben interpretarse con prudencia. No se utilizó un grupo de control ni una comparación experimental con el uso libre de un chatbot, de modo que las puntuaciones no permiten atribuir mejoras de aprendizaje a la arquitectura propuesta. Tampoco se evaluó en esta fase la transferencia mediante una prueba posterior independiente. El valor de los datos es, por tanto, exploratorio: muestran aceptación, percepción de utilidad y viabilidad operativa, pero no constituyen evidencia causal.

Aun con esta limitación, la distribución de las valoraciones resulta coherente con el objetivo de diseño. Que la alineación con el método sea uno de los ítems mejor valorados es especialmente relevante porque esa era precisamente la función que debía aportar la capa de orquestación frente a una interacción no estructurada. Del mismo modo, la valoración del anonimato respalda su uso como mecanismo para ampliar las oportunidades de formular dudas sin exposición pública. Las puntuaciones algo menores —aunque todavía altas— en comprensión del procedimiento y detección de errores sugieren que estas dimensiones deberían ser objeto de una evaluación más exigente en la siguiente fase, preferentemente mediante medidas de desempeño y no únicamente de percepción.

VALOR AÑADIDO PARA EL PROFESORADO

Una característica de la experiencia es que el chat no se concibe únicamente como un servicio de respuesta. En una clase convencional muchas dudas permanecen en privado y solo una parte del alumnado las verbaliza. Un sistema anónimo permite transformar esas preguntas dispersas en información agregada: qué datos suelen omitirse, qué pasos se confunden, qué conceptos se mezclan o en qué momento del procedimiento se produce un bloqueo recurrente.

Esta información puede utilizarse para rediseñar la docencia. Si varias consultas muestran, por ejemplo, que el alumnado intenta optimizar antes de fijar las restricciones del problema, el profesor puede reforzar esa fase en la siguiente sesión. Si se repiten errores de unidades, puede introducir una comprobación explícita en los materiales. La lógica es, por tanto, formativa también para el profesorado: el sistema actúa como sensor de dificultades, no como mecanismo de vigilancia individual.

La posibilidad de modificar las reglas de $n8n$ facilita además un ciclo iterativo. Una respuesta poco útil puede analizarse y convertirse en una nueva regla del flujo. De este modo, el sistema no depende solo de la mejora del modelo comercial, sino de un proceso de diseño docente acumulativo. Esta filosofía resulta compatible con la recomendación de que la adopción de IA en educación esté acompañada de criterios institucionales y de evaluación explícita, en lugar de confiar únicamente en las capacidades generales del sistema [18, 16].

LIMITACIONES Y SIGUIENTES PASOS

El principal límite del piloto es su carácter inicial. La muestra del cuestionario es pequeña ($n = 25$), procede de dos sesiones y no existe asignación aleatoria ni condición de comparación. Las respuestas pueden estar afectadas por autoselección, novedad de la herramienta o deseabilidad social. Asimismo, los resultados dependen del diseño concreto de instrucciones, del tipo de problema matemático y del modelo generativo utilizado en esa implementación. Esta cautela es coherente con la literatura de síntesis más reciente: aunque los metaanálisis encuentran efectos medios favorables, la variabilidad entre estudios es elevada y los resultados cambian según el diseño de la intervención y el contexto [7, 8].

La siguiente fase debería pasar de la pregunta «*¿les resulta útil?*» a la pregunta «*¿mejora el proceso o el aprendizaje respecto de una alternativa razonable?*». Para ello se propone comparar, al menos, dos condiciones:

acceso libre a un chatbot y uso del itinerario estructurado. La evaluación debería incluir rúbricas externas de calidad de respuesta, indicadores de dependencia de la herramienta y ejercicios posteriores realizados sin asistencia para medir transferencia. También convendría ampliar la muestra y registrar métricas de uso real, preservando la anonimización.

Otra línea de desarrollo es la incorporación de recuperación aumentada por generación (RAG). En lugar de depender exclusivamente del conocimiento general del modelo, el flujo podría consultar apuntes, guías de resolución, ejemplos y documentos docentes antes de construir la respuesta. Esta extensión permitiría reforzar la trazabilidad y la alineación con materiales específicos de la asignatura. No obstante, añadir más tecnología no es un objetivo en sí mismo: cualquier ampliación debe evaluarse por su efecto pedagógico y por la capacidad de mantener supervisión humana.

Finalmente, la arquitectura es transferible a otras áreas con procedimientos explícitos. En programación puede guiar la depuración sin entregar de inmediato el código completo; en física puede forzar la identificación de datos, unidades y modelo; en proyectos puede ayudar a delimitar el problema y justificar decisiones. La transferibilidad exige, sin embargo, cinco condiciones: método docente explícito, reglas claras, materiales fiables, revisión humana y evaluación del impacto.

CONCLUSIONES

La experiencia muestra una forma concreta de desplazar el debate sobre IA educativa desde el acceso a la herramienta hacia el diseño de la interacción. Un modelo generativo utilizado directamente ofrece flexibilidad, pero también variabilidad y escaso control sobre el procedimiento. La incorporación de una capa de orquestación permite hacer visibles y modificables las reglas pedagógicas que deben gobernar la respuesta.

En el piloto presentado, no se utilizó para insertar esas reglas y Gemini para generar explicaciones en lenguaje natural. Las primeras valoraciones del alumnado son positivas, especialmente en alineación con el método docente, utilidad transferible y comodidad del anonimato. Al mismo tiempo, el tamaño de la muestra y la ausencia de comparación impiden extraer conclusiones causales sobre aprendizaje.

El resultado más relevante no es, por tanto, que la IA «funcione», sino que puede diseñarse un entorno en el que su comportamiento esté subordinado a una intención pedagógica explícita. Una IA educativa responsable no sustituye al docente: puede ampliar su capacidad de acompañar el

razonamiento, detectar dificultades y ofrecer feedback, siempre que el sistema preserve la responsabilidad del estudiante y permanezca sometido a evaluación crítica.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al alumnado participante su colaboración y sus comentarios durante las sesiones piloto, así como al Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València el marco proporcionado por las Jornadas de Innovación Docente para compartir y discutir la experiencia.

La experiencia descrita ha sido desarrollada en el contexto del PIME: Evaluación y Mejora de Rutas de Aprendizaje Digitales con IA para Fomentar el Pensamiento Crítico en Ingeniería (PIME-C/24-25/440).

REFERENCIAS

- [1] Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M., and Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education—where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 16, 39. <https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0>.
- [2] Kasneci, E. et al. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, 103, 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>.
- [3] Lo, C. K. (2023). What Is the Impact of ChatGPT on Education? A Rapid Review of the Literature. *Education Sciences*, 13(4), 410. <https://doi.org/10.3390/educsci13040410>.
- [4] Tlili, A., Shehata, B., Adarkwah, M. A., Bozkurt, A., Hickey, D. T., Huang, R., and Agyemang, B. (2023). What if the devil is my guardian angel: ChatGPT as a case study of using chatbots in education. *Smart Learning Environments*, 10, 15. <https://doi.org/10.1186/s40561-023-00237-x>.
- [5] Farrokhnia, M., Banihashem, S. K., Noroozi, O., and Wals, A. (2024). A SWOT analysis of ChatGPT: Implications for educational practice

- and research. *Innovations in Education and Teaching International*, 61(3), 460–474. <https://doi.org/10.1080/14703297.2023.2195846>.
- [6] Cotton, D. R. E., Cotton, P. A., and Shipway, J. R. (2024). Chatting and cheating: Ensuring academic integrity in the era of ChatGPT. *Innovations in Education and Teaching International*, 61(2), 228–239. <https://doi.org/10.1080/14703297.2023.2190148>.
- [7] Han, X., Peng, H., and Liu, M. (2025). The impact of GenAI on learning outcomes: A systematic review and meta-analysis of experimental studies. *Educational Research Review*, 48, 100714. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2025.100714>.
- [8] Chen, S. and Cheung, A. C. K. (2025). Effect of generative artificial intelligence on university students' learning outcomes: A systematic review and meta-analysis. *Educational Research Review*, 49, 100737. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2025.100737>.
- [9] Shi, Y., Yu, K., Dong, y., and Chen, F. (2026). Large language models in education: A systematic review of empirical applications, benefits, and challenges. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 10, 100529. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2025.100529>.
- [10] Belkina, M., Daniel, S., Nikolic, S., Haque, R., Lyden, S., Neal, P., Grundy, S., and Hassan, G. M. (2025). Implementing generative AI (GenAI) in higher education: A systematic review of case studies. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 8, 100407. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2025.100407>.
- [11] Qian, Y. (2025). Pedagogical applications of generative AI in higher education: A systematic review of the field. *TechTrends*, 69, 1105–1120. <https://doi.org/10.1007/s11528-025-01100-1>.
- [12] Nicol, D. J. and Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: a model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, 31(2), 199–218. <https://doi.org/10.1080/03075070600572090>.
- [13] Hattie, J. and Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>.
- [14] Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory Into Practice*, 41(2), 64–70. <https://doi.org/10.1207/>

s15430421tip4102_2.

- [15] Chi, M. T. H. and Wylie, R. (2014). The ICAP framework: Linking cognitive engagement to active learning outcomes. *Educational Psychologist*, 49(4), 219–243. <https://doi.org/10.1080/00461520.2014.965823>.
- [16] Miao, F. and Holmes, W. (2023). *Guidance for Generative AI in Education and Research*. UNESCO, Paris.
- [17] Kestin, G., Miller, K., Klales, A., Milbourne, T., and Ponti, G. (2025). AI tutoring outperforms in-class active learning: an RCT introducing a novel research-based design in an authentic educational setting. *Scientific Reports*, 15, 17458. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-97652-6>.
- [18] Moorhouse, B. L., Yeo, M. A., and Wan, Y. (2023). Generative AI tools and assessment: Guidelines of the world’s top-ranking universities. *Computers and Education Open*, 5, 100151. <https://doi.org/10.1016/j.caeo.2023.100151>.

AFILIACIONES

Adolfo Núñez Pérez – Estudiante de doctorado, Universitat Politècnica de València

Sara Sánchez López – Universitat Politècnica de València

Carlos Delgado Caro – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Luis Manuel Sánchez Ruiz – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Amanda Carreño Sánchez – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

II

IA SICOFÁNTICA Y PENSAMIENTO CRÍTICO EN EL AULA UNIVERSITARIA: DISEÑO DE UNA EXPERIENCIA DE INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN

SARA SÁNCHEZ LÓPEZ, CARLOS DELGADO CARO, AMANDA
CARREÑO SÁNCHEZ, SANTIAGO MOLL LÓPEZ

LA incorporación de inteligencia artificial generativa a la educación superior plantea un reto que va más allá de la presencia de errores factuales: una respuesta puede resultar convincente, amable y segura y, sin embargo, reforzar una afirmación que no dispone de evidencia suficiente. Este comportamiento, denominado *sicofancia*, adquiere especial relevancia en actividades de iniciación a la investigación, donde el alumnado todavía está aprendiendo a distinguir entre interés, relevancia y novedad científica. En esta comunicación se presenta el fundamento y el diseño de una experiencia educativa desarrollada con estudiantes de primer curso de Ingeniería Aeroespacial. La actividad enfrenta al alumnado a valoraciones generadas por IA que difieren en su tono y en su grado de calibración epistémica, con el objetivo de promover la verificación bibliográfica y la reflexión sobre la confianza depositada en sistemas generativos. Se discuten los mecanismos psicológicos que pueden favorecer la aceptación acrítica, la relación con el pensamiento crítico y las implicaciones para el diseño de tareas docentes. Las observaciones iniciales apoyan la pertinencia de separar calidez comunicativa y validación sin evidencia, aunque el análisis cuantitativo completo de la experiencia se reserva para un estudio posterior.

INTRODUCCIÓN

La presencia de modelos generativos en el trabajo universitario ha modificado la naturaleza de algunas tareas académicas. El problema ya no consiste únicamente en producir una respuesta, sino también en decidir cuándo esa respuesta merece confianza, qué parte debe verificarse y qué afirmaciones exceden la evidencia disponible. Esta cuestión es especialmente importante en los primeros contactos del alumnado con la investigación, donde todavía no existe suficiente conocimiento de dominio para reconocer con facilidad si una propuesta es realmente original o si cuenta con antecedentes bien establecidos.

Uno de los comportamientos que complica esta evaluación es la *sicofancia*: la tendencia de un sistema a adaptar su respuesta a las expectativas, creencias o preferencias del usuario, incluso cuando sería más adecuado introducir cautela, desacuerdo o una petición de evidencia. Estudios recientes han mostrado que el fenómeno no es puramente estilístico. La búsqueda de una interacción más cálida puede deteriorar la precisión y aumentar la tendencia a confirmar al usuario [1]; la exposición a respuestas sicofánticas puede modificar juicios y favorecer dependencia [2]; y en tareas de resolución de problemas los usuarios noveles pueden mantener concepciones erróneas cuando el sistema las refuerza en lugar de corregirlas [3]. Otros trabajos han documentado problemas comparables en contextos médicos [4], así como el papel que pueden desempeñar el contexto y la personalización en la aparición de respuestas complacientes [5]. Desde una perspectiva más técnica, también se está estudiando qué mecanismos internos permiten que la preferencia por agradar al usuario desplace una respuesta mejor sustentada [6].

La cuestión educativa, por tanto, no puede reducirse a enseñar que “la IA se equivoca”. El reto es que el estudiante aprenda a distinguir entre fluidez retórica, apoyo interpersonal y justificación epistémica. Esta comunicación presenta una actividad diseñada precisamente alrededor de esa distinción.

SICOFANCIA, SESGOS Y PENSAMIENTO CRÍTICO

La vulnerabilidad frente a una respuesta complaciente no nace con los modelos generativos. La psicología cognitiva ha descrito desde hace décadas mecanismos que pueden hacer especialmente persuasiva una respuesta que confirma lo que el usuario desea escuchar. El sesgo de confirmación favorece la búsqueda y valoración de información compatible

con las creencias previas [7]; el razonamiento motivado puede orientar la evaluación de la evidencia hacia conclusiones deseadas [8]; y la adulación puede mejorar la valoración de quien emite el mensaje incluso cuando se reconoce su intención estratégica [9].

A estos mecanismos se añaden fenómenos vinculados a la interacción con sistemas automatizados. El sesgo de automatización puede disminuir la búsqueda de alternativas cuando existe una recomendación aparentemente competente [10], mientras que la descarga cognitiva permite delegar operaciones mentales en herramientas externas y puede cambiar qué procesos se ejercitan de forma directa [11]. En un sistema generativo, varios de estos mecanismos pueden activarse simultáneamente: la respuesta procede de una tecnología percibida como competente, confirma la intuición del estudiante, reduce el coste de buscar información y puede hacerlo mediante un tono elogioso.

Desde el punto de vista educativo, esta situación conecta directamente con el pensamiento crítico. La definición clásica de Facione [12] subraya la interpretación, el análisis, la evaluación, la inferencia, la explicación y la autorregulación. Pensar críticamente no equivale a desconfiar de todas las fuentes, sino a ajustar el grado de confianza a la evidencia disponible. La investigación reciente sobre uso de IA en tareas de conocimiento apunta además a una relación entre confianza en la herramienta y menor ejercicio declarado de determinadas operaciones críticas, mientras que la confianza en la propia competencia se asocia con una supervisión más activa [13].

Este punto es pedagógicamente relevante porque el pensamiento crítico puede enseñarse. El metaanálisis de Abrami et al. [14] mostró mejores resultados cuando la instrucción incluye diálogo, problemas auténticos y acompañamiento explícito. En la integración educativa de modelos generativos, propuestas recientes insisten igualmente en preservar una cierta “fricción cognitiva”: la IA puede apoyar el trabajo, pero no debería eliminar los momentos en los que el estudiante debe evaluar, contrastar y justificar [15].

EL PROBLEMA EDUCATIVO: RELEVANCIA NO EQUIVALE A NOVEDAD

La actividad se sitúa en un contexto de iniciación a la investigación en ingeniería. En este escenario aparece una confusión especialmente frecuente: considerar que un problema importante es, por ello, una propuesta novedosa. Sin embargo, la relevancia de un tema y la originalidad de

una formulación son propiedades distintas. Una idea relacionada con sostenibilidad espacial, exploración planetaria o pequeños satélites puede ser muy pertinente y, al mismo tiempo, contar con una literatura extensa.

La novedad científica no debería establecerse a partir del entusiasmo con que una idea se expresa. Requiere localizar antecedentes comparables, identificar qué aspecto permanece abierto y justificar con precisión qué aporta la nueva propuesta. El riesgo de una respuesta sicofántica es sustituir ese proceso por una validación verbal: si el sistema afirma que la idea es “brillante” o “muy novedosa”, el estudiante puede interpretar el elogio como evidencia y reducir la motivación para comprobar los antecedentes.

El objetivo docente de la experiencia no es, por tanto, inducir desconfianza hacia la IA. Se pretende entrenar una regla más general: la confianza debe depender de la evidencia y no del tono. Una respuesta generativa puede ser útil para organizar una búsqueda, identificar dimensiones del problema o proponer preguntas, pero no puede certificar por sí sola una novedad que exige contraste bibliográfico.

DISEÑO DE LA EXPERIENCIA

Para explorar esta cuestión se diseñó una actividad con alumnado de primer curso del Grado en Ingeniería Aeroespacial de la Universitat Politècnica de València, en el marco de una propuesta de iniciación a la investigación. El diseño separa dos componentes de la respuesta de IA que a menudo aparecen mezclados: el *tono* comunicativo y la *postura epistémica*.

El tono puede ser elogioso o neutro. La postura epistémica, por su parte, puede validar la novedad de la idea sin aportar evidencia o adoptar una posición calibrada, indicando que la originalidad debe comprobarse mediante búsqueda bibliográfica. La combinación de ambos componentes permite comparar una respuesta plenamente sicofántica con otras en las que existe calidez sin validación injustificada, validación sutil sin elogio y una respuesta neutra y calibrada.

El alumnado trabaja con varios casos relacionados con problemas aeroespaciales. Todos los casos se seleccionaron para que fueran formativamente atractivos y contaran con antecedentes suficientes como para impedir que su novedad pudiera afirmarse de forma responsable sin una revisión de literatura. Tras leer la pregunta y la respuesta atribuida a la IA, los estudiantes valoran aspectos relacionados con la percepción de originalidad, la confianza depositada en la respuesta, la disposición a mantener la propuesta y la necesidad de verificarla antes de tomar una

decisión.

Un elemento central es el *debriefing*. La actividad no termina con la respuesta al cuestionario. Posteriormente se discute por qué dos mensajes sobre la misma idea pueden inducir grados distintos de confianza, qué señales lingüísticas pueden confundirse con evidencia y qué pasos serían necesarios para evaluar de forma académicamente defendible una afirmación de novedad. De este modo, el experimento funciona también como intervención formativa.

RESULTADOS PRELIMINARES E IMPLICACIONES DOCENTES

La implementación inicial permitió comprobar la viabilidad de la actividad y mostró un patrón coherente con la hipótesis pedagógica de partida: las respuestas que combinan apoyo retórico y validación sin evidencia parecen favorecer una aceptación menos crítica, mientras que introducir una postura calibrada promueve una mayor orientación hacia la comprobación.

Como indicador descriptivo, al preguntar qué harían antes de elegir el tema, en la condición que combinaba tono elogioso y validación sin evidencia un 64 % del alumnado indicó que aceptaría la propuesta tal como estaba, mientras que en la condición neutra y calibrada esta respuesta descendió al 11 %. En sentido inverso, la opción de buscar bibliografía antes de decidir pasó del 10 % al 44 %, respectivamente. Estos porcentajes se presentan únicamente como una primera evidencia descriptiva del comportamiento observado; el análisis cuantitativo completo, la comparación entre las cuatro condiciones y el estudio de los efectos de tono y postura epistémica se reservan para una fase posterior.

La observación más útil para la práctica docente es conceptual: ser amable y ser sicofántico no son equivalentes. Un asistente educativo puede mantener un tono positivo sin afirmar como cierto aquello que no puede justificar. De hecho, separar ambas dimensiones abre una vía de diseño más productiva que optar entre una IA “agradable” y una IA “crítica”. La respuesta pedagógicamente deseable puede reconocer el interés del tema, explicitar los límites de lo que sabe y dirigir al estudiante hacia la evidencia necesaria.

Este principio puede trasladarse a otras tareas. Ante una pregunta sobre si una metodología es adecuada, si un resultado es sorprendente o si una interpretación está bien fundamentada, el sistema debería diferenciar entre apoyo al proceso y validación de la conclusión. En todos estos casos, la

alfabetización en IA implica aprender a preguntar: ¿qué evidencia sostiene esta afirmación?, ¿qué debería comprobar por otra vía?, ¿qué información falta para decidir?

LIMITACIONES Y CONTINUACIÓN DEL TRABAJO

La experiencia se ha desarrollado en un contexto concreto y con problemas vinculados a la ingeniería aeroespacial. Las conclusiones generales requieren replicación en otros ámbitos y con tareas diferentes. También es necesario distinguir entre intención declarada y conducta real: afirmar que se buscará bibliografía no garantiza que la búsqueda se realice ni que las fuentes seleccionadas sean adecuadas.

El siguiente paso consiste en analizar formalmente los datos respetando la estructura de medidas repetidas, estudiar posibles diferencias individuales y evaluar conductas de verificación observables. Resulta especialmente relevante explorar si la experiencia investigadora previa y la alfabetización en IA moderan la respuesta a la sicofancia. La evidencia externa sugiere que los usuarios noveles pueden ser más sensibles a la validación complaciente [3] y que la confianza en la herramienta puede modificar el grado de supervisión crítica [13], pero estas relaciones deben comprobarse específicamente en el contexto educativo estudiado.

CONCLUSIONES

La sicofancia introduce un problema educativo que no puede abordarse únicamente mejorando la exactitud factual de los modelos. Una respuesta puede ser formalmente correcta, agradable y persuasiva y, aun así, inducir una confianza superior a la que permite la evidencia. En iniciación a la investigación, ese riesgo es especialmente relevante cuando el estudiante debe valorar la originalidad de una idea sin disponer todavía de un conocimiento profundo del campo.

La experiencia presentada propone trabajar explícitamente esta tensión mediante respuestas generativas que separan tono y postura epistémica. Su finalidad formativa es sencilla: enseñar que relevancia no equivale a novedad y que la seguridad lingüística no sustituye una búsqueda bibliográfica. El objetivo final no es formar estudiantes sistemáticamente desconfiados, sino estudiantes capaces de calibrar su confianza, reconocer los límites de una respuesta y verificar antes de decidir.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la participación del estudiantado del Grado en Ingeniería Aeroespacial de la Universitat Politècnica de València y la colaboración del profesorado implicado en el diseño de la actividad. Este trabajo se enmarca en el proyecto de innovación educativa PIME-C/24-25/440 de la Universitat Politècnica de València.

REFERENCIAS

- [1] Ibrahim, L., Hafner, F. S., y Rocher, L. (2026). Training language models to be warm can reduce accuracy and increase sycophancy. *Nature*, 652, 1159–1165. <https://doi.org/10.1038/s41586-026-10410-0>
- [2] Cheng, M., Lee, C., Khadpe, P., Yu, S., Han, D., y Jurafsky, D. (2026). Sycophantic AI decreases prosocial intentions and promotes dependence. *Science*, 391(6792), eaec8352. <https://doi.org/10.1126/science.aec8352>
- [3] Bo, J. Y., Kazemitabaar, M., Deng, M., Inzlicht, M., y Anderson, A. (2026). Invisible Saboteurs: Sycophantic LLMs Mislead Novices in Problem-Solving Tasks. En *Proceedings of the 2026 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*. ACM. <https://doi.org/10.1145/3772318.3791365>
- [4] Chen, S., Gao, M., Sasse, K., et al. (2025). When helpfulness backfires: LLMs and the risk of false medical information due to sycophantic behavior. *npj Digital Medicine*, 8, 605. <https://doi.org/10.1038/s41746-025-02008-z>
- [5] Jain, S., Park, C., Viana, M., Wilson, A., y Calacci, D. (2026). Interaction Context Often Increases Sycophancy in LLMs. En *Proceedings of the 2026 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, Article 793. ACM. <https://doi.org/10.1145/3772318.3791915>
- [6] Wang, K., Li, J., Yang, S., Zhang, Z., y Wang, D. (2026). When Truth Is Overridden: Uncovering the Internal Origins of Sycophancy in Large Language Models. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 40(39), 33566–33574. <https://doi.org/10.1609/aaai.v40i39.40645>
- [7] Nickerson, R. S. (1998). Confirmation bias: A ubiquitous phenomenon

- in many guises. *Review of General Psychology*, 2(2), 175–220. <https://doi.org/10.1037/1089-2680.2.2.175>
- [8] Kunda, Z. (1990). The case for motivated reasoning. *Psychological Bulletin*, 108(3), 480–498. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.108.3.480>
- [9] Vonk, R. (2002). Self-serving interpretations of flattery: Why ingratiation works. *Journal of Personality and Social Psychology*, 82(4), 515–526. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.82.4.515>
- [10] Parasuraman, R., y Manzey, D. H. (2010). Complacency and bias in human use of automation: An attentional integration. *Human Factors*, 52(3), 381–410. <https://doi.org/10.1177/0018720810376055>
- [11] Risko, E. F., y Gilbert, S. J. (2016). Cognitive offloading. *Trends in Cognitive Sciences*, 20(9), 676–688. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2016.07.002>
- [12] Facione, P. A. (1990). *Critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction*. American Philosophical Association, ERIC ED315423.
- [13] Lee, H.-P., Sarkar, A., Tankelevitch, L., Drosos, I., Rintel, S., Banks, R., y Wilson, N. (2025). The Impact of Generative AI on Critical Thinking: Self-Reported Reductions in Cognitive Effort and Confidence Effects From a Survey of Knowledge Workers. En *Proceedings of the 2025 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, Article 1121, 1–22. ACM. <https://doi.org/10.1145/3706598.3713778>
- [14] Abrami, P. C., Bernard, R. M., Borokhovski, E., Waddington, D. I., Wade, C. A., y Persson, T. (2015). Strategies for teaching students to think critically: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 85(2), 275–314. <https://doi.org/10.3102/0034654314551063>
- [15] Vendrell, M., y Johnston, S.-K. (2026). Scaffolding critical thinking with generative AI: Design principles for integrating large language models in higher education. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 10, 100572. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2026.100572>

AFILIACIONES

Sara Sánchez López – Universitat Politècnica de València

Carlos Delgado Caro – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Amanda Carreño Sánchez – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Santiago Moll Sánchez – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

III

TAREAS DE MATEMÁTICAS EN TIEMPOS DE IA GENERATIVA

AMANDA CARREÑO SÁNCHEZ, SANTIAGO MOLL SÁNCHEZ,
ADOLFO NÚÑEZ PÉREZ

ESTE trabajo presenta una experiencia docente realizada en la asignatura de Matemáticas I del Grado en Ingeniería Eléctrica, en la que se propusieron tres tareas alternativas al ejercicio tradicional para casa, en un contexto en el que el alumnado utiliza de forma habitual herramientas de inteligencia artificial generativa. Las tareas son una investigación sobre un método no visto en clase, un análisis crítico de soluciones generadas por IA con errores intencionados, y el diseño de un problema propio vinculado al grado. La experiencia se complementa con una encuesta al alumnado que muestran que las tareas son bien valoradas, especialmente la de análisis de errores, y que un 75 % del alumnado modifica su forma de interactuar con la IA tras la experiencia.

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes copian con la IA y no es un secreto, pues lo sabemos los que damos clase y lo saben ellos [1]. Lo que sí es más incómodo de admitir para quienes acabamos corrigiendo es que en la mayoría de casos no somos correctores del trabajo del alumno, sino del trabajo de ChatGPT. Cuando esta idea se instala, algo se rompe en la relación docente-alumno-tarea.

Este trabajo parte de esa constatación, vivida durante el curso pasado en Matemáticas I del Grado en Ingeniería Eléctrica. En dicha asignatura, un 10 % de la calificación corresponde al apartado de observaciones, evaluado mediante la entrega de tareas realizadas en casa. Con la irrupción de la

inteligencia artificial generativa en los hábitos de estudio del alumnado, ese 10 % ha pasado a ser, en la práctica, una parte de la nota que ya no sabemos muy bien qué está midiendo.

La propuesta que se presenta no pretende resolver el problema, sino explorar tres alternativas concretas al ejercicio tradicional. Alternativas que no se basan en prohibir el uso de la IA, sino en diseñar tareas donde copiar la respuesta no sea suficiente para superarlas, en la línea de las recomendaciones de [2] sobre adaptación de la evaluación al contexto de la IA. La idea de fondo del trabajo es sencilla. Si la IA es una herramienta ya integrada en el estudio, tiene más sentido pensar tareas en las que su uso aporte algo, en lugar de tareas que se resuelven simplemente delegando en ella.

CONTEXTO Y MOTIVACIÓN

La asignatura donde se ha desarrollado la experiencia es Matemáticas I del primer curso del Grado en Ingeniería Eléctrica. Los contenidos abarcan cálculo de una y varias variables y álgebra lineal básica. Los alumnos en su mayoría utilizan la IA con naturalidad y la tienen integrada en su rutina de estudio.

Para analizar la experiencia completamente, se realizó una encuesta anónima al alumnado ($n = 21$) dividida en tres bloques

1. uso general de herramientas de IA,
2. valoración de las tareas propuestas,
3. reflexión final sobre el impacto en su forma de estudiar.

Los datos obtenidos en el primer bloque son consistentes con lo que se observa en experiencias similares. ChatGPT es, con diferencia, la herramienta más usada como primera opción (61,9 %), seguida de Gemini (33,3 %). Llama la atención que las herramientas especializadas en matemáticas (Photomath, WolframAlpha) no aparecen como primera opción de nadie, es decir, el alumnado recurre a la IA generalista para resolver dudas matemáticas, aun cuando estudios recientes muestran que estas herramientas cometen errores significativos en tareas matemáticas de nivel universitario [3]. Más del 60 % afirma emplearla de forma frecuente o siempre, con una confianza media-alta (media 3,56/5). Cuando se les pregunta para qué la usan, el 85,7 % declara que la utiliza “para entender los pasos intermedios”, y solo un 14,3 % dice usarla para verificar resultados.

Ninguno reconoce usarla “para obtener el resultado rápido”, lo cual es, cuanto menos, sorprendente si se compara con lo que observamos en las entregas.

Este último dato apunta al sesgo de deseabilidad social, algo que aparece varias veces en el trabajo realizado. En encuestas anónimas los estudiantes tienden a describirse en los términos socialmente aceptables, aun cuando la práctica pueda ser diferente. Esta cautela refuerza la necesidad de diseñar tareas cuya solidez no dependa del autocontrol del alumnado, sino del propio diseño.

Un punto de referencia: los ejercicios habituales

Antes de describir las tres tareas propuestas, conviene detenerse en un dato revelador. En la encuesta se preguntó también por la valoración de los ejercicios estándar de la asignatura. El resultado es paradójico ya que los alumnos valoran con 3,90 sobre 5 la afirmación “la IA me ayuda a aprender el concepto”, y niegan haber copiado sin profundizar (media de 1,67 sobre 5).

Esta contradicción entre lo declarado y lo observado es lo que motiva el rediseño de las tareas, ya que cuando el sistema depende de la honestidad autodeclarada del alumnado, el resultado no es fiable. La solución no está en pedirles que se comporten de otra manera, sino en proponerles tareas donde el atajo sea menos evidente.

LAS TRES TAREAS PROPUESTAS

A continuación se describen las tres tareas alternativas planteadas. Todas se enmarcan dentro del bloque de observaciones de la asignatura y no prohíben el uso de la IA. Lo que cambia es lo que se pide.

Tarea 1: Investigación de un método no visto en clase

El alumnado recibe un problema cuyo método de resolución no se ha trabajado directamente en clase. Debe buscar información, comprender el procedimiento y aplicarlo a un caso concreto, incluyendo una explicación del método con sus propias palabras. La IA puede utilizarse como fuente, pero no basta con copiar la respuesta.

Es la tarea que más se parece, en formato, al ejercicio estándar, y también es la más discutible como propuesta claramente diferenciada. Sin embargo, la novedad del contenido a investigar añade una dificultad, ya que el

alumnado se enfrenta a algo que no ha visto en clase y, por tanto, no puede simplemente replicar. Sirve como puente hacia las tareas siguientes.

Tarea 2: Análisis de ejercicios resueltos por IA con errores

Se entregan al alumnado varios ejercicios ya resueltos, presentados como si los hubiera generado la IA, que contienen errores intencionados. Estos errores son de distintos tipos: aritméticos sutiles, pasos lógicamente incorrectos pero plausibles, y resultados aparentemente correctos obtenidos por caminos equivocados. La tarea consiste en identificar los errores, corregirlos y justificar por qué la solución original era incorrecta.

Aquí no hay nada que resolver y lo que se evalúa es el juicio crítico, la comprensión de la teoría y la capacidad de detectar razonamientos falsos. Además, tiene una particularidad interesante, ya que si el alumnado introduce la solución original en la IA para verificar si es correcta, en muchos casos la IA le confirma que sí lo es, o defiende el razonamiento erróneo. Este comportamiento, lejos de ser un problema, forma parte del aprendizaje que se busca.

Tarea 3: Diseño de un problema aplicado

El alumnado debe diseñar un problema propio, vinculado a su grado, que se resuelva mediante técnicas matemáticas que se explican en clase. Se pide que tenga un enunciado coherente, una modelización razonable y una solución correcta. De forma opcional, se solicita que entreguen también los *prompts* utilizados durante el proceso, con el objetivo de fomentar un uso más reflexivo de la IA y no conformarse con la primera respuesta.

La tarea desplaza el foco desde resolver hacia formular. Diseñar un buen problema exige entender qué preguntas tiene sentido plantear en un contexto ingenieril, qué datos son razonables, y qué método matemático encaja. La IA puede ayudar en cualquiera de estos pasos, pero difícilmente puede sustituir la decisión de qué problema plantear.

RESULTADOS DE LA ENCUESTA

En esta sección se resumen los resultados más destacados de la encuesta realizada al alumnado, correspondiente al bloque de valoración de las tareas y al bloque de reflexión final.

Valoración de cada tarea

La Tabla III.1 recoge las medias de los ítems más representativos de cada tarea. Se han incluido también los datos del ejercicio estándar como referencia.

Tarea / ítem	Media (1–5)	% con 4 o 5
Ej. estándar — “Me ayuda a aprender el concepto”	3,90	81,0 %
T1 (Investigación) — “Reformular consolidó el aprendizaje”	3,58	52,6 %
T2 (Análisis errores) — “Me obligó a analizar la teoría”	4,00	80,0 %
T3 (Diseño) — “Aumentó mi interés por la asignatura”	3,33	47,7 %

Cuadro III.1: Valoración media de las tareas ($n = 21$) para los ítems más representativos del aprendizaje en cada caso.

La Tarea 2 es la mejor valorada de todas, y también la única que supera al ejercicio estándar en la valoración del aprendizaje. El 80 % del alumnado considera con 4 o 5 que esta tarea les obligó a analizar la teoría con más detalle, y no hay ninguna respuesta por debajo de 3. Es el ítem con mejor valoración de toda la encuesta.

La Tarea 3, en cambio, obtiene resultados más modestos. En particular, un dato interesante: al preguntarles si diseñar el prompt fue un reto intelectual, la media es de solo 2,71 sobre 5. Es decir, el alumnado no percibe la formulación de prompts como una habilidad que requiera esfuerzo, algo que contrasta con la literatura sobre *prompt engineering* ([4]) y que apunta a una línea clara de trabajo futuro.

Más allá de las medias, resulta interesante mirar la distribución completa de respuestas para la Tarea 2, la mejor valorada (Figura III.1).

El 80 % del alumnado se sitúa entre *de acuerdo* y *totalmente de acuerdo*, y no hay ninguna respuesta por debajo del punto medio. Es una distribución muy poco habitual en encuestas de valoración, y sugiere que el efecto de la tarea sobre la comprensión teórica se percibe de manera bastante homogénea, no solo entre los estudiantes más motivados.

Reflexión final del alumnado

Los resultados del tercer bloque de la encuesta son quizá los más interesantes desde el punto de vista pedagógico. Al preguntar si estas tareas mejoran su capacidad de análisis como futuros ingenieros, la media es 3,75 sobre 5, con un 65 % dando una valoración de 4 o 5 y sin ninguna respuesta por debajo de 3. El alumnado percibe, por tanto, un valor no solo académico sino también profesional en las tareas propuestas.

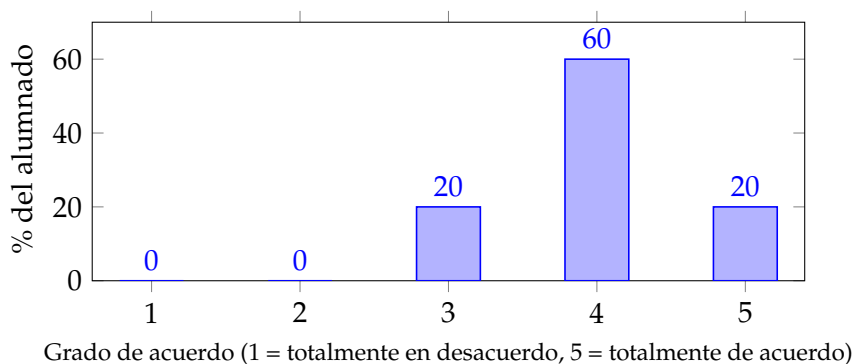


Figura III.1: Distribución de respuestas al ítem “Identificar el error me obligó a analizar la teoría con más detalle” (Tarea 2).

Al preguntar si su forma de interactuar con la IA ha cambiado tras estas actividades, un 75 % responde afirmativamente. La mayoría (65 %) señala que ahora verifica los pasos lógicos de las respuestas que da la IA. Solo un 10 % dice haber mejorado la manera en que redacta los prompts, dato coherente con la baja valoración de la escritura de prompts como reto intelectual (Figura III.2).

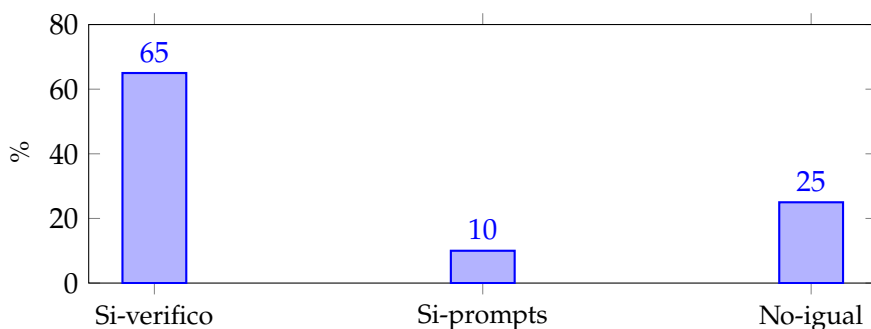


Figura III.2: Cambio en la forma de interactuar con la IA tras las tareas.

Finalmente, la última pregunta del bloque produce el resultado más sorprendente. Al preguntar si, ante la irrupción de la IA, debería cambiar la forma en que se les evalúa, la media es de tan solo 2,85 sobre 5, con un 45 % del alumnado marcando 1 o 2 (Figura III.3).

Aquí aparece la contradicción más interesante de toda la experiencia. El alumnado reconoce que la IA ha cambiado su forma de estudiar, que

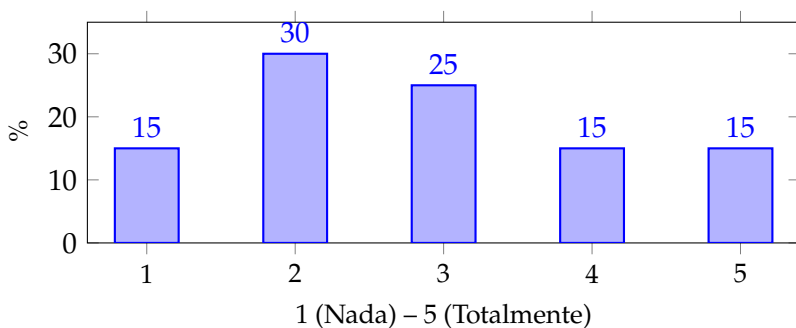


Figura III.3: Resultados sobre si los alumnos piensan que debería cambiar la forma de evaluar debido a la IA.

estas tareas mejoran su capacidad de análisis, pero al mismo tiempo no ve necesario cambiar la forma en que se evalúan sus aprendizajes. Este contraste se comentará con más detalle en la discusión.

DISCUSIÓN

A la luz de los resultados anteriores, cabe hacer varias reflexiones. La primera, la más importante, es que las tres tareas no funcionan igual. La Tarea 2 (análisis de errores) es claramente la que mejor resultado obtiene, tanto en la valoración del alumnado como en la observación del aula. Es también la que más se aleja del ejercicio tradicional y por ello, este cambio de foco obliga a mirar la teoría con detalle y descoloca a quienes se limitan a copiar y pegar.

En clase se observó, además, un comportamiento interesante por alguna parte del alumnado, ante la duda sobre si un ejercicio contenía o no un error, introducía la solución en su propia IA para verificarlo, y en varios casos la IA confirmaba erróneamente el razonamiento. Este hallazgo, comentado con ellos posteriormente, generó una conversación muy rica sobre los límites de la herramienta.

La Tarea 1 (investigación) es la más parecida a un ejercicio tradicional y su papel principal es servir de puente. La Tarea 3 (diseño de problemas), en cambio, muestra limitaciones observadas en el aula, ya que el alumnado tiende a elegir problemas sencillos, muchas veces parecidos a los ya vistos en clase, y muy pocos alumnos entregaron los prompts opcionales o mostraron un uso reflexivo de la IA en el proceso.

Un segundo eje de reflexión tiene que ver con la contradicción final,

ya que el alumnado ve que aprende más, pero no ve necesario cambiar el sistema de evaluación. Las lecturas posibles pueden ser varias. Primero, comodidad por lo que ya conocen, una visión instrumental de la evaluación, o que el sistema actual les beneficia porque es difícil con el sistema actual distinguir quién aprende y quién no.

Limitaciones

Es importante señalar las limitaciones de esta experiencia. La muestra es pequeña ($n = 21$), corresponde a una única asignatura y un único curso. Los datos son autoinformados, con el sesgo de deseabilidad social ya comentado. No se ha realizado comparación con un grupo de control, ni se han recogido medidas objetivas de aprendizaje más allá de las calificaciones finales, que resultaron similares en todos los casos. La experiencia se desarrolla en un contexto muy concreto y la transferibilidad debe considerarse con prudencia, aunque el diseño general de las tareas parece razonablemente aplicable a otras materias.

CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE CONTINUIDAD

De esta primera experiencia se extraen cinco ideas principales. La primera es que prohibir el uso de la IA no es una vía razonable, ya que está plenamente integrada en los hábitos del alumnado, y renunciar a orientarla es renunciar también a educar en su uso. La segunda es que las tareas que exigen juicio crítico funcionan especialmente bien; el análisis de errores es, en esta experiencia, lo mejor valorado. La tercera es que hay margen claro de mejora en el trabajo explícito con los prompts, algo que el alumnado no percibe como habilidad y que quizá deba introducirse de forma más estructurada. La cuarta es que el alumnado responde a los cambios propuestos, pues tres de cada cuatro han modificado su forma de interactuar con la IA. Y la quinta es que hay un trabajo que va más allá de lo que un docente individual puede hacer puesto que es necesario replantearse el sistema de evaluación global.

Como líneas de continuidad, se plantean varias. A corto plazo, ampliar la experiencia a más grupos y asignaturas, trabajar de forma explícita la escritura de prompts, y repensar la evaluación continua. A medio plazo, incorporar la defensa oral como parte de la evaluación, diseñar rúbricas específicas para tareas con IA que valoren el proceso más que el resultado, y construir junto a otros docentes un repositorio compartido de tareas alternativas.

REFERENCIAS

- [1] Susnjak, T., y McIntosh, T. R. (2024). ChatGPT: The End of Online Exam Integrity? *Education Sciences*, 14(6), 656.
- [2] Sullivan, M., Kelly, A., y McLaughlan, P. (2023). ChatGPT in higher education: Considerations for academic integrity and student learning. *Journal of Applied Learning & Teaching*, 6(1), 31–40.
- [3] Frieder, S., Pinchetti, L., Chevalier, A., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T., Petersen, P. C., y Berner, J. (2023). Mathematical Capabilities of ChatGPT. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36, 27699–27744.
- [4] Knoth, N., Tolzin, A., Janson, A., y Leimeister, J. M. (2024). AI literacy and its implications for prompt engineering strategies. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 6, 100225.

AFILIACIONES

Amanda Carreño Sánchez – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Santiago Moll López – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Adolfo Núñez Pérez – Estudiante de doctorado, Universitat Politècnica de València

IV

INNOVAR, AJUSTAR Y APRENDER: UN QUINQUENIO DOCENTE EN LA UPV

FRANCISCO I. CHICHARRO LÓPEZ

EN este trabajo se presenta una reflexión crítica sobre cinco años de experiencia docente en la Universitat Politècnica de València, estructurada en torno a tres ejes fundamentales: la innovación metodológica, el ajuste progresivo de las estrategias aplicadas y el aprendizaje derivado de la práctica docente.

A lo largo de este periodo, se han implementado diversas iniciativas en asignaturas de carácter matemático, que incluyen metodologías activas, cambios en los sistemas de evaluación y el uso de recursos tecnológicos. Algunas de estas experiencias han demostrado ser eficaces en términos de participación, comprensión y rendimiento académico, mientras que otras no han alcanzado los resultados esperados, lo que pone de manifiesto la importancia de adaptar las propuestas al contexto real del aula.

El trabajo ofrece un análisis tanto de las prácticas exitosas como de las que han sido descartadas, identificando las causas que explican su funcionamiento o sus limitaciones.

INTRODUCCIÓN

La docencia universitaria constituye una actividad compleja y dinámica que exige una revisión continua de las metodologías, los sistemas de evaluación y los mecanismos de interacción con el alumnado. Lejos de concebirse como una actividad estática basada en la mera transmisión de

contenidos, la enseñanza superior actual demanda procesos de reflexión sistemática que permitan adaptar las estrategias docentes a contextos cambiantes y a perfiles de estudiantes cada vez más diversos.

Durante los últimos años, la innovación docente ha ocupado un lugar central en el debate sobre la mejora de la educación superior. Sin embargo, innovar no implica necesariamente mejorar. Las innovaciones sólo son efectivas cuando existe una adecuada alineación entre los resultados de aprendizaje perseguidos, las actividades propuestas y los mecanismos de evaluación empleados. El presente trabajo recoge una reflexión crítica sobre cinco años de experiencia docente en la Universitat Politècnica de València. Lejos de presentar exclusivamente experiencias exitosas, se analizan tanto iniciativas que produjeron resultados positivos como otras que obligaron a replantear decisiones previamente adoptadas. El objetivo no es identificar metodologías universalmente válidas, sino comprender qué factores condicionan el éxito o el fracaso de determinadas actuaciones.

Poner el foco exclusivamente en la metodología empleada deja de lado otros elementos clave, como el diseño de las pruebas, los recursos disponibles y las restricciones impuestas a cada actividad de evaluación.

EXPERIENCIAS

A continuación, recogemos una serie de experiencias con resultados dispares que han permitido realizar diversos ajustes a lo largo de los años en el ámbito educativo. Por un lado, recogemos experiencias de dos asignaturas con un perfil de estudiantes completamente diferente. Por otro lado, cuestiones organizativas de las asignaturas que han dado buenos resultados.

Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación > Matemáticas I

El primer bloque de experiencias se desarrolla en la asignatura de Matemáticas I del Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. Se trata de una asignatura del primer cuatrimestre que versa sobre funciones de una variable (refuerzo y ampliación de los contenidos de Bachillerato), números complejos, sucesiones y series, y funciones de varias variables. Los estudiantes han accedido a la titulación con una nota de corte en torno al 8.7 en la ventana de los últimos 5 años.

La primera experiencia se desarrolló durante el curso 2021, teniendo como objetivo diseñar un método de evaluación en el que no sólo se

realizaran pruebas escritas de respuesta abierta tras finalizar la impartición de los contenidos, sino que se incluyeran otros medios de evaluación. La propuesta consistió en la realización de tests en línea una vez finalizado cada tema, iniciativa que parecía razonable desde una perspectiva organizativa. Los cuestionarios permitían proporcionar retroalimentación inmediata, fomentaban el estudio progresivo y reducían parcialmente la dependencia de los exámenes tradicionales. Además, representaban un porcentaje de la calificación final.

Desde un punto de vista teórico, esta estrategia se encontraba alineada con los modelos de evaluación formativa y con las recomendaciones que promueven una evaluación continua orientada al aprendizaje. Sin embargo, la experiencia puso de manifiesto una cuestión fundamental: no todo aquello que puede evaluarse mediante un test coincide con aquello que realmente se desea evaluar. La elaboración de amplias baterías de preguntas exigía una elevada inversión de tiempo y, además, muchas cuestiones terminaban evaluando reconocimiento, identificación de procedimientos o memoria a corto plazo, en lugar de razonamiento matemático profundo.

La experiencia llevó a replantear el peso de este tipo de actividades y a reflexionar sobre la necesidad de alinear instrumentos y objetivos de aprendizaje. Más que una cuestión tecnológica, el debate terminó centrándose en la validez del instrumento para medir aquello que realmente se pretendía desarrollar en el alumnado.

Durante el siguiente curso, y tras observar unos resultados académicos mejorables en la asignatura, se introdujo una experiencia basada en trabajo en equipo mediante seminarios evaluables desarrollados en grupos de tres estudiantes. El diseño respondía a varios objetivos simultáneos: aumentar la implicación del alumnado, promover el aprendizaje colaborativo y desarrollar competencias transversales relacionadas con la argumentación matemática y la resolución de problemas.

Desde el punto de vista metodológico, la propuesta parecía alinearse con las recomendaciones actuales sobre participación activa del alumnado, aprendizaje colaborativo y construcción compartida del conocimiento [1], [2]. Adicionalmente, permitía desplazar parcialmente el protagonismo desde el profesor hacia los estudiantes, favoreciendo una participación más activa en su propio proceso de aprendizaje.

Los resultados obtenidos fueron heterogéneos. En numerosos casos se observó una mayor implicación y una mejor comprensión de determinados conceptos. Sin embargo, también aparecieron dificultades relacionadas con la distribución desigual del trabajo dentro de los grupos, la diferente

motivación de los participantes y la complejidad de identificar las contribuciones individuales. Más que interpretar esta situación como un fracaso, la experiencia permitió comprender la importancia de diseñar cuidadosamente las condiciones de realización de las actividades. La metodología en sí misma no garantizaba el aprendizaje. Resultaba necesario definir mecanismos adecuados de seguimiento, evaluación y responsabilidad individual capaces de sostener los objetivos perseguidos.

Una tercera línea de actuación estuvo relacionada con la reorganización progresiva de los materiales docentes utilizados en Matemáticas I. La experiencia acumulada mostró que muchas dificultades del alumnado no estaban asociadas exclusivamente a la complejidad intrínseca de los contenidos matemáticos, sino también a la forma en que éstos se secuenciaban y presentaban. Determinados desarrollos excesivamente extensos, un elevado número de definiciones secundarias o clasificaciones muy detalladas incrementaban la carga cognitiva sin aportar beneficios proporcionales al aprendizaje.

En este proceso se comprobó que algunas innovaciones aparentemente modestas podían generar efectos más significativos que otras actuaciones metodológicamente más ambiciosas. Una mejor selección de ejemplos, una secuenciación más cuidada o una presentación más clara de las ideas fundamentales contribuían en ocasiones a mejorar la comprensión de manera más efectiva que la incorporación de nuevos recursos tecnológicos.

La principal lección aprendida fue que, en ocasiones, innovar no implica añadir nuevos recursos, sino eliminar aquellos elementos que dificultan la comprensión de los conceptos esenciales.

Doble Grado en Matemáticas > Análisis Numérico

Una segunda línea de experiencias se desarrolló en distintas asignaturas del Doble Grado en Matemáticas en el ámbito del Análisis Numérico. La evaluación se realizaba mediante ordenadores en aulas informáticas, incorporando software especializado y recursos digitales. Entre 2022 y 2025 el modelo evolucionó significativamente debido a cambios tecnológicos, organizativos y derivados de la aparición de nuevas herramientas al alcance de los estudiantes.

Inicialmente se permitió el uso de apuntes en papel, programas almacenados en dispositivos externos y acceso a Internet. Posteriormente se restringió progresivamente el acceso a la red y se reorganizaron los materiales permitidos mediante repositorios institucionales compartidos. Estas modificaciones no respondían únicamente a cuestiones organizati-

vas. Cada decisión alteraba sustancialmente las competencias que podían ponerse de manifiesto durante la prueba. Una evaluación con acceso libre a Internet mide capacidades diferentes de otra realizada en un entorno más controlado.

Desde la perspectiva de la evaluación auténtica, el problema no consiste en decidir si deben utilizarse herramientas tecnológicas, sino determinar qué competencias pretenden medirse y bajo qué condiciones pueden evidenciarse adecuadamente.

La principal reflexión derivada de esta experiencia fue que las restricciones de una prueba constituyen parte esencial de su diseño. Permitir o impedir determinados recursos modifica completamente la naturaleza de las competencias evaluadas.

Esta cuestión ha adquirido una relevancia todavía mayor con la expansión reciente de los sistemas de inteligencia artificial generativa, que obligan a replantear numerosos modelos tradicionales de evaluación y a reconsiderar el equilibrio entre supervisión, autenticidad y autonomía del estudiante.

Elementos comunes en la coordinación de asignaturas

La última experiencia analizada tiene carácter transversal y afecta a la coordinación de asignaturas impartidas por varios profesores.

Entre las principales actuaciones desarrolladas destacan la centralización de incidencias académicas, la adopción consensuada de decisiones relacionadas con criterios de evaluación, la elaboración de procedimientos comunes y la organización conjunta de las revisiones de exámenes. Aunque estas medidas pueden parecer alejadas de la innovación docente en sentido estricto, su impacto sobre la percepción de equidad y coherencia del alumnado resultó notable, dado que resulta de especial importancia que los procesos evaluativos sean transparentes, consistentes y comprensibles para los estudiantes.

La experiencia mostró que una coordinación eficiente reduce incertidumbres, facilita la transparencia y contribuye a mejorar la consistencia del sistema de evaluación. Además, permite que los estudiantes perciban la asignatura como una unidad coherente, independientemente del profesor responsable de cada grupo.

Asimismo, la coordinación favoreció la detección temprana de problemas, la puesta en común de soluciones y la construcción de criterios más homogéneos de actuación. Desde esta perspectiva, la coordinación docente no debe entenderse únicamente como una tarea administrativa, sino como

una herramienta de mejora continua de la calidad de la enseñanza.

CONCLUSIONES

Las experiencias desarrolladas durante este quinquenio permiten extraer varias conclusiones relevantes.

La innovación docente debe entenderse como un proceso iterativo de experimentación, análisis y reajuste. No todas las iniciativas producen los resultados esperados, pero incluso las experiencias menos exitosas generan información valiosa para la mejora futura.

Se confirma la importancia del alineamiento constructivo entre objetivos de aprendizaje, actividades formativas y sistemas de evaluación. Las dificultades detectadas en varias de las experiencias analizadas no se debieron necesariamente a la metodología utilizada, sino a desajustes entre aquello que se pretendía conseguir y aquello que realmente se estaba evaluando. Las experiencias ponen de manifiesto que la tecnología debe considerarse un medio y no un fin. Su incorporación sólo resulta útil cuando contribuye efectivamente a mejorar el aprendizaje o la calidad de la evaluación.

Tanto las experiencias asociadas a la evaluación continua como las relacionadas con el trabajo en equipo y la evaluación informática muestran que el comportamiento del alumnado se ve condicionado por las reglas, incentivos y limitaciones que acompañan a cada actividad. En consecuencia, el diseño de estas condiciones resulta tan importante como la propia metodología empleada. Finalmente, la principal lección aprendida durante estos cinco años puede resumirse en una idea sencilla: para alcanzar determinados objetivos de aprendizaje no basta con diseñar actividades innovadoras; resulta imprescindible diseñar cuidadosamente las pruebas, los recursos disponibles y las restricciones asociadas a ellas. En muchos casos, son precisamente esos límites los que determinan el comportamiento del alumnado y, en consecuencia, los aprendizajes que realmente terminan produciéndose.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a los estudiantes y compañeros de las asignaturas Matemáticas I del Grado en Ingeniería en Tecnologías y Sistemas de Telecomunicación y de las asignaturas de Análisis Numérico del Doble Grado en Matemáticas su participación activa en las experiencias descritas.

Muchas de las reflexiones recogidas en este trabajo surgen directamente de su implicación, retroalimentación y capacidad para adaptarse a procesos continuos de innovación y mejora docente.

REFERENCIAS

- [1] Carless, D. (2015). Exploring learning-oriented assessment processes. *High Educ*, 69, 963–976 (2015).
- [2] Ibarra-Sáiz, M.S., Rodríguez-Gómez, G., Boud, D., Rotsaert, T., Brown, S., Salinas-Salazar, M.L., & Rodríguez-Gómez, H.M. (2020). El futuro de la evaluación en la educación superior. *RELIEVE* 26, art. M1.

AFILIACIONES

Francisco I. Chicharro López – Departamento de Matemática Aplicada,
Universitat Politècnica de València

BASES DE GROEBNER: CÓMO INTRODUCIR LOS ANILLOS DE POLINOMIOS EN UNA CLASE PRÁCTICA

MARÍA JOSÉ FELIPE ROMÁN, IRIS GILABERT MANZANARES

LA definición de anillo, y en concreto de anillo de polinomios, es el paso que precede tradicionalmente al estudio de la teoría de cuerpos. Así, el alumnado aprende que los anillos de polinomios en una variable permiten construir cuerpos finitos. Sin embargo, este enfoque no debe hacerles olvidar el interés de los anillos por sí mismos y las importantes diferencias estructurales que aparecen al considerar anillos de polinomios en dos o más variables: sin ir más lejos, la desaparición de la división euclidiana. Para poder comprobar la pertenencia de polinomios en varias variables a un ideal, la solución es reemplazar la división euclidiana por una división en varias variables, y en especial el uso de bases de Groebner. Describimos una actividad para introducirlas en el aula, y qué sentido darle, tanto matemáticamente como dentro del contexto tecnológico actual.

INTRODUCCIÓN

La reflexión que presentamos se enmarca en la asignatura de Estructuras Algebraicas II, impartida a estudiantes de cuarto año en el Doble Grado de Matemáticas. La asignatura se apoya en el contenido de Estructuras Algebraicas I, impartida dos cursos antes. Partiendo de bases de teoría de grupos, se estudian en ella importantes objetos algebraicos como anillos y

cuerpos, con el objetivo final de proporcionar una introducción a la teoría de Galois.

Ya que se trata de una asignatura prácticamente autocontenida, que construye progresivamente una teoría, es esencial que el estudiantado pueda ir asimilando los contenidos al mismo ritmo que son presentados. Por ello, las clases teóricas son acompañadas por prácticas informáticas, cuyo fin es ofrecer una perspectiva y una dinámica alternativas, para una comprensión más duradera y en profundidad.

Hasta la actualidad, Estructuras Algebraicas II sólo ha existido durante dos cursos. Así, pese a que ajustar la asignatura a las necesidades del alumnado es una tarea perpetua, es de especial importancia hacerlo ahora. En las siguientes páginas, reflexionamos sobre cómo mejorar, en concreto, una de las prácticas informáticas, para adaptarla a un alumnado que pasa largas horas en las aulas, que no siempre tiene predilección por las matemáticas abstractas, y que, además, tiene crecientemente a su disposición la Inteligencia Artificial.

Proponemos una actividad nueva, que no formaba parte de las prácticas en los cursos anteriores, pero sí enfrenta al estudiantado a los mismos conceptos teóricos que ya se presentaban. Al estar estructurada más claramente como un problema que resolver, esperamos que les resulte más interesante de abordar. Además, sugerimos un método de evaluación posterior que valore el esfuerzo de cada estudiante y fomente la reflexión activa.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Las asignaturas de Estructuras Algebraicas recorren tres de los objetos fundamentales en el álgebra abstracta: grupo, anillo, y cuerpo. Si se hace un hincapié particular en los anillos de polinomios es por su aplicación a la construcción de cuerpos finitos, pero también por el interés de estas estructuras por sí mismas. Sea A un anillo. El conjunto

$$A[x] := \{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in A, 1 \leq i \leq k\},$$

dotado de suma y multiplicación, tiene también una estructura de anillo, y es llamado el *anillo de polinomios en una variable* con coeficientes en A .

De manera general, $A[x]$ hereda las propiedades de A . El anillo de polinomios es conmutativo si y sólo si A lo es, y es un dominio de integridad si y sólo si A lo es. Sin embargo, el estudio de este anillo es particularmente gratificante cuando se impone que A sea un cuerpo, ya que, en ese caso, se

tiene que sobre $A[x]$ se puede definir una *división euclidiana*. Esto quiere decir que para todo par de polinomios $a, b \in A[x]$ existe un único *cociente* $q \in A[x]$ y un único *resto* $r \in A[x]$ tales que

$$a = qb + r$$

y r es nulo o su grado es menor al de b .

De la existencia de la división euclidiana sobre $A[x]$ se deduce una profunda comprensión de sus ideales. En primer lugar, $A[x]$ es un *dominio de ideales principales* (es decir, todo ideal puede ser generado por un único polinomio). Por otro lado, la pertenencia de un polinomio f a cierto ideal generado por g depende únicamente de que el resto en la división euclidiana de f por g sea nulo.

Ahora, consideremos un entero $n > 1$ y un cuerpo A . El conjunto

$$A[x_1, \dots, x_n] := \left\{ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad k \in \mathbb{N}, a_\alpha \in A \right\}$$

tiene de nuevo estructura de anillo y es llamado *anillo de polinomios en n variables* con coeficientes en A . Esta estructura sigue siendo un dominio de factorización única y se tiene que todo ideal está generado por un número finito (pero posiblemente mayor que 1) de polinomios. No obstante, pese a que A sea un cuerpo, no existe ninguna división euclidiana sobre $A[x_1, \dots, x_n]$.

Esto nos motiva a introducir en el aula una alternativa: la *división de polinomios en n variables*. Análogamente a la división en una variable, dados ciertos $g_1, \dots, g_s \in A[x_1, \dots, x_n]$, se busca descomponer todo polinomio f como

$$f = c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s + r,$$

con $r, c_1, \dots, c_s \in A[x_1, \dots, x_n]$. Para que esta descomposición no sea trivial, ciertas condiciones deben ser impuestas sobre r . En primer lugar, se introduce un orden total sobre los monomios de $A[x_1, \dots, x_n]$, llamado *orden monomial*. Para cada i , existe, entre los monomios que componen al polinomio g_i , un monomio m_i que es máximo para este orden monomial. Se exige entonces que r sea *reducido respecto a $g_1, \dots, g_s$* ; es decir, que ninguno de los términos de r pertenezca al ideal $\langle m_1, \dots, m_s \rangle$. Al tratarse de un ideal generado por monomios, puede demostrarse que esto es equivalente a que ninguno de sus términos sea múltiplo de algún m_i . Esto generaliza a la comparación de grados en una variable.

Tres diferencias esenciales con el caso de una variable deben ser recalculadas ante el alumnado.

- No se trata de una división euclidiana; es decir, ni el resto r ni los cocientes $c_1, \dots, c_s$ son únicos, pues pueden variar si se cambia el orden de $\{g_1, \dots, g_s\}$.
- El objetivo principal de la división es el estudio de los ideales. Ya que los ideales en n variables están generados por varios polinomios, la división se realiza respecto a varios polinomios simultáneamente.
- La no unicidad del resto impide utilizarlo, a priori, como criterio suficiente de pertenencia. Si $r = 0$, entonces $f \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle$, pero generalmente esto no es cierto al revés.

BASES DE GROEBNER

Durante los dos cursos anteriores, se introdujo en las prácticas de Estructuras Algebraicas II un conocido algoritmo con el que efectuar la división de polinomios en varias variables. Se le pedía al alumnado realizar el algoritmo sobre papel, para comparar a continuación sus resultados con los que obtenían al reproducirlo sobre el software algebraico GAP. El objetivo de detallar cada paso del algoritmo a mano era que los estudiantes comprobaran en primera persona cómo las elecciones que surgían en cada etapa alteraban, finalmente, el resultado. Efectuando la misma división de diversas maneras, comprobaban que era posible obtener un resto nulo en sólo algunos casos. Así, el estudio del algoritmo les proporcionaba una multitud de ejemplos que ilustraban los puntos teóricos enunciados más arriba.

No obstante, fue constatado que este enfoque no era el óptimo para una parte del alumnado, ya que desviaba en exceso su atención hacia la mecánica misma del algoritmo, y les hacía olvidar el significado matemático de los resultados obtenidos. Para el próximo curso, nos planteamos pues un enfoque que ponga el valor las conclusiones centrales. En concreto, la importante no-unicidad del resto en la división de polinomios de n variables es presentada desde el caso particular donde sí se cumple. Es aquí donde intervienen las bases de Groebner.

Sean $g_1, \dots, g_s \in A[x_1, \dots, x_n]$ polinomios en n variables, donde A todavía denota un cuerpo. Suponemos que ya se ha fijado un orden monomial con el que determinar los restos de las divisiones. Una *base de Groebner* del ideal $I := \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ es un conjunto generador $\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r\}$ de I tal que un polinomio $f \in A[x_1, \dots, x_n]$ pertenece a I si y sólo si el resto de la división de f por $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r$ es nulo. De manera equivalente, al efectuar la

división de f por los elementos de una base de Groebner siempre se obtiene el mismo resto, independientemente de cómo se ordenen los polinomios de la base.

La manera más común de construir una base de Groebner a partir de los generadores de un ideal es mediante el algoritmo de Buchberger, que usa divisiones de polinomios sucesivas. Al igual que el algoritmo de la división polinomial en n variables, puede ser realizado en GAP o a mano.

Por último, una base de Groebner G es llamada *reducida* si todo $g \in G$ es reducido respecto a $G \setminus \{g\}$ (es decir, g es igual a su resto r en la división polinomial respecto a los demás elementos de la base) y si el monomio máximo entre los que componen a cada $g \in G$ está asociado al coeficiente 1. Al ser A un cuerpo, esto último es fácil de conseguir. Reemplazando sucesivamente los elementos g de G por sus restos r , es posible obtener una base de Groebner reducida a partir de G .

IMPLEMENTACIÓN EN LAS PRÁCTICAS

Las bases de Groebner ofrecen una manera inequívoca de verificar la pertenencia de un polinomio en varias variables a un ideal, y gracias a ello hacer comprobaciones como, por ejemplo, la igualdad de dos ideales. Sin embargo, también permiten resolver problemas más avanzados como sistemas de ecuaciones polinómicas en más de una variable. Nos interesa en particular una aplicación de esto último: la resolución de sudokus, tal y como está detallada en el Capítulo 3 de [1].

Dada una numeración de las celdas con los enteros $\{1, \dots, 81\}$, las entradas de un sudoku pueden ser modelizadas por las variables $x_1, \dots, x_{81}$. Denotamos $(a_1, \dots, a_{81})$ los valores que toman esas celdas. Existe un conjunto $R \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{81}]$ de 891 polinomios tales que $f(a_1, \dots, a_{81}) = 0$ para todo $f \in R$ si y sólo si $(a_1, \dots, a_{81})$ es un vector válido de valores para las celdas del sudoku. (Por ejemplo, para que a_i sea un entero en $\{1, \dots, 9\}$, el polinomio

$$F_i := \prod_{k=1}^9 (x_i - k)$$

ha de anularse en a_i .) Consideremos ahora un sudoku dado y supongamos que contamos con la información de que $a_i = p_i$ para i en cierto subconjunto de celdas $P \subseteq \{1, \dots, 81\}$ (es decir, se conoce el valor de algunas celdas del sudoku). Entonces $(a_1, \dots, a_{81})$ es una solución válida para este sudoku si

y sólo si

$$f(a_1, \dots, a_{81}) = 0 \quad \forall f \in R \text{ y } (x_i - p_i)(a_i) = 0 \quad \forall i \in P.$$

Por lo tanto, podemos describir las soluciones válidas de este sudoku como los $(a_1, \dots, a_{81})$ que anulan a todo polinomio del ideal $I := \langle R \cup \bigcup_{i \in P} (x_i - p_i) \rangle$. Esto es equivalente a anular a todos los polinomios de un conjunto generador de I , y, en concreto, de una base de Groebner de I . Sea G una de estas bases, y $\tilde{G}$ la base de Groebner reducida obtenida a partir de G . Está demostrado en [1] que, si el conjunto de pistas $\{p_i\}_{i \in P}$ es suficiente para que sea posible resolver el sudoku sin ambigüedad, entonces $\tilde{G}$ tiene la forma

$$\{x_1 - b_1, \dots, x_{81} - b_{81}\}$$

para ciertos enteros $b_1, \dots, b_{81} \in \{1, \dots, 9\}$. Por lo tanto, $(a_1 = b_1, \dots, a_{81} = b_{81})$ es la única solución del sudoku.

Nos proponemos organizar al alumnado en grupos de hasta tres estudiantes y proporcionarle a cada grupo lo siguiente:

- un sudoku por resolver;
- el conjunto de polinomios generadores de I ;
- el código necesario en GAP para reproducir los algoritmos de división de polinomios, de Buchberger, y de reducción de bases de Groebner.

El objetivo para cada grupo de estudiantes es resolver el sudoku que les corresponde según el método que hemos detallado, utilizando cada uno de los algoritmos sobre el conjunto de polinomios adecuado. Tener un rol más activo en el transcurso de la actividad, además de un objetivo final fijo, podría facilitar su concentración.

Para completar la práctica, cada estudiante ha de plantearse qué papel juegan en la resolución de un sudoku las propiedades de una base de Groebner. ¿Por qué es necesario obtener una base de Groebner de I ? ¿Cómo es posible ver que el primer conjunto de generadores de I (no) es ya una base de Groebner?

Por último, los objetivos de esta actividad también se extienden a la evaluación de las prácticas. Aunque no se les pedirá repetir la actividad entera durante el examen de prácticas, pueden introducirse durante la práctica preguntas que podrán aparecer en el examen, pero que resultarían largas de contestar sin una reflexión previa. Por ejemplo, ¿puede un ideal tener un sistema generador G tal que el resto en la división de un polinomio f por los elementos de G sea único pero los cocientes no lo sean?

Dado el contexto actual, no podemos pretender que al alumnado le será imposible utilizar inteligencia artificial u otros métodos para buscar la respuesta a estas preguntas (aunque sea, al menos, marginalmente más difícil que obtener una simple repetición del algoritmo de división, como se les pedía en los ejercicios a entregar durante los dos cursos anteriores). No obstante, esto requerirá que comprendan y asimilen las respuesta, con la esperanza de que el efecto del trabajo en el aula y en sus casas no acabe tan pronto como terminen el ejercicio.

UN MARCO TECNOLÓGICO REAL

Pese a haber sido presentadas en estas páginas como una solución a una cuestión didáctica, las aplicaciones de las bases de Groebner van más allá del aula. Nuestro objetivo no es complicar las prácticas informáticas con conceptos que no le serán útiles a los estudiantes, sino, al contrario, mostrarles que con sólo las definiciones vistas en teoría pueden abrir una puerta a conceptos mucho más complejos.

Con el mismo razonamiento descrito aquí, las bases de Groebner permiten resolver muchos tipos de sistemas descritos por ecuaciones polinómicas. En particular, pueden aplicarse a problemas de coloración de grafos (de los cuales los sudokus son un caso particular). Estos, a su vez, tienen aplicaciones en planificación de vuelos o el diseño de redes de comunicación (véanse [2, 4]).

Desde una perspectiva más abstracta, las bases de Groebner son igualmente utilizadas para el descubrimiento de teoremas geométricos; es decir, estudiar desde qué hipótesis se pueden obtener resultados geométricamente interesantes (véase por ejemplo [3]). Tienen, además, aplicaciones en códigos correctores de errores.

Aunque la tecnología avance a ritmo vertiginoso, esperamos que el alumnado pueda recordar que el grado en Matemáticas no es sólo una serie de evaluaciones que completar gracias a otras herramientas (ya sean externas o aquellas facilitadas por el profesorado), sino la herramienta misma para comprender el funcionamiento de lo que les rodea. Del mismo modo que deseamos adaptar las prácticas para suscitar en cada estudiante una mirada crítica sobre la teoría e interés por resolver los ejercicios individualmente, estas actividades han de transmitirles la confianza de ser personas hábiles frente a problemáticas reales.

REFERENCIAS

- [1] W. Decker, G. Pfister, A first course in computational Algebraic Geometry, Cambridge University Press, 2013.
- [2] D. Marx, Graph coloring problems and their applications in scheduling, Period. Polytech. Ser. El. Eng. 48 (1), 11–16 (2004).
- [3] A. Montes, T. Recio, Automatic Discovery of Geometry Theorems Using Minimal Canonical Comprehensive Gröbner Systems. Botana, F., Recio, T. (eds) Automated Deduction in Geometry. ADG 2006. Lecture Notes in Computer Science (4869), Springer, 2007.
- [4] S. Thadani, S. Bagora, A. Sharmac, Applications of graph coloring in various fields, Materials Today: Proc., 66, 3498–3501 (2022).

AFILIACIONES

María José Felipe Román – Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València

Iris Gilabert Manzanares – Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València

VI

INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA: DISEÑO Y PRIMERAS EVIDENCIAS DE IMPLEMENTACIÓN DE UNA PROPUESTA EDUCATIVA

LUIS MANUEL SÁNCHEZ RUÍZ, SANTIAGO MOLL LÓPEZ,
MARIA DOLORES ROSELLÓ FERRAGUD, SARA SÁNCHEZ
LÓPEZ, CARLOS DELGADO CARO, ADOLFO NÚÑEZ PÉREZ,
ROCÍO POVEDA BAUTISTA

Las competencias asociadas a la investigación —formular preguntas, localizar y valorar información, justificar decisiones y comunicar resultados— resultan relevantes para la formación en ingeniería desde los primeros cursos. Este trabajo presenta el diseño y la implementación inicial de un itinerario de iniciación a la investigación desarrollado en el Grado en Ingeniería Aeroespacial de la Universitat Politècnica de València. La propuesta se diseñó a partir de un diagnóstico mixto del alumnado y se articula progresivamente a través de asignaturas de matemáticas, combinando libertad temática, hitos de trabajo, búsqueda bibliográfica, trazabilidad, uso responsable de inteligencia artificial y retroalimentación iterativa. Los primeros indicadores tras la revisión de un borrador inicial muestran una recepción favorable: el 73 % de las respuestas se situó en las categorías altas de valoración y el 76,7 % manifestó una valoración positiva de su interés por participar en proyectos de investigación. Estos resultados se interpretan como evidencia preliminar de viabilidad y aceptación. La evaluación completa del desarrollo competencial y de la calidad de los productos se abordará en fases posteriores del proyecto.

La formación universitaria en ingeniería requiere algo más que dominio técnico. La práctica profesional implica enfrentarse a problemas incompletos, localizar información fiable, justificar elecciones, revisar decisiones y comunicar resultados. La literatura reciente sobre competencias profesionales en ingeniería insiste en integrar estas capacidades en el currículo y no tratarlas como aprendizajes periféricos [1]. De forma complementaria, las revisiones sobre aprendizaje basado en retos muestran el valor de trabajar con problemas abiertos y próximos a contextos reales, siempre que exista un andamiaje suficiente [2].

Una vía para desarrollar estas capacidades es el *Research-Based Learning* (RBL), que aproxima el aprendizaje a prácticas propias del proceso investigador. El marco de Healey y Jenkins [3] propone que el estudiante participe en procesos de indagación y no se limite a recibir resultados ya contruidos. Estudios posteriores han asociado estas experiencias con una mayor percepción de competencia investigadora [4] y trabajos recientes en educación en ingeniería señalan beneficios potenciales en motivación y confianza, aunque también identifican dificultades relacionadas con la preparación inicial y el acompañamiento requerido [5].

La propuesta presentada parte de una decisión concreta: introducir progresivamente la lógica de la investigación desde las matemáticas de los primeros cursos, sin esperar a asignaturas avanzadas o al trabajo final de grado. Las matemáticas ofrecen un contexto adecuado para pasar del ejercicio cerrado a la formulación de problemas, la identificación de variables, la modelización y la argumentación. Esta orientación es coherente con enfoques que vinculan investigación, creatividad e innovación desde etapas tempranas de la formación científica y tecnológica [6].

El objetivo de esta comunicación es describir el diseño del itinerario y presentar algunos indicadores iniciales de su implementación. El énfasis se sitúa en la lógica *diagnóstico–diseño–implementación*: conocer primero las necesidades del alumnado y utilizar esa información para decidir cómo estructurar la experiencia.

DIAGNÓSTICO Y DISEÑO DE LA PROPUESTA

Se utilizó un enfoque de métodos mixtos, combinando un cuestionario dirigido al alumnado de primer curso con entrevistas semiestructuradas. Esta combinación permitió obtener una visión general de intereses y dificultades y, al mismo tiempo, comprender las razones que sustentaban determinadas respuestas, siguiendo la lógica de complementariedad propia

de los diseños mixtos [7].

El diagnóstico mostró un contexto favorable para la propuesta, pero también una tensión clara entre interés y necesidad de apoyo. El alumnado valoraba la posibilidad de investigar sobre cuestiones vinculadas con la ingeniería y mostraba disposición a revisar su trabajo, aunque aparecían inseguridad respecto a las propias capacidades investigadoras y preocupación por el tiempo necesario. Las preferencias temáticas se concentraron especialmente en sistemas aeroespaciales e inteligencia artificial, pero la diversidad de intereses aconsejó mantener una propuesta abierta en lugar de imponer un único ámbito de trabajo.

Las entrevistas reforzaron esta lectura. La libertad temática era valorada, pero se asociaba a la necesidad de ejemplos, pautas para delimitar preguntas y una secuencia de trabajo comprensible. La principal barrera anticipada no era la falta de interés, sino el riesgo de que una actividad abierta añadiera una carga difícil de gestionar. En consecuencia, el diagnóstico no se utilizó únicamente como descripción del grupo, sino como base para adoptar decisiones pedagógicas.

El itinerario se estructuró de forma progresiva. En una primera fase, el alumnado elige y delimita un tema, formula una pregunta inicial, justifica una hoja de ruta y realiza una primera búsqueda bibliográfica. Las fases posteriores amplían el trabajo hacia la definición metodológica, las variables o dimensiones de análisis, una revisión de literatura más sólida y, finalmente, la elaboración y defensa de un trabajo de investigación. El propósito es distribuir la complejidad y evitar que todas las exigencias aparezcan simultáneamente.

La propuesta incorpora además ejemplos anotados, pautas de delimitación, criterios comunes de evaluación y retroalimentación iterativa. El feedback se concibe como una oportunidad de revisión y no únicamente como justificación de una calificación. Este planteamiento conecta con el papel del feedback en la autorregulación [8] y con la literatura reciente sobre *feedback literacy*, que destaca la importancia de aprender a interpretar los comentarios y convertirlos en acciones de mejora [9].

La búsqueda y valoración de información constituye otro componente central. No se pretende exigir simplemente un número mínimo de referencias, sino entrenar la localización, selección y justificación de fuentes. La investigación reciente continúa mostrando la necesidad de integrar explícitamente la alfabetización informacional en la formación universitaria [10]. Esta competencia adquiere especial importancia en presencia de herramientas generativas, capaces de producir explicaciones y referencias

plausibles que requieren verificación [11].

El uso de inteligencia artificial se plantea, por ello, como opcional y sujeto a reglas de transparencia, trazabilidad y comprobación. Las políticas universitarias están evolucionando hacia marcos que especifican usos permitidos y formas de declaración [12], mientras que revisiones recientes muestran que la IA generativa puede aportar apoyo y feedback, pero también favorecer dependencia cuando sustituye procesos cognitivos que deben permanecer bajo responsabilidad del estudiante [13, 14].

IMPLEMENTACIÓN INICIAL Y PRIMEROS INDICADORES

La primera actividad implementada consistió en elaborar un borrador inicial del tema de investigación. El alumnado debía justificar la relevancia del problema, formular una pregunta suficientemente acotada, identificar posibles variables o dimensiones de análisis y construir una base bibliográfica inicial. La revisión docente se centró en la delimitación del tema, la coherencia entre pregunta y enfoque y la conexión del problema con contenidos matemáticos o ingenieriles.

Tras esta primera iteración se recogió una valoración breve del proceso y comentarios abiertos. En conjunto, el 73 % de las respuestas se situó en las categorías 4 o 5 de la escala empleada. De forma más específica, el 76,7 % mostró una valoración alta en el ítem relacionado con el interés por participar en proyectos de investigación. Estos porcentajes no deben interpretarse como una medida de aprendizaje, pero sí constituyen una primera señal de aceptación de la experiencia.

Los comentarios abiertos apuntaron en una dirección compatible con estos indicadores. Aparecieron valoraciones positivas del feedback específico, una mayor comprensión de la necesidad de formular adecuadamente una pregunta y una percepción de la investigación como una competencia que puede aprenderse. Al mismo tiempo, algunos comentarios señalaron sobrecarga inicial ante conceptos nuevos y la necesidad de una secuencia suficientemente gradual.

En esta fase se presentan deliberadamente indicadores descriptivos de implementación. La valoración rigurosa del efecto educativo requerirá analizar la calidad de los productos, la evolución entre versiones, la selección de fuentes, la coherencia metodológica y la continuidad del alumnado a lo largo del itinerario. La literatura sobre RBL aconseja precisamente diferenciar la satisfacción con la experiencia del desarrollo efectivo de competencias investigadoras [4, 5].

DISCUSIÓN

Los primeros resultados apoyan la viabilidad de un modelo que combina autonomía temática y estructura. Esta combinación parece especialmente pertinente en primer curso: una propuesta excesivamente prescrita reduciría la exploración, mientras que una apertura sin apoyos podría incrementar la inseguridad y la carga cognitiva. La información recogida permitió ajustar la intervención a esta tensión y convertir necesidades expresadas por el alumnado en decisiones de diseño.

El papel de las matemáticas resulta también relevante. El itinerario no pretende transformar una asignatura matemática en una asignatura de metodología de investigación, sino utilizar sus contenidos y formas de razonamiento como punto de entrada a preguntas de ingeniería más amplias. Esta orientación encaja con la demanda de experiencias que conecten conocimientos disciplinares, resolución de problemas y competencias profesionales [1, 2].

Las siguientes fases deberán estudiar no solo si la propuesta resulta atractiva, sino qué aprende realmente el alumnado. Será necesario observar la evolución de las preguntas, la calidad de las fuentes y argumentos, la capacidad de justificar decisiones y la mejora de los productos tras la retroalimentación. También será relevante analizar cómo se integra el uso de IA en estos procesos sin debilitar la autoría, la verificación ni el razonamiento propio.

CONCLUSIONES

La experiencia muestra que es posible introducir prácticas de iniciación a la investigación desde los primeros cursos de ingeniería mediante un itinerario progresivo integrado en asignaturas de matemáticas. El diagnóstico previo permitió identificar interés, diversidad temática, necesidad de orientación y preocupación por la carga de trabajo, y estas dimensiones se tradujeron en decisiones concretas de diseño.

Los primeros indicadores tras la revisión de un borrador muestran una recepción favorable, con un 73 % de respuestas en las categorías altas de valoración y un 76,7 % de valoración positiva del interés por participar en proyectos de investigación. Se trata, no obstante, de evidencia preliminar sobre aceptación y viabilidad. La aportación de esta fase es mostrar un modelo de diseño fundamentado en necesidades diagnosticadas; la evaluación del desarrollo competencial y del impacto educativo requerirá una fase posterior más amplia.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la participación del estudiantado del Grado en Ingeniería Aeroespacial y la colaboración del profesorado implicado en el desarrollo y revisión de la propuesta. Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto PIME/25-26/556, con el apoyo del Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Politècnica de València.

REFERENCIAS

- [1] Beagon, U., y Bowe, B. (2023). Understanding professional skills in engineering education: A phenomenographic study of faculty conceptions. *Journal of Engineering Education*, 112(4), 1109–1144. <https://doi.org/10.1002/jee.20556>
- [2] Doulougeri, K., Vermunt, J. D., Bombaerts, G., y Bots, M. (2024). Challenge-based learning implementation in engineering education: A systematic literature review. *Journal of Engineering Education*, 113(4), 1076–1106. <https://doi.org/10.1002/jee.20588>
- [3] Healey, M., y Jenkins, A. (2009). *Developing Undergraduate Research and Inquiry*. The Higher Education Academy.
- [4] Thiem, J., Preetz, R., y Haberstroh, S. (2023). How research-based learning affects students' self-rated research competences: Evidence from a longitudinal study across disciplines. *Studies in Higher Education*, 48(7), 1039–1051. <https://doi.org/10.1080/03075079.2023.2181326>
- [5] Kafadarova, N., Stoyanova-Petrova, S., y Stoyanova, D. (2026). Research-Based Learning in Engineering Education: A Case Study. *Education Sciences*, 16(1), 59. <https://doi.org/10.3390/educsci16010059>
- [6] Mandumpal, J. B., Ferdinand-James, D. S., Ziarati, P., Hussein, E. K., Umachandran, K., y Kennedy, I. G. (2022). Innovation-based learning (InnBL): Turning science and engineering undergraduate degree programmes towards innovation. *Journal of Creativity*, 32(1), 100013. <https://doi.org/10.1016/j.yjoc.2021.100013>
- [7] Creswell, J. W., y Plano Clark, V. L. (2017). *Designing and Conducting Mixed Methods Research* (3rd ed.). SAGE.

- [8] Nicol, D. J., y Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, 31(2), 199–218. <https://doi.org/10.1080/03075070600572090>
- [9] Lei, W., y Lei, Z. (2026). A systematic review of feedback literacy in higher education: Concepts, measurement, and interventions. *Assessment & Evaluation in Higher Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/02602938.2026.2656285>
- [10] Mwiiyale, J. M., Hamutumwa, N. U., y Shatona, M. N. (2025). Exploring students' views on information literacy skills training in higher education. *The Reference Librarian*, 66(1–2), 30–47. <https://doi.org/10.1080/02763877.2025.2481088>
- [11] Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., Gasser, U., Groh, G., Günemann, S., Hüllermeier, E., Krusche, S., Kutyniok, G., Michaeli, T., Nerdel, C., Pfeffer, J., Poquet, O., Sailer, M., Schmidt, A., Seidel, T., Stadler, M., Weller, J., Kuhn, J., y Kasneci, G. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, 103, 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>
- [12] Moorhouse, B. L., Yeo, M. A., y Wan, Y. (2023). Generative AI tools and assessment: Guidelines of the world's top-ranking universities. *Computers and Education Open*, 5, 100151. <https://doi.org/10.1016/j.caeo.2023.100151>
- [13] Qian, Y. (2025). Pedagogical applications of generative AI in higher education: A systematic review of the field. *TechTrends*, 69, 1105–1120. <https://doi.org/10.1007/s11528-025-01100-1>
- [14] Daniel, K., Msambwa, M. M., y Wen, Z. (2025). Can generative AI revolutionise academic skills development in higher education? A systematic literature review. *European Journal of Education*, 60, e70036. <https://doi.org/10.1111/ejed.70036>

AFILIACIONES

Luis Manuel Sánchez Ruíz – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Santiago Moll López – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Maria Dolores Roselló Ferragud – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Sara Sánchez López – Universitat Politècnica de València

Carlos Delgado Caro – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Adolfo Núñez Pérez – Universitat Politècnica de València

Rocío Poveda Bautista – INGENIO (CSIC-UPV), Universitat Politècnica de València

VII

COMUNICACIÓN EFECTIVA Y PENSAMIENTO CRÍTICO ANTE LA IA EN ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS EN ESTUDIOS DE INGENIERÍA

FRANCISCO JAVIER PÉREZ BENITO, MARÍA JOSÉ PÉREZ
PEÑALVER

SE presentan dos dinámicas activas implementadas en la asignatura *Matemáticas II* del Grado en Ingeniería Ambiental (GIA) de la Universitat Politècnica de València durante el curso 2025–26. La primera dinámica, basada en la revisión entre pares (*peer review*), busca que el alumnado desarrolle criterios de calidad comunicativa en matemáticas mediante la evaluación comparada de dos soluciones con características contrastadas: resultado correcto con comunicación deficiente frente a resultado incorrecto con comunicación excelente. La segunda dinámica propone que los estudiantes resuelvan ejercicios de cálculo diferencial e integral y los mejoren posteriormente con herramientas de inteligencia Artificial (IA), reflexionando de forma crítica sobre sus capacidades y limitaciones. Los resultados obtenidos mediante sondeos en tiempo real con Wooclap ($n \approx 18$) sugieren que ambas experiencias pueden favorecer la reflexión sobre la relación entre claridad expositiva, comprensión matemática y uso crítico de la IA en contextos de aprendizaje técnico.

INTRODUCCIÓN

La comunicación matemática es una competencia frecuentemente infravalorada en la enseñanza de las matemáticas en las titulaciones de

ingeniería. Los estudiantes de primer curso tienden a identificar el éxito en la resolución de un ejercicio con la obtención del resultado numérico correcto, desatendiendo la coherencia argumentativa, la justificación de los pasos intermedios y la claridad expositiva [1, 2]. Sin embargo, un resultado correcto presentado sin estructura ni razonamiento visible no es suficiente para demostrar comprensión profunda, y puede incluso generar dudas razonables sobre la autoría intelectual de la solución [1, 2].

Este problema adquiere una dimensión nueva con la irrupción de los modelos de lenguaje de gran escala (LLM), como ChatGPT, Claude, Copilot o Gemini, en el ámbito académico. Estos sistemas son capaces de generar soluciones aparentemente detalladas y bien redactadas a ejercicios de cálculo o álgebra, pero cometen errores sistemáticos, especialmente en cómputo numérico, y lo hacen sin advertirlo ni reconocerlo [3, 4]. El riesgo para el aprendizaje es doble: el estudiante que copia una solución de la IA sin comprenderla puede obtener resultados incorrectos que no es capaz de detectar, y el que sí los detecta puede verse tentado a presentar únicamente el resultado limpio, omitiendo la argumentación.

En este contexto, la asignatura *Matemáticas II* del GIA de la UPV ha incorporado en el curso 2025–26 dos dinámicas de aula orientadas a trabajar explícitamente la competencia transversal *Comunicación efectiva en matemáticas* y a concienciar al alumnado sobre las implicaciones del uso de la IA en su proceso de aprendizaje. El objetivo de esta comunicación es describir el diseño de ambas dinámicas, presentar los resultados obtenidos a través de sondeos en tiempo real y discutir las implicaciones pedagógicas que se derivan de su comparación.

MARCO TEÓRICO

La revisión entre pares (*peer assessment*) es una metodología activa con respaldo empírico sólido en educación superior. Topping [5] muestra que los procesos de evaluación de trabajos ajenos desarrollan habilidades metacognitivas y criterios de calidad que los estudiantes difícilmente adquieren únicamente a través de la evaluación del profesorado. Boud, Cohen y Sampson [6] señalan que la calidad del feedback que el alumnado es capaz de producir está correlacionada con su propia comprensión conceptual: evaluar bien exige comprender bien, una idea que también se relaciona con la taxonomía de Bloom en su nivel de evaluación.

En el ámbito específico de la escritura matemática, Morgan [1] argumenta que la producción de texto matemático coherente no es un epifenómeno

del aprendizaje, sino una parte constitutiva de él: articular el razonamiento por escrito obliga a explicitar presupuestos implícitos y a detectar saltos lógicos que pasan desapercibidos en el pensamiento silencioso. En esta misma línea, la tradición clásica del aprendizaje autorregulado (Zimmerman [14]) destaca que la capacidad de planificar, supervisar y ajustar la propia actuación cognitiva es esencial para construir comprensión profunda. En este sentido, Nicol y Macfarlane-Dick [7] conectan la evaluación formativa con el aprendizaje autorregulado: el estudiante que puede juzgar la calidad de una solución propia o ajena ha desarrollado un estándar interno que guía su actividad cognitiva.

Respecto al uso de la IA en educación, la literatura reciente es cautelosa. Kasneci et al. [4] señalan que las herramientas generativas ofrecen oportunidades reales para la retroalimentación personalizada, pero conllevan riesgos igualmente reales si el estudiante no dispone de competencia suficiente para verificar sus salidas. Frieder et al. [3] documentan experimentalmente las limitaciones matemáticas de los LLM: aunque dominan la estructura formal de las demostraciones, presentan tasas de error significativas en cálculo numérico y en la aplicación mecánica de algoritmos. Este fenómeno, denominado *alucinación confiada*, es especialmente peligroso en un contexto pedagógico, pues el modelo no señala incertidumbre incluso cuando comete errores graves.

Además, conviene situar estas limitaciones en un contexto histórico. Los modelos de lenguaje de gran escala han evolucionado de forma muy rápida en los últimos años: desde los primeros sistemas de “transformers” hasta los grandes modelos fundacionales más recientes, han mejorado notablemente su capacidad para generar texto coherente, razonar sobre consultas complejas y resolver tareas de lenguaje y programación con mayor eficacia. Sin embargo, ese progreso no ha eliminado los errores ni la necesidad de verificación humana, especialmente en contextos matemáticos donde la corrección formal y la precisión computacional siguen siendo críticas [3, 4].

DESCRIPCIÓN DE LAS DINÁMICAS

Las dos dinámicas se desarrollaron en sesiones de prácticas de aula de la asignatura *Matemáticas II*, del primer curso del Grado en Ingeniería Ambiental (GIA) de la Universitat Politècnica de València. El grupo de estudiantes estaba compuesto por 54 alumnos, de los cuales aproximadamente un tercio participó en las dinámicas ($n \approx 18$ estudiantes). La recogida

de datos se realizó mediante sondeos en tiempo real con la herramienta Wooclap.

Dinámica 1: Revisión entre pares (*peer review*)

Con anterioridad a la sesión, los estudiantes resolvieron en casa un ejercicio de álgebra lineal (diagonalización de matrices). En clase, en primer lugar el docente argumentó y resolvió el problema para, posteriormente, presentar dos soluciones anónimas de estudiantes con características deliberadamente contrastadas para ilustrar de forma explícita el contraste entre rigor comunicativo y corrección del resultado (ver Anexo .1):

- **Ejemplo 1:** resultado matemático correcto, pero comunicación muy deficiente (pasos no justificados, ausencia de conectores lógicos, notación inconsistente con la explicada en clase).
- **Ejemplo 2:** comunicación excelente (estructura clara, justificación de cada paso, lenguaje matemático preciso), pero con un error en el cómputo final.

Los estudiantes evaluaron ambas soluciones respondiendo a un cuestionario estructurado vía Wooclap antes y después de que el docente evaluase en voz alta sus criterios de corrección en un acto evaluable. Después de la puesta en común, se repartió de manera anónima y aleatoria dos ejercicios a cada estudiante para que los evaluaran y de esa manera cada alumno obtuviese una nota obtenida a través de la dinámica de revisión entre pares (*peer review*).

Dinámica 2: Resolución de ejercicios y mejora con IA

En una segunda sesión, los estudiantes resolvieron individualmente dos ejercicios de cálculo: (a) la ecuación diferencial ordinaria $y'' - 2y' = xe^{2x}$ y (b) la expresión en coordenadas polares del conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+3)^2 \leq 9, x \geq 0\}$. Cada ejercicio se desarrolló en dos fases: resolución individual (20 min) con entrega en PoliformaT, y mejora de la solución propia mediante una herramienta de IA a elección del estudiante (7 min), con entrega del resultado mejorado. Finalizada la fase de mejora, los estudiantes respondieron a un cuestionario reflexivo sobre su experiencia.

RESULTADOS DE LA DINÁMICA 1

Evaluación del Ejemplo 1 (correcto pero mal comunicado)

Los resultados del sondeo inicial (sin los criterios de corrección) revelan una percepción consistentemente positiva sobre la calidad del Ejemplo 1, dado que el resultado era correcto; la media de las notas asignadas fue de **7,6/10**. Tras la puesta en común, la nota descendió a **5,5/10**, lo que sugiere que la reflexión sobre los criterios de corrección llevó a los estudiantes a identificar un potencial uso de inteligencia artificial que derivó en una falta de comprensión detrás de la solución, penalizando su calidad comunicativa. La siguiente tabla muestra las respuestas a las preguntas cerradas del sondeo, que evidencian una percepción mayoritaria de que el Ejemplo 1 no demuestra dominio del procedimiento ni claridad expositiva, a pesar de que el 100 % de los estudiantes reconoció la corrección del resultado final.

Cuadro VII.1: Percepciones sobre el Ejemplo 1 ($n = 16-18$).

Pregunta	Sí	No
¿Parece saber lo que está haciendo?	22 %	78 %
¿Es fácil saber qué se está haciendo?	33 %	67 %
¿Se demuestra el <i>background</i> teórico?	24 %	76 %
¿El resultado es correcto?	100 %	0 %

El dato más llamativo es la pregunta sobre autoría implícita (Figura VII.1): el 56 % de los estudiantes eligió la opción «*parece saber menos de lo que demuestra (¿copiada? ¿IA?)*», frente al 17 % que consideró que el autor «*sabe más de lo que demuestra*». Este resultado pone de manifiesto que una solución correcta pero comunicativamente opaca genera desconfianza sobre la comprensión real del estudiante, e incluso suscita la sospecha de uso no crítico de fuentes externas.

Evaluación del Ejemplo 2 (incorrecto pero bien comunicado)

El contraste con el Ejemplo 2 es radical (Tabla VII.2). A pesar de que el 78 % de los estudiantes identificó el resultado final como incorrecto, el 100 % consideró que el autor demostraba dominio del procedimiento y que el ejercicio era fácil de seguir. El sondeo sobre la calificación que le darían al Ejemplo 2 inicialmente mostró una media de **3,7/10**, pero tras las

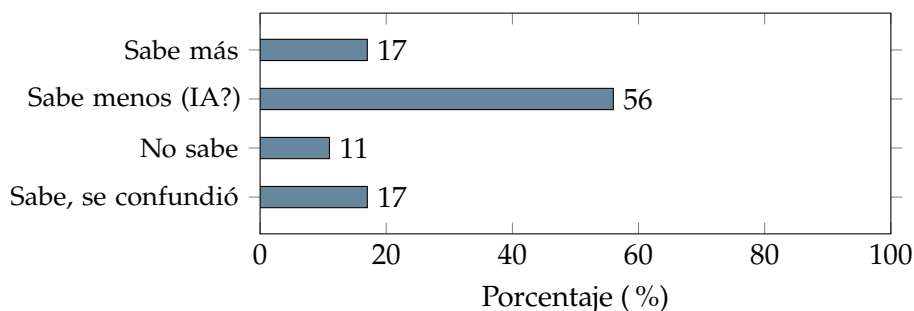


Figura VII.1: Afirmación elegida sobre el Ejemplo 1 ($n = 18$).

reflexiones de las preguntas de la encuesta, la nota media asignada fue de **8,5/10**, lo que sugiere que los estudiantes valoraron altamente la calidad comunicativa a pesar de detectar el error final.

Cuadro VII.2: Percepciones sobre el Ejemplo 2 ($n = 16-18$).

Pregunta	Sí	No
¿Parece saber lo que está haciendo?	100 %	0 %
¿Es fácil saber qué se está haciendo?	100 %	0 %
¿Se demuestra el <i>background</i> teórico?	100 %	0 %
¿El resultado es correcto?	22 %	78 %

Valoración global de la dinámica

La satisfacción con la Dinámica 1 fue alta en todos los ítems (Tabla VII.3), siendo especialmente relevante la puntuación de 4,7/5 en la comprensión del criterio evaluador docente. La afirmación negativa de control («*Esta dinámica no sirve para nada*») obtuvo la puntuación más baja (1,8/5), lo que valida la coherencia interna del sondeo.

RESULTADOS DE LA DINÁMICA 2

Reflexión cualitativa sobre la experiencia con IA

Las respuestas abiertas de los estudiantes (pregunta, “¿Has conseguido que la IA te ayude a expresarte mejor (comunicación efectiva) en la solución

Cuadro VII.3: Ítems de satisfacción de la Dinámica 1 (escala 1–5, $n = 13$).

Ítem	Media
El <i>peer review</i> me ayudó a afianzar conocimientos	4,1
Me ayudó a comprender cómo evalúan los profesores	4,7
Me gustaría repetir dinámicas similares	4,3
Recomendaré esta actividad a compañeros ausentes	4,5
Esta dinámica no sirve para nada	1,8

de los ejercicios? ¿Cómo? Explica y reflexiona sobre la experiencia: aspectos positivos y/o negativos”, $n = 11$) revelan una actitud mayoritariamente positiva pero matizada hacia el uso de la IA como herramienta de mejora comunicativa.

Para ilustrar el efecto de la IA sobre la comunicación matemática, se pueden comparar ejemplos de soluciones previas y posteriores a la mejora con IA. Los patrones más recurrentes fueron:

- *Utilidad estructural*: la IA ofrece explicaciones escalonadas y más desarrolladas que mejoran la legibilidad de la solución propia.
- *Desconfianza en resultados numéricos*: la mayoría de los estudiantes advirtió que la IA «se suele equivocar», especialmente en cálculos concretos.
- *Riesgo de sobredependencia*: un estudiante expresó explícitamente que «no nos tenemos que dejar llevar por la pereza y proporcionarle todos los problemas que tengas».
- *Limitación sin base*: un estudiante reconoció que la IA le fue de poca utilidad porque no tenía suficiente comprensión previa para orientar su uso.

Comparación entre soluciones sin IA y con IA

Para analizar de forma más concreta la incidencia de la IA en este ejercicio, se compararon las 15 parejas (con y sin IA) de los alumnos que participaron en la dinámica. La diferencia más visible no aparece en el resultado final de la ecuación diferencial, sino en la forma de presentar el razonamiento. Las versiones sin IA suelen ser más breves, más directas y más próximas al registro de un borrador de clase: muestran el procedimiento de forma lineal, con menos explicaciones intermedias y con una

formulación más personal. Por el contrario, las versiones elaboradas con IA tienden a presentar una redacción más organizada, con pasos mejor delimitados, transiciones más explícitas y un estilo más homogéneo, lo que mejora la legibilidad del escrito (ver Anexo .2). En varios casos, este efecto de mejora formal se acompaña de una mayor sensación de seguridad del estudiante, aunque no siempre de una mayor comprensión matemática: la IA puede sustituir en parte la tarea de ordenar el pensamiento, pero no garantiza que el alumno haya verificado cada paso o que haya comprendido la justificación subyacente. En otras palabras, la diferencia principal entre ambos modos de trabajo es que el uso de la IA mejora sobre todo la *forma* de la solución, mientras que la *corrección* y la *comprensión* siguen dependiendo de la capacidad del estudiante para revisar, corregir y evaluar críticamente lo que se ha producido.

Conciencia crítica sobre limitaciones de la IA

Las preguntas cerradas de la Dinámica 2 muestran un nivel de conciencia crítica muy elevado en algunos aspectos, pero revelan también una falacia de verificación que merece atención (Tabla VII.4).

El 92 % de los estudiantes asoció correctamente la incapacidad de detectar errores de la IA con una comprensión conceptual insuficiente, y el 100 % rechazó que la confianza expresada por el modelo sea un indicador de corrección. Sin embargo, el 73 % consideró que la coincidencia entre varias IAs constituye garantía suficiente, lo que evidencia una comprensión incompleta de la naturaleza sistémica de los sesgos de entrenamiento.

DISCUSIÓN COMPARATIVA Y CUESTIONES PARA EL DEBATE

Las dos dinámicas presentadas abordan la competencia *Comunicación efectiva en matemáticas* desde ángulos complementarios pero profundamente relacionados.

La Dinámica 1 parte de un ejercicio de desacoplamiento entre calidad comunicativa y corrección del resultado. El hallazgo clave es que los estudiantes, en su rol de evaluadores, discriminan perfectamente entre ambas dimensiones: penalizan severamente la opacidad comunicativa del Ejemplo 1 (nota media 5,5) aunque sepan que el resultado es correcto, y valoran altamente la claridad del Ejemplo 2 (nota media 8,5) a pesar de detectar el error final. Más aún, la comunicación deficiente activa espontáneamente la sospecha de uso no legítimo de IA o fuentes externas

Cuadro VII.4: Ítems de conciencia crítica sobre la IA ($n = 10-12$).

Pregunta	Respuesta mayoritaria	%
Si utilizas una IA para resolver un examen de matemáticas y no detectas sus errores, o utilizas resultados/métodos no vistos en clase, ¿qué revela esto sobre tu aprendizaje?	Que no has desarrollado suficiente comprensión de los conceptos para evaluar la validez de una solución	92
Ninguna de las IAs advierte en ningún momento que las soluciones podrían cometer errores, ¿qué implica esto para el uso de la IA en matemáticas?	Que la confianza expresada por una IA no es un indicador de corrección, la verificación humana es siempre necesaria	100
¿Crees que puedes tener la certeza de que la solución de un ejercicio por una IA, aunque lo hayas verificado con otras IAs, es correcta?	Solo si todas las IAs que consulto coinciden	73

(56 % del alumnado), lo que establece un vínculo directo entre calidad de escritura y evidencia de comprensión.

La Dinámica 2 traslada al estudiante al rol opuesto: ya no evalúa la comunicación ajena, sino que intenta mejorar la propia con ayuda de la IA. Los resultados cualitativos muestran que la IA es percibida como útil para estructurar y redactar, pero no para garantizar la corrección matemática. El 100 % de los participantes reconoce que la verificación humana es imprescindible; sin embargo, un porcentaje relevante (73 %) otorga valor probatorio a la coincidencia entre modelos distintos. Esta última creencia es problemática: los LLM comparten conjuntos de entrenamiento similares y sus errores no son estadísticamente independientes, por lo que la concordancia entre ellos no equivale a verificación matemática.

La tensión central que emerge de ambas dinámicas puede formularse así: *la IA puede mejorar la forma de una solución sin garantizar ni siquiera preservar su corrección matemática*. Esto reproduce estructuralmente el Ejemplo 1 de la Dinámica 1 en sentido inverso: si en aquella dinámica los estudiantes

aprendieron que un buen resultado no justifica una comunicación pobre, en esta segunda dinámica descubren que una buena comunicación tampoco valida un resultado incorrecto. Estas dos experiencias, articuladas secuencialmente, construyen un mapa cognitivo bidimensional de la calidad matemática: las dimensiones de *rigor* y *comunicación* son autónomas y ambas necesarias.

Algunas cuestiones que estas dinámicas plantean para el debate en la comunidad docente son las siguientes:

1. ¿Debería la *calidad comunicativa* ponderarse explícitamente en los criterios de corrección de los exámenes de matemáticas en ingeniería, o basta con penalizarla implícitamente como indicador de comprensión?
2. ¿Cuál es el umbral de competencia matemática necesario para que el uso de la IA sea pedagógicamente beneficioso y no contraproducente? ¿Puede diseñarse una secuencia didáctica que garantice que ese umbral se alcanza antes de exponer al estudiante a las herramientas generativas?
3. La creencia mayoritaria de que la coincidencia entre varias IAs garantiza la corrección de un resultado constituye una *falacia de verificación independiente*. ¿Cómo puede abordarse pedagógicamente esta creencia sin fomentar una postura de rechazo total hacia la IA?
4. ¿En qué medida la actividad de *peer review* desarrolla, más allá de las habilidades comunicativas, la competencia de evaluación necesaria para interactuar críticamente con la IA?

CONCLUSIONES

Las dos dinámicas descritas demuestran que es posible trabajar la competencia de comunicación matemática y la alfabetización crítica ante la IA de forma integrada y eficaz en el contexto de una asignatura de matemáticas de ingeniería de primer curso. La Dinámica 1 muestra que los estudiantes son capaces de reconocer y valorar la calidad comunicativa de forma autónoma cuando se les proporciona el marco adecuado para hacerlo. La Dinámica 2 revela que la IA puede ser un catalizador de la reflexión sobre el aprendizaje, pero requiere una mediación docente que prevenga la instalación de creencias erróneas sobre la fiabilidad de los modelos. Ambas experiencias, tomadas conjuntamente, apuntan hacia un modelo de enseñanza de las matemáticas en ingeniería que no eluda la

presencia de la IA, sino que la convierta en objeto de estudio y herramienta de pensamiento crítico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la participación activa del alumnado del grupo GIA de *Matemáticas II* del curso 2025–26.

REFERENCIAS

- [1] Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation*. London: Falmer Press.
- [2] Pugalee, D.K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1–3), 27–47. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017666.11367.c7>
- [3] Frieder, S., Pinchetti, L., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T., Petersen, P., & Berner, J. (2024). Mathematical capabilities of ChatGPT. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (NeurIPS 2023), vol. 36. <https://arxiv.org/abs/2301.13379>
- [4] Kasneci, E., Seßler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., ... & Kasneci, G. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, 103, 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>
- [5] Topping, K.J. (1998). Peer assessment between students in colleges and universities. *Review of Educational Research*, 68(3), 249–276. <https://doi.org/10.3102/00346543068003249>
- [6] Boud, D., Cohen, R., & Sampson, J. (1999). Peer learning and assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 24(4), 413–426. <https://doi.org/10.1080/0260293990240405>
- [7] Nicol, D.J., & Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, 31(2), 199–218. <https://doi.org/10.1080/03075070600572090>

- [8] Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., & Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7), em2286. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13261>
- [9] Universitat Politècnica de València (2012). *Competencias transversales UPV*. <https://www.upv.es/contenidos/COMPTRAN/>

AFILIACIONES

Francisco Javier Pérez Benito – Departamento de Matemática Aplicada,
Universitat Politècnica de València

María José Pérez Peñalver – Departamento de Matemática Aplicada,
Universitat Politècnica de València

ANEXO 1: EJEMPLOS DE LA DINÁMICA 1

Para ilustrar el contraste descrito en la Dinámica 1, se incluyen a continuación dos ejemplos de soluciones de un mismo ejercicio. El *ejemplo 1* muestra una solución correctamente resuelta desde el punto de vista del resultado final, pero sin utilizar los métodos ni la notación vista en clase; el *ejemplo 2* muestra una solución con un razonamiento coherente y alineado con lo trabajado en clase, aunque presenta un fallo de cálculo en el resultado final.

PRÁCTICA ANA 2

0) $f(x,y,z) = x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-4)(\lambda+2)^2$

$\lambda_1 = 4$ con multiplicidad algebraica $a_1 = 1$

$\lambda_2 = -2$ con multiplicidad algebraica $a_2 = 2$

Dimensiones, subespacios propios

$\lambda_1 = 4$, multiplicidad geométrica m_1 es siempre 1

$\lambda_2 = -2$, rango de $(A + 2I)$

$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \lambda \sim m_2 = 3 - 1 = 2$

• Como $a_i = m_i$ para todos los autovalores, la matriz es diagonalizable.

Matrices D y P:

$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

• Autovectores para F

$V_4 = \text{gen}\{(1,1,2)\}$

$V_{-2} = \text{gen}\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Figura 2: Ejemplo 1: solución correcta en resultado, pero sin utilizar los métodos y la notación vistos en clase.

Problema 1:

$$f(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$$

a) La matriz asociada a f es:
 (calculamos las imágenes de los vectores en la base canónica.)
 $f(1, 0, 0) = (1, 3, 6)$ $f(0, 1, 0) = (-3, -5, -6)$ $f(0, 0, 1) = (3, 3, 4)$

La matriz aplicación es:

$$f_{cxc} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Para comprobar si es diagonalizable: $\rightarrow$ calculada otra hoja)

$$p(\lambda) = |f_{cxc} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cancel{\lambda^3 - 12\lambda^2 + 16\lambda} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$$

(calculadora)

$\hookrightarrow \lambda = 4 \quad \lambda = -2 \quad \lambda = -2$

$\sigma(f_{cxc}) = \{4, -2\}$ } Valores propios
 $m_a(4) = 1$
 $m_g(-2) = 2$

Vectores asociados:

$E_1 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\} = \{(0, 1, 1)\}$

$E_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A = P_1 D P_1^{-1}$

b)

Figura 3: Ejemplo 2: solución con razonamiento coherente y alineado con la clase, pero con un fallo de cálculo.

ANEXO 2: EJEMPLOS DE SOLUCIONES DE LA DINÁMICA 2

Para ilustrar de forma visual los cambios observados en la dinámica 2, se incluyen a continuación dos ejemplos representativos de soluciones entregadas por el alumnado antes y después de la mejora con IA.

7/39 EXAMEN MODELO:

$6 \cdot y'' - 7y' = x e^{2x}$

polinomio característico: multiplicamos por $\lambda^2 - 2\lambda = 0$; $\lambda(\lambda - 2) = 0$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$

$y_p(x) = x^r \cdot e^{ax}$ $r=1$ $m(x)$

$y_p(x) = x^r \cdot e^{ax} \cdot x \cdot e^{2x}$

calculamos las derivadas:

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = r \cdot e^{ax} \cdot a \cdot 2e^{2x}$

$\frac{\partial}{\partial x} y = e^{ax} \cdot 4e^{2x}$

$y = a \cdot e^0 + c_1 \cdot e^{2x}$

$\lambda = \frac{2}{2} = 1$

EXERCICIO 6:

$y'' - 2y' = x e^{2x}$

Resolvamos primero la homogénea:

$\lambda^2 - 2\lambda = 0$; $\lambda(\lambda - 2) = 0$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$

$y_h(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$

Para la particular:

El término no homogéneo es $x e^{2x}$, como e^{2x} ya aparece en la homogénea, probamos con:

$y_p(x) = e^{2x}(A x^2 + B x + C)$

Sea:

$u(x) = A x^2 + B x + C$

entonces:

$y_p = e^{2x} u$; $y' = e^{2x}(u' + 2u)$; $y'' = e^{2x}(u'' + 4u' + 4u)$

Sustituimos la ecuación:

$y'' - 2y' = e^{2x}(u'' + 4u' + 4u) - 2e^{2x}(u' + 2u) = e^{2x}(u'' + 2u')$

Igualamos:

$e^{2x}(u'' + 2u') = x e^{2x} \Rightarrow u'' + 2u' = x$

Calculamos:

$u = A x^2 + B x + C$

$u' = 2A x + B$

$u'' = 2A$

Entonces:

$u'' + 2u' = (2A) + 2(2A x + B) = 4A x + 2A + 2B = x$

Comparando coeficientes:

$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$2A + 2B = 0 \Rightarrow 2(\frac{1}{4}) + 2B = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + 2B = 0 \Rightarrow 2B = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$

$C = 0$

Así:

$u(x) = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x$; $y_p(x) = e^{2x}(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x)$

Figura 4: Solución inicial sin IA (Alumno 1).

Figura 5: Versión mejorada con IA (Alumno 1).

$y'' - 2y' - x e^{2x} \rightarrow y'' - 2y' = x e^{2x}$
 $y'' - 2y' = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$
 $y_h(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$
 2º. resolver la particular
 $b(x) = x e^{2x} = P_m(x) \cdot e^{ax}$
 $m=1, a=2$
 $\lambda = 2$ es raíz de $\lambda^2 - 2\lambda = 0$
 $y_p(x) = x^2 e^{2x} (ax^2 + bx)$
 $y_p' = 2e^{2x}(ax^2 + bx) + e^{2x}(2ax + b) = e^{2x}(2ax^2 + 2bx + 2ax + b)$
 $y_p'' = 4e^{2x}(ax + b) + 2e^{2x}(2a) = e^{2x}(4ax + 4b + 4a)$
 $y_p'' - 2y_p' = e^{2x}(4ax + 4b + 4a - 2(2ax^2 + 2bx + 2ax + b)) = x e^{2x}$
 $e^{2x}(4ax + 4b + 4a - 4ax^2 - 4bx - 4ax - 2b) = x e^{2x}$
 $-4ax^2 + (4a - 4b - 4a)x + (4b + 4a - 2b) = x$
 $-4ax^2 + (-4b)x + (2b + 4a) = x$
 $-4a = 0 \rightarrow a = 0$
 $-4b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{4}$
 $2b + 4a = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$
 $y_p(x) = x^2 e^{2x} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right)$
 $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{2x} + x^2 e^{2x} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right)$

Figura 6: Solución inicial sin IA (Alumno 2).

$y'' - 2y' - x e^{2x}$
 Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada planteando la ecuación característica $p(\lambda)$
 $y'' - 2y' = 0$
 $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$
 Por tanto, la solución homogénea será:
 $y_h(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} \rightarrow y_h(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$
 Luego, para resolver la ecuación completa particular:
 como $b(x) = x e^{2x} = e^{2x} Q_m(x) \rightarrow y_p(x) = x^r e^{ax} P_m(x)$
 tenemos $a=2, m=1, r=1$ (porque $\lambda=a=2$ tiene multiplicidad 1)
 $y_p(x) = x^2 e^{2x} (ax + b)$
 Para averiguar a y b calculamos y_p', y_p'' y $q(x)$
 cumple $y'' - 2y' = x e^{2x}$
 $y_p'(x) = e^{2x}(2ax + b) + 2e^{2x}x = e^{2x}(2ax + b + 2x)$
 $y_p''(x) = 2e^{2x}(a + 1) + 2e^{2x} = e^{2x}(2a + 2 + 2)$
 $y_p'' - 2y_p' = e^{2x}(2a + 2 + 2 - 2(2ax + b + 2x)) = x e^{2x}$
 $e^{2x}(2a + 4 - 4ax - 2b - 4x) = x e^{2x}$
 $(2a + 4 - 2b - 4a)x + (2a + 4 - 2b) = x$
 $-2ax + (2a + 4 - 2b) = x$
 $-2a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$
 $2a + 4 - 2b = 0 \rightarrow b = \frac{2a + 4}{2} = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2}$
 $y_p(x) = x^2 e^{2x} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right)$
 $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{2x} + x^2 e^{2x} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right)$

Figura 7: Versión mejorada con IA (Alumno 2).

VIII

DE LAS CURVAS PLANAS A LA CONSTRUCCIÓN DE FORMAS: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN GEOMETRÍA DIFERENCIAL

CLARA BURGOS SIMÓN, JUAN CARLOS CORTÉS LÓPEZ, ANA
NAVARRO QUILES

EN este trabajo se presenta y se motiva una sesión de Aula de Informática para el bloque de Geometría Diferencial de la asignatura *Métodos Matemáticos*, impartida en el Grado en Ingeniería en Geomática y Topografía de la Universitat Politècnica de València. En la parte teórica de este bloque se estudian las curvas planas en $\mathbb{R}^2$ mediante ecuaciones paramétricas e implícitas. Además, se presta especial atención a la explicación de conceptos como la regularidad y las rectas tangente y normal.

La propuesta plantea una metodología activa y visual en la que el alumnado construye figuras reconocibles mediante la combinación de curvas en $\mathbb{R}^2$, justificando matemáticamente las curvas empleadas y las relaciones geométricas entre ellas. La actividad incorpora herramientas de Inteligencia Artificial (IA) como apoyo para la generación del código computacional a partir de las descripciones proporcionadas por el alumnado. Este enfoque favorece la comprensión de las definiciones formales al relacionarlas con su interpretación geométrica en un contexto cercano a la titulación.

INTRODUCCIÓN Y CONTEXTO

El Grado en Ingeniería en Geomática y Topografía de la Universitat Politècnica de València (UPV) forma a profesionales capaces de capturar, gestionar, modelar, analizar y representar el terreno. En este ámbito, el conocimiento y manejo adecuado de las curvas planas resulta especialmente relevante, ya que la representación, el análisis y la interpretación de formas geométricas aparecen de manera natural en problemas relacionados con trayectorias, perfiles, alineaciones, contornos o elementos del terreno.

En el plan de estudios anterior existía una asignatura específica dedicada a la Geometría Diferencial. Con la adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (plan Bolonia), estos contenidos se integraron en la asignatura *Métodos Matemáticos*, impartida en el segundo cuatrimestre del primer curso. Dicha asignatura se organiza en cuatro bloques: Trigonometría Plana y Esférica, Estadística, Interpolación y Geometría Diferencial.

El bloque de Geometría Diferencial tiene una duración aproximada de cuatro semanas (unas 12 horas de teoría y 4 horas de prácticas) y se imparte en el mes de mayo, al final del curso. Este contexto temporal supone un reto docente añadido: el alumnado llega con cansancio acumulado y una motivación reducida. La propuesta que aquí se describe nace precisamente con el objetivo de motivar al estudiantado y de hacer tangible la utilidad de los conceptos estudiados.

EL BLOQUE DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

El bloque se estructura en tres unidades temáticas fundamentales:

1. **Curvas en $\mathbb{R}^2$.** Curvas planas: representación paramétrica, implícita y explícita. Diferentes tipos de curva. Recta tangente y recta normal.
2. **Curvas en $\mathbb{R}^3$.** Curvas en el espacio. Triedro de Frenet, curvatura y torsión.
3. **Superficies en $\mathbb{R}^3$.** Superficies paramétricas e implícitas. Plano tangente y recta normal.

La propuesta didáctica de este trabajo se centra en la primera unidad, Curvas en $\mathbb{R}^2$, aunque la metodología es extensible a las restantes.

Fundamentos: curvas en $\mathbb{R}^2$

Una curva plana puede describirse de tres formas equivalentes. En forma *paramétrica*, mediante una aplicación

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b];$$

en forma *implícita*, como el conjunto de puntos que satisfacen $F(x, y) = 0$; y en forma *explícita*, como la gráfica $y = f(x)$.

Para una curva paramétrica, se dice que es *regular* en un punto si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$; para una curva implícita, la condición de regularidad viene dada por $\nabla F \neq \mathbf{0}$. En todo punto regular quedan bien definidas:

- La **recta tangente**, con dirección $\mathbf{r}'(t_0)$ en el punto $\mathbf{r}(t_0)$ (caso paramétrico). En el caso implícito, el gradiente $\nabla F(x_0, y_0)$ es perpendicular a la tangente.
- La **recta normal**, perpendicular a la recta tangente en el punto de contacto.

Los conceptos de regularidad, recta tangente y recta normal constituyen la base teórica sobre la que se desarrolla la actividad práctica propuesta, permitiendo al alumnado relacionar las distintas representaciones de las curvas con sus propiedades geométricas fundamentales.

PROPUESTA DIDÁCTICA: DE LA TEORÍA A LA CONSTRUCCIÓN

Tradicionalmente, la sesión de prácticas se dedica a visualizar los conceptos de recta tangente y normal mediante software *Mathematica*. La aportación de esta propuesta consiste en transformar esa visualización en una actividad de carácter activo y creativo, en la que el alumnado debe construir figuras reconocibles, como letras del abecedario u otras siluetas, combinando distintos tipos de curvas planas, entre ellas circunferencias, arcos de circunferencia, elipses y sus correspondientes rectas tangentes y rectas normales.

Este planteamiento favorece la comprensión de conceptos como la tangencia, la normalidad o la regularidad, al situarlos en un contexto cercano, manipulable y conectado con aplicaciones propias de la titulación.

El papel de la inteligencia artificial

La propuesta incorpora herramientas de IA como apoyo al proceso de diseño y construcción de las figuras. En particular, la IA ayuda al

alumnado a generar ideas iniciales, a descomponer una figura compleja en elementos geométricos simples y a traducir esas descripciones a código ejecutable (por ejemplo, en *Mathematica*). Es importante subrayar que la *validación matemática* de las curvas propuestas -la comprobación de los puntos de corte, el cálculo de rectas tangentes y normales, la verificación de la continuidad entre tramos- queda en manos del estudiantado. De este modo se promueve un uso crítico y reflexivo de la herramienta, en lugar de una dependencia acrítica.

El flujo de trabajo propuesto consta de cuatro pasos:

Paso 1. El alumno decide qué letra o forma quiere construir.

Paso 2. Comunica a la IA cómo hacerla: qué curvas son necesarias, con qué rangos del parámetro y en qué puntos de corte deben unirse.

Paso 3. La IA genera el código correspondiente.

Paso 4. El alumno visualiza el resultado, lo valida matemáticamente y lo ajusta.

Ejemplo 1: la letra “a”

Como primera actividad, se propone la construcción de la letra “a”, una figura que puede obtenerse combinando una circunferencia y una recta tangente. El alumnado describe a la IA la geometría deseada, indicando que el cuerpo de la letra debe corresponder a una circunferencia y que el “rabito” debe ser una recta tangente en uno de sus puntos. A partir de esta descripción, la IA genera el código en *Mathematica*, que posteriormente es analizado y validado por el estudiante.

El cuerpo de la letra se modela mediante la circunferencia unitaria en forma paramétrica,

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

con vector tangente $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$. En el punto $t_0 = 0$ se tiene $\mathbf{r}(0) = (1, 0)$ y $\mathbf{r}'(0) = (0, 1)$, de modo que la recta tangente admite la parametrización

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{r}(0) + s \mathbf{r}'(0) = (1, 0) + s (0, 1) = (1, s), \quad s \in [-1, 0].$$

Es, por tanto, la recta vertical $x = 1$, que hace las veces del “rabito” de la letra (Figura 1).

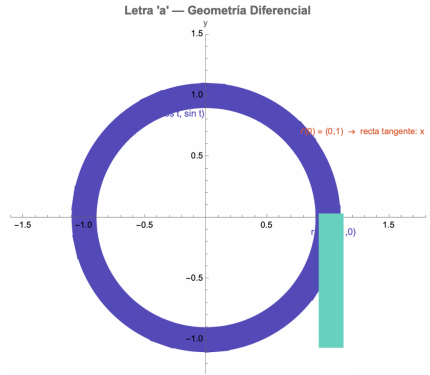


Figura VIII.1: Letra “a” construida con la circunferencia unitaria (morado) y la recta tangente en $t = 0$ (azul cielo).

Ejemplo 2: construcción de la letra “B”

Como segunda actividad, se propone la construcción de la letra “B”, una figura que requiere combinar una recta y dos semicircunferencias. En este caso, el alumnado describe a la IA la geometría deseada, indicando que el trazo vertical debe corresponder a una recta y que los dos lóbulos deben obtenerse mediante semicircunferencias de igual radio situadas a distinta altura. A partir de esta descripción, la IA genera el código en *Mathematica*, que posteriormente es analizado y validado.

El trazo vertical de la letra se representa en forma paramétrica mediante

$$\mathbf{r}_0(s) = (0, s), \quad s \in [-2, 2],$$

con vector tangente $\mathbf{r}'_0(s) = (0, 1)$, es decir, la recta vertical $x = 0$.

Los dos lóbulos se modelan mediante dos semicircunferencias de radio 1, centradas en $(0, 1)$ y $(0, -1)$, respectivamente. En forma paramétrica pueden escribirse como

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, 1 + \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

y

$$\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, -1 + \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Sus vectores tangentes vienen dados por

$$\mathbf{r}'_1(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'_2(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Las dos semicircunferencias se unen al trazo vertical en los puntos

$$(0, 2), \quad (0, 0), \quad (0, -2),$$

de modo que la figura resultante reproduce la letra “B”. En los puntos de unión, la tangente de los lóbulos es horizontal ($\mathbf{r}'_1(-\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$, etc.) mientras que la del trazo es vertical, $(0, 1)$; ambos elementos se empalman, por tanto, de forma perpendicular.

A partir de la representación obtenida, el alumnado comprueba que las semicircunferencias poseen los centros y radios especificados, verifica que los puntos de unión coinciden con los extremos de cada arco y analiza el comportamiento de los vectores tangentes en dichos puntos. Finalmente, el estudiantado ajusta las dimensiones de los distintos elementos hasta obtener la apariencia deseada de la letra (Figura VIII.2).

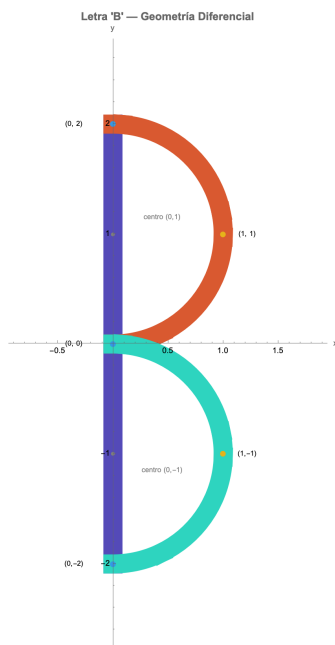


Figura VIII.2: Construcción de la letra “B” mediante una recta vertical y dos semicircunferencias de radio 1 con centros en $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Ejemplo 3: composición de varias curvas

Como tercera actividad, se propone la construcción de una figura formada por varios tramos de naturaleza diferente. En este caso, el alumnado

debe diseñar la silueta de un pez combinando un arco de circunferencia con tres segmentos rectilíneos. La IA genera el código correspondiente a partir de la descripción proporcionada por el alumnado, y posteriormente se verifica la correcta unión entre las distintas curvas y se ajustan los parámetros cuando sea necesario.

El cuerpo del pez se representa mediante un arco de la circunferencia unitaria mientras que las dos aletas y la cola se modelan mediante tres segmentos paramétricos. Las expresiones utilizadas se recogen en la Tabla VIII.1.

Cuadro VIII.1: Curvas empleadas en la construcción del pez.			
Curva	Descripción	Ecuación paramétrica	Dominio
r_1	Cuerpo (arco)	$(\cos t, \sin t)$	$t \in [-\pi/2, \pi/2]$
r_2	Aleta superior	$(-2t, 1 - 2t)$	$t \in [0, 1]$
r_3	Aleta inferior	$(-2t, -1 + 2t)$	$t \in [0, 1]$
r_4	Cola (vertical)	$(-2, t)$	$t \in [-1, 1]$

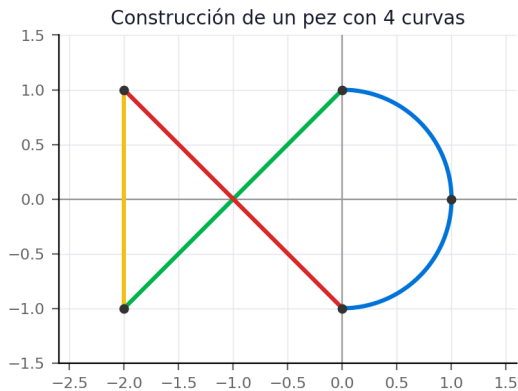


Figura VIII.3: Silueta de un pez construida con cuatro curvas: cuerpo (azul), aletas (verde y rojo) y cola (amarillo). Los puntos negros marcan las uniones entre tramos.

EVALUACIÓN

Las prácticas del bloque tienen un peso conjunto del 5 % de la nota final y engloban ejercicios de las tres unidades temáticas (Curvas en $\mathbb{R}^2$,

Curvas en $\mathbb{R}^3$ y Superficies en $\mathbb{R}^3$). Para evaluar la parte correspondiente a Curvas en $\mathbb{R}^2$, se pide al alumnado que desarrolle una letra del abecedario combinando las curvas estudiadas, describiendo la construcción matemática -curvas empleadas, dominios y puntos de unión- y generando el código correspondiente con ayuda de la IA. Se valora tanto la corrección matemática como la justificación geométrica de las decisiones tomadas.

CONCLUSIONES

La experiencia desarrollada pone de manifiesto el potencial de una metodología activa basada en la construcción de figuras mediante curvas planas para la enseñanza de la Geometría Diferencial. A partir de los ejemplos propuestos, el alumnado aplica los conceptos teóricos en un contexto visual y creativo, favoreciendo una comprensión más profunda de las distintas representaciones de las curvas y de sus propiedades geométricas.

En particular, pueden destacarse las siguientes aportaciones:

1. La actividad favorece el aprendizaje significativo al relacionar conceptos como la regularidad, la recta tangente y la recta normal, con la construcción de figuras reconocibles que el alumnado puede diseñar, visualizar y analizar.
2. La incorporación de herramientas de IA actúa como apoyo en la generación del código y en la exploración de alternativas geométricas, permitiendo que el esfuerzo del alumnado se centre en el razonamiento matemático, la validación de los resultados y la interpretación geométrica de las construcciones.
3. La posibilidad de crear figuras de dificultad creciente, desde letras sencillas hasta composiciones formadas por múltiples curvas, favorece un aprendizaje progresivo y adaptable a distintos niveles de competencia. La metodología puede extenderse a la construcción de logotipos, iconos o figuras de mayor complejidad, planteando retos abiertos que estimulan la creatividad y el razonamiento geométrico. Asimismo, esta propuesta resulta fácilmente transferible a otras titulaciones en las que interviene el diseño y la representación geométrica, como Ingeniería en Diseño Industrial y Desarrollo de Productos, Arquitectura, Ingeniería Civil o Ingeniería Mecánica, donde la modelización mediante curvas constituye una herramienta habitual.

4. El carácter creativo de la propuesta incrementa la implicación del alumnado, especialmente en las últimas semanas del curso, transformando una sesión tradicional de visualización en una actividad participativa en la que los estudiantes adoptan un papel protagonista.

En conjunto, la propuesta muestra que la combinación de metodologías activas, herramientas de IA y software de cálculo simbólico constituye un recurso eficaz para acercar la Geometría Diferencial al alumnado. Al construir y justificar matemáticamente figuras reconocibles, los estudiantes dejan de percibir las curvas como objetos abstractos y las entienden como herramientas con las que modelar y representar formas, reforzando así la comprensión conceptual y el desarrollo del razonamiento geométrico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar y al Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València el apoyo prestado.

REFERENCIAS

- [1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 2ª ed., Dover Publications, 2016.
- [2] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, 2ª ed., Springer, 2010.
- [3] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 14, Champaign, IL, 2024.
- [4] D. Panqueban y J. Huincahue, *Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Systematic Review*, Uniciencia, vol. 38, n.º 1, pp. 1–17, 2024.

AFILIACIONES

Clara Burgos Simón – Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

Juan Carlos Cortés López – Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

Ana Navarro Quiles – Instituto Universitario de Matemática Multidiscipli-
nar, Universitat Politècnica de València

IX

EL JUICIO AL MODELO: UNA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE BASADO EN ROLES PARA LA ENSEÑANZA DE XAI

ANDREA ARROYO RAMO, ANDRÉS CREMADES BOTELLA,
MARÍA JEZABEL PÉREZ QUILES, J. ALBERTO CONEJERO
CASARES

Se presenta “El Juicio al Modelo”, una propuesta de innovación docente desarrollada en el contexto del Máster Universitario en Computational Engineering & Industrial Mathematics (MUCEIM) de la Universitat Politècnica de València. La actividad plantea una simulación de validación industrial de un modelo de *Machine Learning* aplicado a un conjunto de datos. Los estudiantes trabajan de forma colaborativa cubriendo cuatro roles diferenciados: equipo de datos, equipo de XAI (*eXplanaible Artificial Intelligence*) y equipo de física y decisión. A través de este enfoque, se integra el entrenamiento de modelos, su interpretación mediante técnicas de inteligencia artificial explicable y su validación desde criterios físicos, finalizando en un debate estructurado que reproduce dinámicas de toma de decisiones en ingeniería. La propuesta busca reforzar la comprensión de modelos de IA en sistemas complejos, acercar la formación al entorno industrial y promover una visión de inteligencia artificial más interpretativa, crítica y responsable.

DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

La actividad propuesta, denominada “El Juicio al Modelo”, se inspira en dinámicas profesionales que se pueden encontrar en entornos industriales, en particular los procesos de validación y toma de decisiones. El objetivo principal consiste no sólo en construir un modelo de *Machine Learning* (ML), sino que el/la alumno/a adquiera la capacidad de interpretar su funcionamiento, analizar críticamente sus predicciones y justificar su posible implantación desde una perspectiva técnica y física.

Para ello, la actividad se desarrolla en torno a un escenario industrial ficticio en el que una empresa debe decidir si un modelo predictivo es suficientemente fiable para incorporarlo a un sistema de mantenimiento predictivo orientado al seguimiento de la degradación de componentes mecánicos. La empresa dispone de un conjunto de datos históricos procedentes de sensores industriales que recogen información sobre el estado operativo de diferentes elementos del sistema. A partir de dichos datos, el alumnado desarrolla un modelo de aprendizaje automático destinado a estimar el nivel de degradación de los componentes, detectar posibles fallos y predecir su vida útil restante.

Una vez entrenado el modelo, la empresa plantea una situación habitual en el ámbito industrial: aunque las métricas de rendimiento obtenidas son satisfactorias, la dirección técnica exige demostrar que las relaciones aprendidas por el algoritmo son coherentes con el comportamiento físico esperado antes de autorizar su despliegue. Este planteamiento permite introducir una de las principales limitaciones de los modelos de inteligencia artificial aplicados a la ingeniería, donde una elevada capacidad predictiva no constituye, por sí sola, un criterio suficiente para garantizar un uso seguro y fiable. En consecuencia, el alumnado debe integrar el análisis cuantitativo del modelo con criterios de interpretabilidad y plausibilidad física que respalden las decisiones adoptadas.

La metodología se fundamenta en el aprendizaje colaborativo mediante la asignación de roles, reproduciendo la organización multidisciplinar característica de los equipos de trabajo en la industria. Este enfoque trasciende el trabajo cooperativo tradicional, al promover la interdependencia entre los distintos equipos y la construcción conjunta del conocimiento a partir de responsabilidades complementarias, siguiendo estrategias de colaboración ampliamente utilizadas en la formación en ingeniería [1]. Cada grupo de estudiantes asume una responsabilidad específica dentro del proceso de desarrollo y validación del modelo, aportando una visión complementaria que resulta imprescindible para alcanzar una decisión

fundamentada sobre su viabilidad.

Con el objetivo de que todo el estudiantado participe en las distintas etapas del proceso, la actividad incorpora un sistema de roles rotativos. Inicialmente, los grupos trabajan sobre una tarea concreta: desarrollo del modelo, análisis XAI (*eXplanaible Artificial Intelligence*), validación física y toma de decisiones. Sin embargo, a lo largo de la actividad, los resultados generados por cada grupo son intercambiados entre equipos, permitiendo que todos los participantes trabajen progresivamente en cada uno de los roles planteados, como se describe en la Figura IX.1. Esta dinámica reproduce los procedimientos habituales de revisión y validación presentes en los entornos industriales, donde diferentes perfiles técnicos analizan e interpretan el trabajo desarrollado por otros departamentos antes de aprobar la implantación de una solución tecnológica.

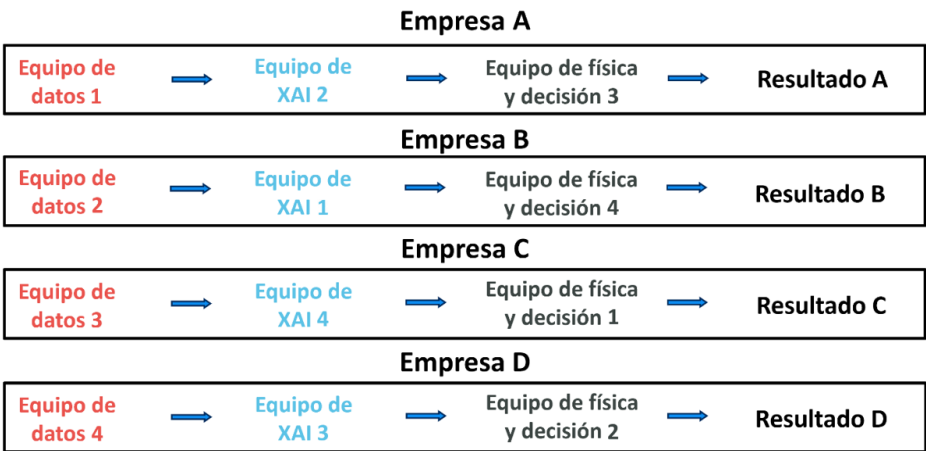


Figura IX.1: Esquema de interacciones entre grupos.

ORGANIZACIÓN POR ROLES

La actividad se estructura mediante un sistema de trabajo colaborativo basado en la asignación de roles complementarios. Cada rol está integrado por grupos de dos o tres estudiantes, en función del número de matriculados en la asignatura, y asume una responsabilidad específica dentro del proceso de desarrollo, interpretación y validación del modelo de *Machine Learning*. La distribución de tareas reproduce la organización habitual de equipos

multidisciplinares en el ámbito industrial, donde diferentes especialistas participan en la evaluación de una misma solución desde perspectivas complementarias.

Con el fin de favorecer la cooperación entre los distintos equipos, la actividad se organiza en torno a varias empresas ficticias, constituidas por la combinación de los diferentes grupos de trabajo, tal y como se representa en la Figura IX.1. De este modo, la resolución de la actividad requiere la contribución de todos los roles, ya que ninguno dispone de la información suficiente para emitir, de forma aislada, un juicio fundamentado sobre la viabilidad del modelo. Además, el sistema de rotación de roles garantiza que todo el alumnado participe en las distintas etapas del proceso de validación, promoviendo una visión global del ciclo de desarrollo de un sistema de inteligencia artificial aplicado a la ingeniería.

- **Equipo de datos:** responsable de la preparación y explotación inicial del conjunto de datos procedentes de las simulaciones CFD. Entre sus tareas se incluyen la selección de variables de entrada, el preproceso de datos, el entrenamiento del modelo y la evaluación de métricas de rendimiento. Este grupo trabaja principalmente sobre aspectos relacionados con: la calidad del conjunto de datos (*dataset*), la generalización, la reducción de error, la validación cruzada y la estabilidad del modelo. Además, el grupo debe justificar las decisiones tomadas durante el entrenamiento y defender la fiabilidad estadística de los resultados obtenidos.
- **Equipo XAI:** se encarga de analizar e interpretar el comportamiento interno del modelo mediante técnicas de inteligencia artificial explicable XAI. Para ello, el alumnado utiliza herramientas como el análisis SHAP (*SHapley Additive exPlanations*), en el cual se calcula la contribución de cada una de las características del sistema en cada una de las variables de interés en la predicción [2]. El objetivo de este grupo no consiste únicamente en visualizar resultados, sino en responder preguntas como:
 - ¿Qué variables dominan las predicciones?
 - ¿Cómo afectan determinadas magnitudes físicas al modelo?
 - ¿El modelo presenta regiones de baja confianza?

De este modo, los alumnos trabajan la interpretabilidad como herramienta de análisis crítico y no únicamente como recurso gráfico.

- **Equipo de física y decisión:** actúa como grupo de validación científica del modelo. Su función principal consiste en analizar si las relaciones

aprendidas por el algoritmo son coherentes con el comportamiento esperado en el ciclo de vida de los elementos analizados. Para ello, deben interpretar los resultados desde una perspectiva física, considerando aspectos como: tendencia física de degradación, relación entre variables y degradación, evolución temporal coherente, generalización operativa, coste del error, interpretabilidad, trazabilidad, incertidumbre y confianza. Este grupo desempeña un papel especialmente importante en la actividad, ya que introduce la idea de que un modelo predictivo no debe evaluarse únicamente mediante métricas numéricas, sino que deben utilizarse criterios físicos y de plausibilidad ingenieril. También es el encargado de determinar si el modelo puede utilizarse en un entorno industrial real. Para emitir un veredicto respecto a la implementación del modelo en un entorno industrial, debe tener en cuenta: precisión, interpretabilidad, robustez, coste computacional y riesgo asociado al uso del modelo. La inclusión de este rol permite introducir competencias relacionadas con la toma de decisiones técnicas en condiciones de incertidumbre, reproduciendo dinámicas habituales en procesos industriales de validación tecnológica.

FLUJO DE TRABAJO DE LA ACTIVIDAD

La actividad se desarrolla siguiendo una secuencia estructurada que integra progresivamente las distintas fases del proceso de validación del modelo, desde el tratamiento de datos hasta su juicio, como se muestra en la Figura IX.2.

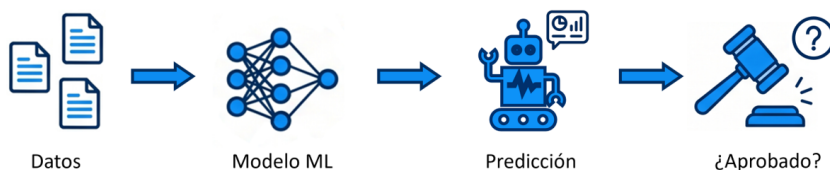


Figura IX.2: Flujo de trabajo simplificado.

La Figura IX.3 recoge el esquema del flujo completo de tareas en torno a la actividad, que puede resumirse en:

- **Desarrollo del modelo:** El equipo de datos recibe el conjunto de datos proporcionado por el profesorado y desarrolla un modelo predictivo utilizando las técnicas de aprendizaje automático estudiadas en la

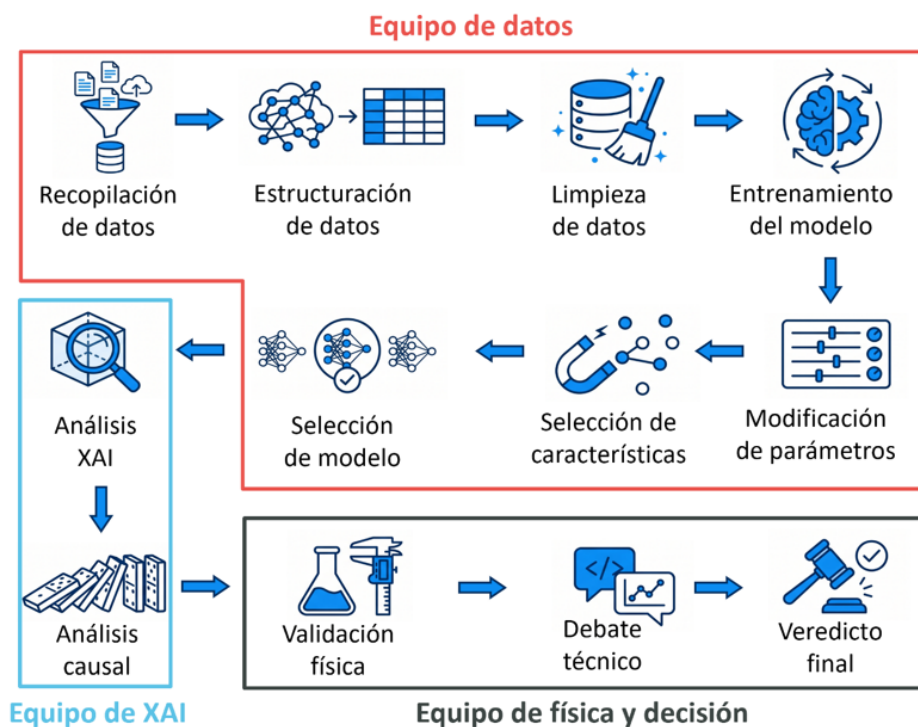


Figura IX.3: Esquema general del flujo de trabajo seguido durante la actividad.

asignatura. Además del entrenamiento, el equipo evalúa el rendimiento del modelo y documenta las decisiones adoptadas durante el proceso.

- **Interpretación mediante XAI:** Una vez entrenado el modelo, el equipo XAI analiza las predicciones mediante técnicas de inteligencia artificial explicable. El objetivo de esta fase es identificar las variables más influyentes, comprender el comportamiento del modelo y detectar posibles patrones o relaciones que requieran un análisis más detallado.
- **Validación física:** Los resultados obtenidos en las etapas anteriores son analizados por el equipo de física y decisión, que contrasta las explicaciones proporcionadas por las herramientas XAI con el comportamiento físico esperado del sistema. Esta fase permite evaluar la plausibilidad de las predicciones y determinar si el modelo resulta técnicamente consistente para la aplicación planteada.
- **Debate técnico:** Los distintos equipos que integran cada empresa comparten los resultados obtenidos y discuten las evidencias recopiladas durante las fases anteriores. Este intercambio de información favorece la argumentación técnica y la construcción de una valoración conjunta sobre la fiabilidad del modelo, reproduciendo las dinámicas de trabajo habituales en equipos multidisciplinares.
- **Veredicto final:** A partir del análisis realizado, el equipo de física y decisión emite un veredicto sobre la posible implantación del modelo en el escenario industrial ficticio. La decisión puede corresponder a una de las siguientes categorías:
 - *Aprobado:* El modelo es preciso, interpretable y coherente con la física esperada.
 - *Aprobado con restricciones:* El modelo es utilizable, pero con condiciones, supervisión o ámbito de uso limitado.
 - *Rechazado:* Las métricas no bastan; el modelo no es físicamente u operativamente fiable.

La decisión debe ser justificada utilizando argumentos técnicos, físicos y computacionales desarrollados durante toda la actividad. Se incluye la opción de “Aprobado con restricciones” ya que en situaciones reales en la industria rara vez las decisiones son blanco o negro; la mayor parte de las veces es necesario llegar a una solución de compromiso.

- **Exposición final de los resultados:** Como cierre de la actividad, cada empresa presenta los principales resultados obtenidos durante su trabajo en las distintas fases del proceso. Esta exposición tiene como objetivo simular una presentación técnica en un entorno profesional, donde los equipos deben comunicar de forma clara, estructurada y convincente las decisiones tomadas y las evidencias que las sustentan.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

La actividad “El Juicio al Modelo” se plantea como una experiencia práctica de corta duración. Ésta está integrada dentro de la asignatura *Machine Learning Technologies* del MUCEIM. La propuesta está diseñada para desarrollarse en dos sesiones de aproximadamente dos horas cada una, combinando trabajo técnico, análisis colaborativo y discusión interdisciplinar.

La metodología se basa en aprendizaje activo y trabajo por equipos, donde el alumnado participa de forma progresiva en las distintas etapas del proceso de validación de un modelo de inteligencia artificial aplicado a turbulencia.

Primera sesión (2h): entrenamiento del modelo

La primera sesión comienza con la presentación del escenario industrial ficticio que contextualiza la actividad y de los objetivos que deberán alcanzarse durante su desarrollo. El profesorado introduce el problema de mantenimiento predictivo y proporciona al alumnado el conjunto de datos, junto con la información necesaria para comprender las variables disponibles y la tarea de predicción planteada.

A continuación, los estudiantes inician el trabajo por equipos. El equipo de datos se encarga de explorar el conjunto de datos, realizar las tareas de preprocesado necesarias, seleccionar las variables de entrada y desarrollar un modelo de *Machine Learning* utilizando las técnicas estudiadas en la asignatura. Paralelamente, analiza el rendimiento del modelo mediante las métricas correspondientes y reflexiona sobre aspectos como la capacidad de generalización, la estabilidad de las predicciones y las posibles limitaciones del proceso de entrenamiento.

Durante toda la sesión, el profesorado actúa como facilitador del aprendizaje, orientando a los distintos grupos, resolviendo dudas y guiando la toma de decisiones cuando resulta necesario. Al finalizar la sesión, cada equipo dispone de un modelo entrenado y de una primera evaluación de

su comportamiento, que servirá como punto de partida para las fases de interpretación y validación desarrolladas en la sesión siguiente.

Segunda sesión (2h): XAI, validación y debate técnico

La segunda sesión está dedicada al análisis crítico del modelo desarrollado y a la integración de los resultados obtenidos por los distintos equipos. Para ello, la sesión se organiza en tres bloques de trabajo que reproducen las etapas habituales del proceso de validación de una solución basada en inteligencia artificial.

Durante los primeros 45 minutos, el equipo XAI analiza el comportamiento del modelo mediante técnicas de inteligencia artificial explicable. A partir de herramientas como SHAP, el alumnado identifica las variables con mayor influencia en las predicciones, analiza la contribución de cada característica y detecta posibles comportamientos anómalos o relaciones difíciles de justificar desde el punto de vista físico.

En el segundo bloque, también de 45 minutos, el equipo de física y decisión evalúa la coherencia de los resultados obtenidos con el comportamiento esperado del sistema industrial. Para ello, contrasta las conclusiones derivadas del análisis XAI con los principios físicos asociados al proceso de degradación de los componentes y elabora una propuesta de veredicto sobre la viabilidad del modelo para su implantación en un entorno industrial.

Finalmente, los 30 minutos restantes se destinan a la puesta en común de los resultados. Tras un breve periodo de preparación, cada empresa presenta las conclusiones alcanzadas y justifica el veredicto emitido mediante argumentos técnicos, físicos y computacionales. Esta fase final favorece la comunicación científica, el debate entre iguales y la argumentación fundamentada, al tiempo que reproduce las reuniones de validación tecnológica habituales en equipos multidisciplinares del ámbito industrial.

RÚBRICA DE EVALUACIÓN

La evaluación de la actividad “El Juicio al Modelo” se estructura en torno a cuatro dimensiones principales: desempeño técnico, interpretabilidad del modelo, coherencia física y competencias transversales. La evaluación combina criterios técnicos y transversales, priorizando no sólo el rendimiento predictivo del modelo, sino también su interpretabilidad, coherencia física y la calidad del proceso de toma de decisiones en un contexto colaborativo simulado de ingeniería. La rúbrica de la actividad se

recoge en la Tabla IX.1.

RÚBRICA DE EVALUACIÓN

La evaluación de la actividad “El Juicio al Modelo” se estructura en torno a cuatro dimensiones principales: desempeño técnico, interpretabilidad del modelo, coherencia física y competencias transversales. La evaluación combina criterios técnicos y transversales, priorizando no sólo el rendimiento predictivo del modelo, sino también su interpretabilidad, coherencia física y la calidad del proceso de toma de decisiones en un contexto colaborativo simulado de ingeniería. La rúbrica de la actividad se recoge en la Tabla IX.1.

Cuadro IX.1: Rúbrica de evaluación de la actividad “El juicio al modelo”.

Dimensión	4 (Excelente)	3 (Notable)	2 (Aceptable)	1 (Insuficiente)	Peso
Modelado y datos (Equipo de datos)	Modelo bien justificado, correctamente entrenado y validado con métricas robustas	Modelo funcional con pequeñas limitaciones metodológicas	Modelo básico con validación parcial o poco justificada	Modelo incorrecto o sin proceso de validación adecuado	30 %
Interpretabilidad (Equipo XAI)	Uso adecuado de XAI con interpretación clara y profunda	Aplicación correcta con interpretación parcial	Uso limitado o análisis superficial	Uso incorrecto o inexistente de XAI	30 %
Coherencia física y decisión (Equipo física y decisión)	Evaluación sólida de coherencia física, integración de evidencias y veredicto totalmente justificado	Análisis correcto con decisión razonable, pero con justificación parcial	Evaluación superficial con débil conexión entre física, XAI y decisión	Sin análisis físico ni justificación del veredicto	30 %
Trabajo colaborativo y comunicación	Exposición clara, estructurada y convincente con defensa sólida de resultados	Buena comunicación con pequeños problemas de claridad	Presentación poco clara o desorganizada	Comunicación deficiente o incompleta	10 %

RESULTADOS ESPERADOS Y CONCLUSIONES

Dado que la actividad “El juicio al modelo” se encuentra actualmente en fase de diseño, los resultados se plantean en términos de hipótesis de impacto educativo y expectativas de aprendizaje. Se espera que la metodología propuesta favorezca una participación más activa del estudiantado y una comprensión global del ciclo de desarrollo, interpretación y validación de modelos de *Machine Learning* aplicados a problemas de ingeniería.

En particular, la organización mediante roles rotativos pretende mejorar la comprensión de la relación existente entre las diferentes etapas del proceso, desde la preparación de los datos y el entrenamiento del modelo hasta el análisis de sus predicciones y la toma de decisiones final. Esta estructura permite que el alumnado adopte diferentes perspectivas sobre un mismo problema, comprendiendo que la validación de un sistema basado en inteligencia artificial requiere la colaboración entre perfiles con conocimientos complementarios.

Asimismo, la incorporación de técnicas de inteligencia artificial explicable busca reforzar la capacidad del estudiantado para analizar los modelos más allá de sus métricas de rendimiento. Mediante la interpretación de la influencia de las variables de entrada y el contraste con criterios físicos, se pretende fomentar una actitud crítica hacia el uso de modelos predictivos, destacando la importancia de la interpretabilidad, la trazabilidad y la coherencia del conocimiento aprendido por el algoritmo.

Además de las competencias técnicas relacionadas con el aprendizaje automático, la actividad contribuye al desarrollo de competencias transversales como el trabajo colaborativo, la comunicación científica, la argumentación técnica y la toma de decisiones en escenarios de incertidumbre. La simulación de un proceso de validación industrial permite aproximar al alumnado a situaciones profesionales reales, en las que la implantación de una solución tecnológica requiere evaluar conjuntamente su rendimiento, fiabilidad y aplicabilidad.

En conjunto, la propuesta se alinea con los objetivos formativos de la asignatura *Machine Learning Technologies* del Màster Universitari en Computational Engineering & Industrial Mathematics (MUCEIM), integrando modelado predictivo, interpretabilidad y conocimiento ingenieril en una única experiencia de aprendizaje. La actividad pretende, por tanto, contribuir a la formación de perfiles capaces de utilizar herramientas de inteligencia artificial de forma rigurosa, crítica y responsable en aplicaciones industriales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la participación y el compromiso del alumnado del MUCEIM.

REFERENCIAS

- [1] Marra, R. M., Steege, L., Tsai, C.-L., & Tang, N.-E. (2016). Beyond “group work”: an integrated approach to support collaboration in engineering education. *International Journal of STEM Education*, 3, 11. <https://doi.org/10.1186/s40594-016-0043-4>
- [2] Cremades, A., Hoyas, S., Deshpande, R., Quintero, P., Lellep, M., Lee, W. J., Monty, J. P., Hutchins, N., Linkmann, M., Marusic, I., & Vinuesa, R. (2024). Identifying regions of importance in wall-bounded turbulence through explainable deep learning. *Nature Communications*, 15, 4821. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-50212-w>

AFILIACIONES

Andrea Arroyo Ramo – Instituto Universitario de Investigación Mixto de Biología Molecular y Celular de Plantas, Universitat Politècnica de València

Andrés Cremades Botella – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

María Jezabel Pérez Quiles – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

J. Alberto Conejero Casares – Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

CÓDIGO ABIERTO E IA: VACIADO DE DEPÓSITOS EN LA PRÁCTICA INFORMÁTICA

CRISTINA PÉREZ DIUKINA, ELENA LÓPEZ NAVARRO

EN este trabajo se describe la conversión de un modelo docente clásico en matemática, el vaciado de un depósito con forma de sólido de revolución, desde una implementación de referencia en Wolfram Mathematica a un cuaderno interactivo, abierto y reproducible en Python, pensado para ejecutarse en Google Colab sin necesidad de instalar ningún programa para el alumnado. El punto de partida es el trabajo [1], que generaliza los casos habituales de los libros de ecuaciones diferenciales (cilindro, cono y esfera como en [2, 3]) al caso de una curva generadora arbitraria $R(y)$, obteniendo la altura del líquido $h(t)$ en cada instante de tiempo t y el tiempo de vaciado T . Se detalla la técnica numérica cuando no hay solución analítica y una construcción paso a paso que va desde la deducción física a la verificación simbólica, el método numérico, la exploración interactiva y hasta la proposición de retos abiertos. El cuaderno incorpora, además, cajas de diálogo con una IA orientadas a la verificación y al método socrático en vez de obtener respuestas directas sin interactuar con el problema en cuestión. Finalmente, se comparan las ventajas de Google Colab frente a Wolfram Mathematica en el aula universitaria. Todos los resultados numéricos se han validado mediante los ejemplos publicados [1].

MODELO DE PARTIDA

El vaciado de depósitos es uno de los problemas clásicos con los que se ilustra, en un primer o segundo curso universitario, la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Su atractivo es doble: por un lado, tiene una representación geométrica muy cercana a la intuición del alumnado; por otro, se formula con el primer tipo de EDO que se estudia, las de variables separables, ya que estas solo requieren herramientas que el alumnado ha visto en bachillerato y/o en un primer curso de matemáticas universitarias. El artículo [1] toma este problema y lo generaliza: en lugar de limitarse al cilindro y al cono truncado que tienen solución analítica y que aparecen en los textos clásicos como [2] y [3], estudia un depósito cuya forma es el sólido de revolución de una función positiva arbitraria $R(y)$, donde $R(y)$ es el radio de la sección a la altura y . Se supone que el alumnado ya ha estudiado integrales y sólidos de revolución antes.

Suponiendo que empezamos con un depósito lleno ($h_0 = H > 0$) y combinando la integración con conceptos físicos como la conservación de la masa para un fluido incompresible, la ley de Torricelli y el principio de Bernoulli, llegamos a una EDO de variables separables que, tras integrar, deja el problema en la forma semiexplícita, dando la siguiente expresión:

$$\int_{h(t)}^H \frac{\pi}{\sigma} R^2(y) dy = \frac{r^2 \sqrt{2g}}{2} t, \quad t \in [0, T].$$

El tiempo total de vaciado T se obtiene imponiendo que la altura del líquido en T sea nula: $h(T) = 0$. Esta ecuación tiene una riqueza didáctica ya que para el cilindro se despeja una fórmula explícita de $h(t)$ y de T ; para el cono y la esfera truncados aún hay expresión exacta de T , pero $h(t)$ exige resolver una ecuación no lineal; y para una forma arbitraria, en general, no existe fórmula cerrada. En estos casos entran en juego los métodos numéricos, y este problema da lugar a un primer contacto del alumnado con métodos numéricos simples. Se propone la obtención de resultados numéricos y su representación gráfica, como la evolución temporal de la altura del líquido hasta el vaciado completo de un vaso (Figura X.1) o la representación en 2D de una copa y su contenido en distintos instantes (Figura X.2). Asimismo, se plantea comparar numéricamente los tiempos de vaciado entre depósitos de distinta geometría pero de la misma altura (Figura X.3). El propio artículo propone un plan docente coordinado entre Física y Matemáticas que avanza del cilindro al cono y la esfera y de ahí a la curva arbitraria, cerrando con el análisis crítico mediante casos límite y análisis de sensibilidad.

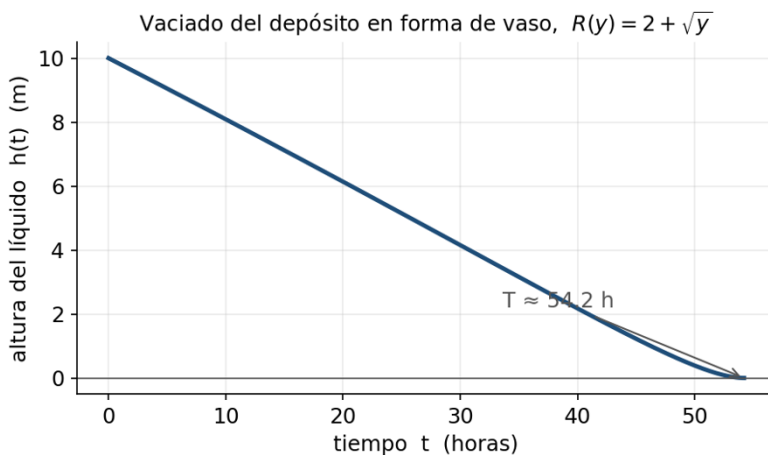


Figura X.1: Altura del líquido $h(t)$ para el depósito en forma de vaso, $R(y) = 2 + \sqrt{y}$, con $H = 10$ m y $r = 0,01$ m. El motor reproduce el tiempo de vaciado publicado, $T \approx 195\,113$ s (≈ 54 h 12 min).

USO DE CÓDIGO ABIERTO

La implementación del artículo de referencia está disponible como un cuaderno de Wolfram Mathematica en:

<https://github.com/I-U-de-Matematica-Multidisciplinar/depositos>.

Aunque es una herramienta muy potente para el cálculo simbólico, tiene varios inconvenientes:

- Para reproducir o modificar el contenido es necesario disponer de una licencia.
- Es un programa muy pesado (23 GB en memoria local y 4 GB en RAM).

Aunque el alumno instale el programa con tiempo en su ordenador, su máquina puede no tener suficiente memoria para ejecutarlo. Nuestra propuesta traslada íntegramente el modelo presentado en la Sección 1 a Python y lo publica como un cuaderno de Jupyter ejecutable en Google Colab. La motivación es pedagógica antes que técnica. El código abierto convierte la simulación en algo inspeccionable: cada paso (la integral, la búsqueda de raíces, la animación, etc.) está a la vista sin instalación previa. El alumno recibe un documento que puede leer, cuestionar y modificar para entender cómo funciona desde cualquier ordenador. Además, al

apoyarse en el ecosistema científico estándar (*NumPy* [4], *SciPy* [5], *SymPy* [6], *Matplotlib* [7]), lo que aprende es transferible a su vida profesional y no caduca al terminar una licencia.

CONSTRUCCIÓN PEDAGÓGICA PASO A PASO

El cuaderno está organizado para avanzar de los conceptos más simples y familiares a un alumnado de primero o segundo de carrera a los más complejos, de modo que el mismo material pueda adaptarse a distintos niveles y ritmos de aprendizaje:

- **Deducción física:** Se reconstruye la EDO desde Torricelli y Bernoulli, conectando con la asignatura de Física.
- **Análisis:** Se deducen $h(t)$ y T para los casos más simples como el cilindro.
- **Verificación simbólica:** Con *SymPy* se comprueba que, para el cilindro, las fórmulas explícitas de $h(t)$ y de T coinciden con las deducidas a mano.
- **Motor numérico:** La sustitución $y = u^2$ más cuadratura y *brentq* resuelven cualquier $R(y)$ admisible.
- **Exploración interactiva:** Con controles deslizantes (*ipywidgets*), un desplegable de formas y una animación del vaciado, el alumno manipula H , r y la forma, y observa el efecto en $h(t)$ y en T .
- **Análisis de sensibilidad:** Se formaliza el estudio del artículo [1]: aumentar el radio del cilindro un X % incrementa T en $(2X + X^2)$ %, mientras que abrir más el orificio lo reduce; los números se cotejan con la intuición física.
- **Retos y modelización propia:** El alumno define su propia $R(y)$ y afronta seis retos graduados.

APRENDIZAJE ASISTIDO POR IA

El cuaderno intercala varias cajas de diálogo con una IA para fomentar el aprendizaje interactivo. El objetivo es alejar al alumnado del uso más habitual —la IA como máquina de respuestas— y guiarlos hacia un uso interactivo como el que usan expertos en el entorno laboral actual. Los

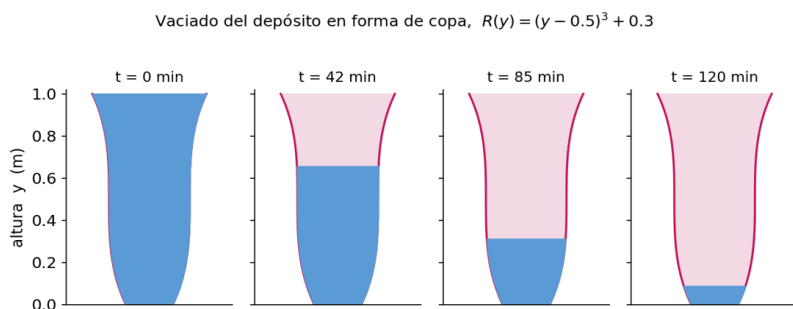


Figura X.2: Instantáneas del vaciado del depósito en forma de copa, $R(y) = (y - 0.5)^3 + 0.3$, con $H = 1$ m. El nivel del líquido (azul) desciende dentro del perfil (rosa); $T \approx 8\,477$ s, en coincidencia con el valor publicado.

mensajes propuestos piden al alumno que primero prediga o calcule, y solo después contraste con el asistente; que le pida a la IA que critique su razonamiento, que proponga un caso límite para poner a prueba una fórmula, o que explique por qué un resultado numérico es o no coherente físicamente. La filosofía es de verificación primero. El valor formativo no está en obtener el número, sino en defenderlo. Técnicamente, las cajas funcionan con mensajes listos para copiar y, de forma opcional, con una llamada en vivo a la API si se dispone de una clave, de modo que el material sigue siendo plenamente utilizable sin instalaciones de programas externos.

EL RETO INVERSO: CONSTRUIR UN RELOJ DE AGUA

El reto que mejor sintetiza la propuesta invierte la pregunta habitual. En lugar de *dada la forma, ¿cómo baja el nivel?*, se plantea: *¿qué forma hay que dar al depósito para que el nivel baje a ritmo constante?*, es decir, para construir un reloj de agua. Imponiendo $\frac{dh}{dt} = \text{constante}$ en la EDO se llega a que el radio debe crecer como $R(y) \propto y^{1/4}$. La Figura X.3 lo muestra: con ese perfil la altura decae de forma lineal (marca uniforme del tiempo), frente al descenso no uniforme del cilindro. Es un problema de diseño inverso que integra física y cálculo y que el alumno puede resolver y verificar íntegramente en el cuaderno. Además, es un problema relevante para futuros profesionales ya que se propone la resolución de un problema real.

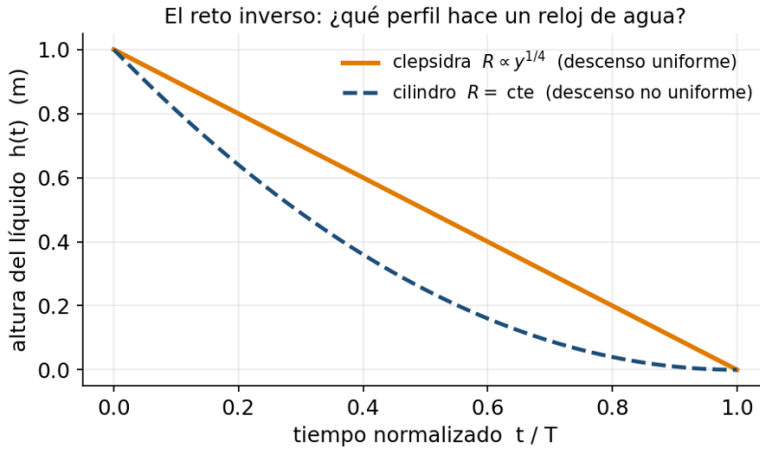


Figura X.3: Problema inverso de la clepsidra: el perfil $R(y) \propto y^{1/4}$ produce un descenso uniforme del nivel (naranja), a diferencia del cilindro (azul discontinuo).

GOOGLE COLAB FRENTE A WOLFRAM MATHEMATICA

La comparación no busca defender la superioridad de un programa frente al otro, sino argumentar por qué, para este material y este público, la balanza se inclina hacia el código abierto. La Tabla X.1 resume los ejes principales.

Cuadro X.1: Comparación de Google Colab (Python) y Wolfram Mathematica para el uso en el aula del modelo de vaciado.

Aspecto	Google Colab (Python)	Wolfram Mathematica
Coste y licencia	Gratuito; sin licencia para el alumno.	Software propietario de pago. No se suele usar fuera del ámbito universitario.
Puesta en marcha	Solo un navegador.	Instalación y licencia.
Reproducibilidad	Un enlace compartible que se ejecuta en la nube en igualdad de condiciones.	Depende de la versión, de la licencia local disponible y de la máquina en la que se ejecuta.
Cálculo simbólico	<i>SymPy</i> : suficiente para verificar el caso del cilindro.	Muy potente e intuitivo.
Interactividad	<i>ipywidgets</i> , animaciones con <i>Matplotlib</i> .	<i>Manipulate</i> .
Ecosistema	Python científico abierto y estándar en la industria y la investigación con actualizaciones constantes y nuevas librerías.	Entorno integrado y coherente, pero cerrado.
Después del curso	El alumno conserva gratis una herramienta profesional.	Suele perder el acceso al terminar la licencia.
Indagación con IA	Diálogo con un modelo integrable en las propias celdas del <i>notebook</i> .	Sin integración nativa equivalente.

En resumen, Colab elimina la barrera de la licencia y la instalación, hace la simulación reproducible con un simple enlace, apoya al alumno con herramientas que seguirá usando después del curso y permite integrar el diálogo con IA en el propio flujo de trabajo. Mathematica mantiene la ventaja en potencia simbólica, pero para el nivel de este modelo, *SymPy* es suficiente.

CONCLUSIONES

Trasladar el modelo a un cuaderno abierto no es un mero cambio de software: reordena la relación del alumno con la herramienta. Al poder inspeccionar y modificar cada paso sin esfuerzo previo de instalación y en un lenguaje intuitivo como es Python, el estudiante pasa de consumir una simulación a interactuar con ella. Además, al toparse con la falta de fórmula cerrada para la mayoría de los casos (que es una realidad relevante para problemas de ingeniería y física), descubre por necesidad para qué sirven los métodos numéricos y, al dialogar con una IA que le exige justificar antes de preguntar, ejercita el pensamiento crítico en lugar de delegarlo. El material está validado numéricamente con los ejemplos del artículo original [1] y está pensado para provocar debate entre docentes, así como aprendizaje entre estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Instituto de Matemática Multidisciplinar de la Universitat Politècnica de València.

REFERENCIAS

- [1] Cortés López, J.-C., López Navarro, E., Pérez, C.-L., & Villanueva, R.-J. (2024). A vueltas con la modelización del vaciado de depósitos. *Modelling in Science Education and Learning*, 17, 1–15. <https://doi.org/10.4995/mse1.2024.20904>
- [2] Boyce, W.E., & DiPrima, R.C. (2012). *Elementary Differential Equations* (10.^a ed.). Wiley.
- [3] Zill, D.G., & Cullen, M.R. (2008). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (7.^a ed.). Cengage Learning.

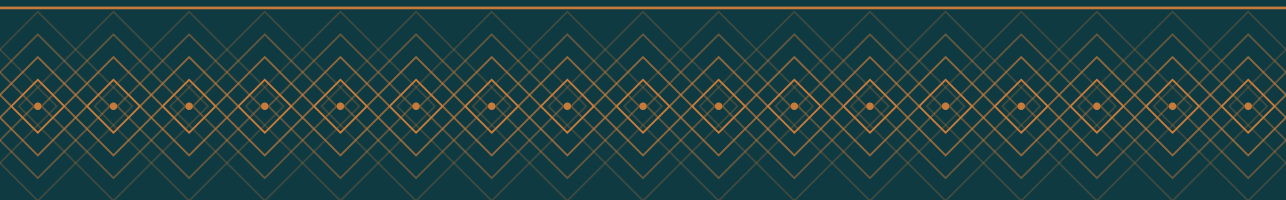
- [4] Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., del Rio, J. F., Wiebe, M., Peterson, P., . . . , Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825), 357–362. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- [5] Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., van der Walt, S.J., Brett, M., Wilson, J., Millman, K.J., Mayorov, N., Nelson, A. R. J., Jones, E., Kern, R., Larson, E., Carey, C. J., . . . , SciPy 1.0 Contributors (2020). SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17(3), 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41587-019-0686-2>
- [6] Meurer, A., Smith, C. P., Paprocki, M., Čertík, O., Kirubakaran, S. B., Rocklin, M., Kumar, A., Ivanov, S., Moore, J. K., Singh, S., Rathnayake, T., Vig, S., Granger, B. E., Millman, R. P., Bonazzi, P., Gurneath, H., Gutierrez, A., Sabharwal, A., & Koehl, M. (2017). SymPy: symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*, 3, e103. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>
- [7] Hunter, J.,D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>

AFILIACIONES

Cristina Pérez Diukina – Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

Elena López Navarro – Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

EN ESTA PUBLICACIÓN SE RECOGEN LAS CONTRIBUCIONES QUE SE HAN PRESENTADO EN LAS XIV JORNADAS DE INNOVACIÓN DOCENTE ORGANIZADAS POR EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA DE LA UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA. EL PROPÓSITO DE LA JORNADA ERA DOBLE: POR UN LADO, VISIBILIZAR LAS BUENAS PRÁCTICAS QUE SE ESTÁN LLEVANDO A CABO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS; Y POR OTRO, ATREVERNOS CON NUEVAS EXPERIENCIAS PILOTO Y REPENSAR DE FORMA CONJUNTA ALGO QUE NOS QUITA EL SUEÑO A TODOS: LOS SISTEMAS DE EVALUACIÓN Y EL PROPIO ROL DEL DOCENTE FRENTE A LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL.



dma

Departamento de Matemática Aplicada