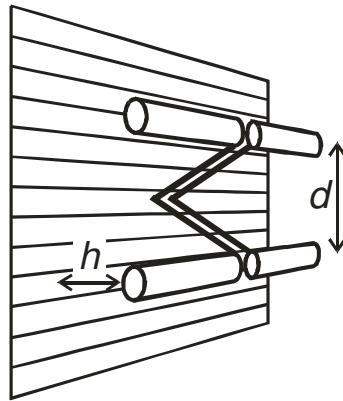
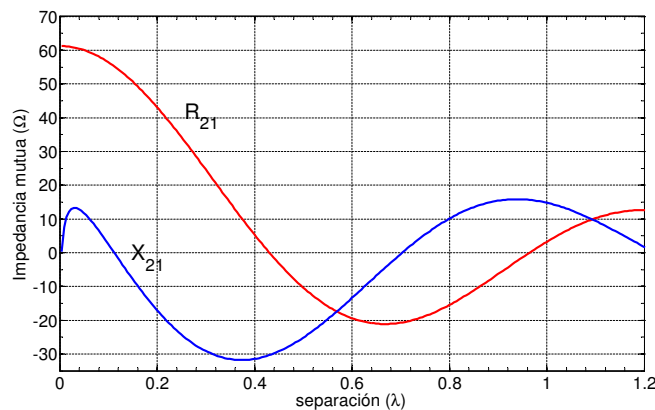


Problema 1

Se trata de analizar la antena de la figura. Se trata de una agrupación formada por dos dipolos iguales cuya longitud es ligeramente inferior a $\lambda/2$, en concreto $2H = 0,47\lambda$. Los dipolos están separados una distancia $d = 0,5\lambda$. La agrupación tiene un plano conductor por detrás a una distancia h por determinar, con el fin de favorecer la radiación hacia adelante de la antena. El plano conductor se supone infinito y perfecto. Los dipolos están alimentados en paralelo con un sencillo divisor formado por líneas de longitud $\lambda/4$ e impedancia característica $Z_0 = 100\Omega$.

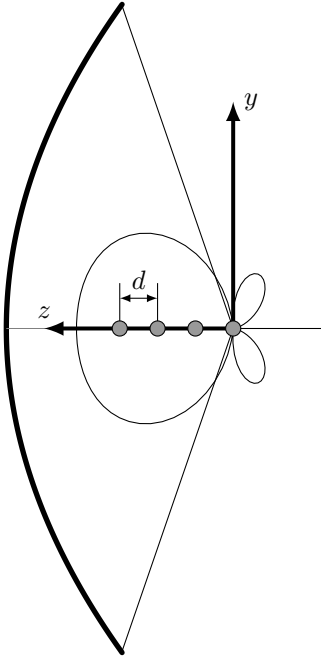


- Obtenga la expresión del campo radiado por la antena. A los efectos de este cálculo puede suponer que la longitud total de los dipolos es $2H = 0,5\lambda$. (2 puntos)
- Obtenga el valor de h que maximiza el campo radiado en la perpendicular al plano conductor (2 puntos)
- Dibuje los diagramas plano E y plano H de la antena (2 puntos)
- Obtenga la impedancia de entrada de cada uno de los dipolos que forman el array y la impedancia de entrada de la antena completa. (2 puntos)
- Calcule la directividad y la longitud efectiva máxima de la antena (2 puntos).



Problema 2

Se desea diseñar una agrupación de antenas que sirva de alimentador para un reflector parabólico de relación $f/D = 0,35$ y diámetro 30 cm. La agrupación está formada por cuatro radiadores isotrópicos separados una distancia $d = \lambda/4$. La agrupación es de tipo *endfire*. Se desea que el diagrama de la agrupación tenga nulos en las direcciones $\theta = 180^\circ$ y $\theta = 95^\circ$, con el máximo apuntando en la dirección del eje z , tal y como se muestra en la figura. La frecuencia de trabajo es 10 GHz.

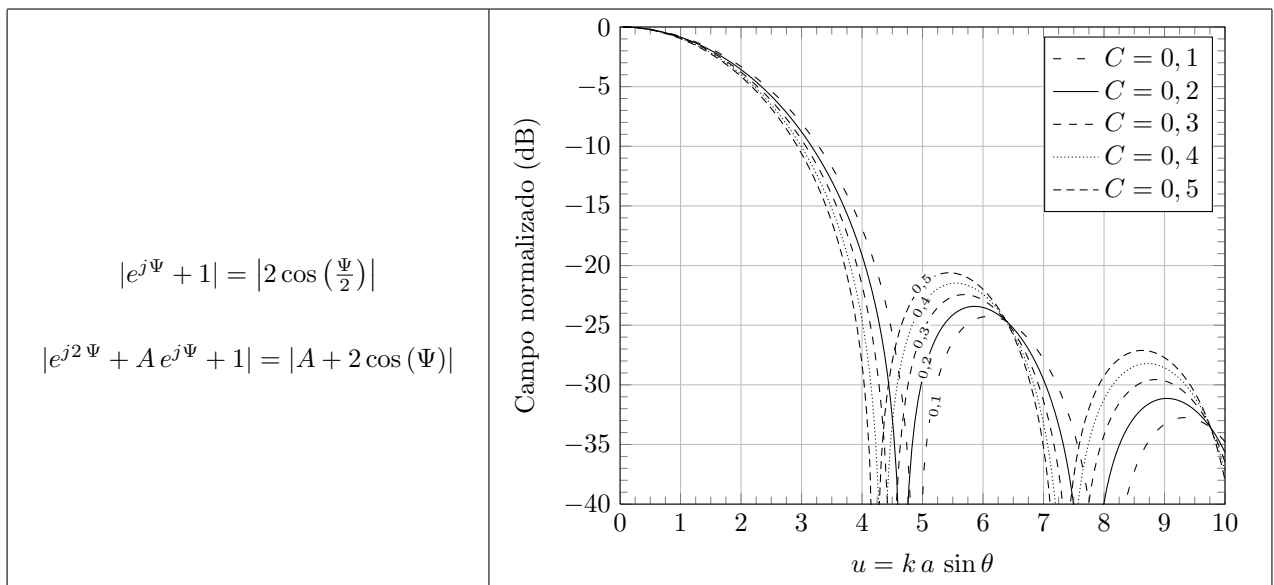


- Dibuje los ceros del polinomio de la agrupación $p(z)$ en el plano z complejo teniendo en cuenta que los ceros con parte imaginaria han de tener siempre su correspondiente cero conjugado. (1 punto)
 - A partir de los ceros del polinomio dibuje $|FA(\Psi)|$ de forma aproximada y el diagrama de radiación $d(\theta)$ utilizando el método gráfico. (2 puntos)
 - Obtenga una expresión para el polinomio $p(z)$. Indique el módulo y la fase de las corrientes de alimentación de cada uno de los elementos de la agrupación. (2 puntos)
 - Calcule el NLPS del diagrama de la agrupación. (2 puntos)
 - Calcule el decaimiento de campo en los bordes del reflector parabólico. (2 puntos)
- f) La distribución de campo en la apertura del reflector se puede aproximar por una distribución parabólica sobre pedestal de la forma:

$$\vec{E}_a = E_0 \left(1 + (C - 1) \left(\frac{\rho'}{a} \right)^2 \right) \hat{y}$$

donde a es el radio del reflector y C es la altura del pedestal. Haciendo uso de la gráfica adjunta en la que se muestra el diagrama normalizado para diferentes valores del pedestal C , determine el ancho de haz a -3 dB y el NLPS del diagrama secundario de la antena. (1 puntos)

Datos:



Solución al Problema 1

- a) El campo total es el producido por un array de dos dipolos al que le añadimos el efecto del plano conductor aplicando imágenes:

Si orientamos los dipolos según el eje z y elegimos el eje y como eje del array, entonces

$$\vec{E}_{dipolo} = j60I \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta}$$

es el campo producido por un dipolo de $\lambda/2$ aislado y el campo total es

$$\vec{E}_{antena} = \vec{E}_{dipolo} \cdot FA_1(\psi_y) \cdot FA_2(\psi_x)$$

donde $FA_1(\psi_y)$ es el factor de array de la agrupación de dos dipolos y $FA_2(\psi_x)$ es el efecto del plano conductor.

$$FA_1(\psi_y) = \frac{\sin\left(2\frac{\psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_y}{2}\right)}$$

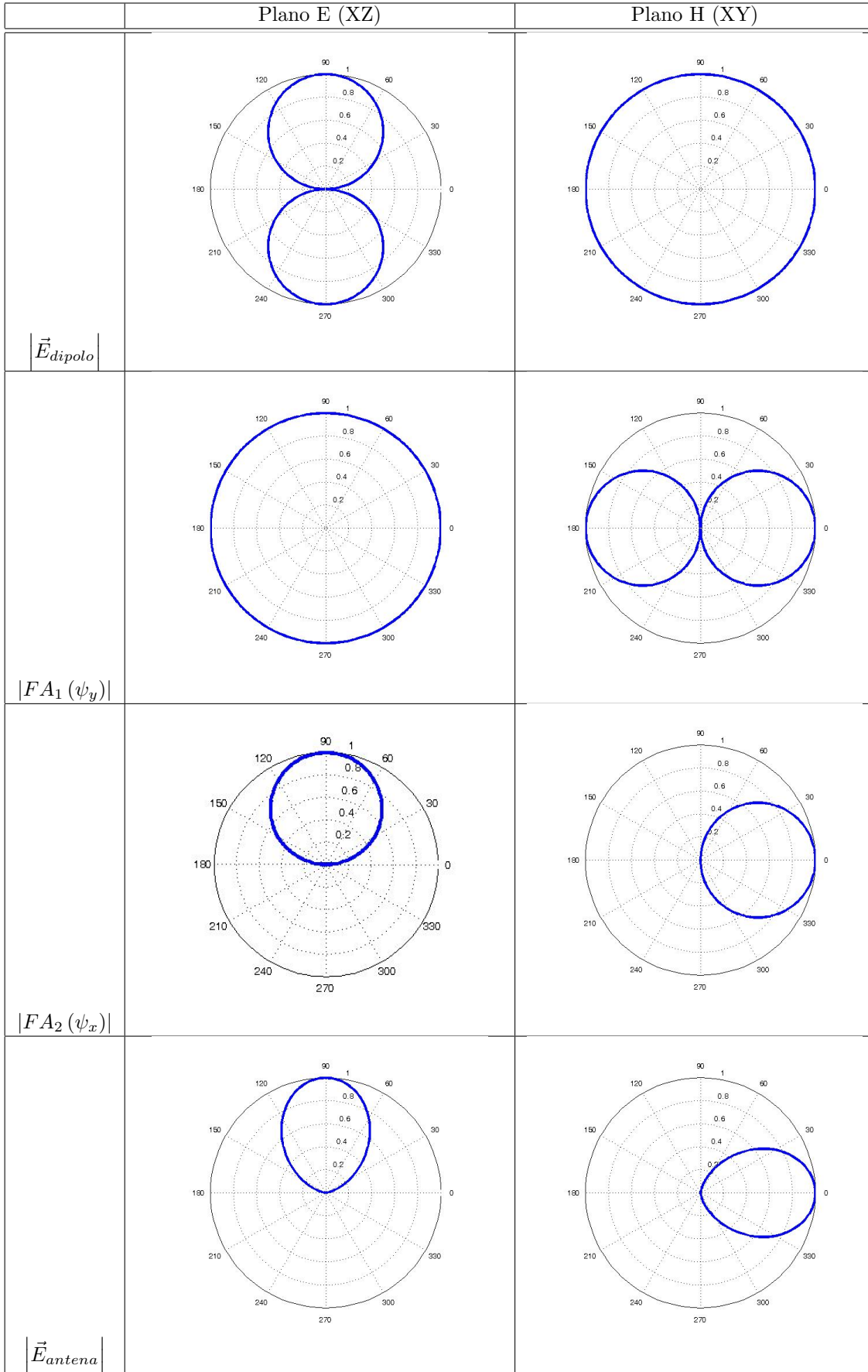
con $\psi_y = kd \sin\theta \sin\phi$

$$FA_2(\psi_x) = \frac{\sin\left(2\frac{\psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)}$$

con $\psi_x = k(2h) \sin\theta \cos\phi - \pi$

- b) El valor de h que maximiza el campo en la dirección perpendicular al plano conductor ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$), lo obtenemos observando la función $|FA_2(\psi_x)|$ y viendo para qué valor es máxima. En este caso, simplificando, $|FA_2(\psi_x)| = \left|2 \cos\left(\frac{\psi_x}{2}\right)\right|$ y por tanto $\psi_x = 0$, lo que implica que $h = \lambda/4$.

c) A continuación se muestran los diagramas Plano E y Plano H de la antenas:



d) Utilizando la matriz de impedancias del conjunto de los 4 dipolos (los dos reales y los dos imágenes),

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + Z_{14}I_4$$

Teniendo en cuenta que los dos dipolos del array tienen la misma corriente, dada la simetría de la red de alimentación, y los dipolos imagen tienen corrientes opuestas a los reales ($I_1 = I_2 = -I_3 = -I_4$), la impedancia de entrada de un dipolo es

$$Z_d = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} - Z_{13} - Z_{14}$$

Además se observa que la distancia entre los dipolos del array es la misma que la que hay entre un dipolo y su imagen, por lo tanto $Z_d = Z_{11} - Z_{14}$. La autoimpedancia se puede calcular sabiendo que es aproximadamente la impedancia mutua cuando la separación tiende a cero. De la gráfica, $Z_{11} = 60\Omega$ y $Z_{14} (d = 0,7\lambda) = -20\Omega$. Por tanto $Z_d = 80\Omega$.

e) El cálculo de la directividad máxima lo hacemos a partir de la definición:

$$D_{max} = \frac{P_{max}}{\frac{W_{rad}}{4\pi r^2}} = \frac{\left| \frac{60}{r} I_d \cdot 2 \cdot 2 \right|^2 \frac{1}{\eta} 4\pi r^2}{2 \cdot 80 \cdot |I_d|^2} = 12 \text{ (10,8 dB)}$$

Para calcular la longitud efectiva máxima, necesitamos conocer la relación entre la corriente a la entrada del dipolo y la corriente a la entrada del array por lo que debemos tener en cuenta la red formada por los dos transformadores de $\lambda/4$ en paralelo. Dado que la red no tiene pérdidas podemos calcular la relación entre las corrientes a partir del cálculo de la potencia: la potencia calculada a la entrada de la antena es la misma que la suma de las potencias radiadas por los dos dipolos:

$$W = R_{in} |I_{in}|^2 = 2 \cdot R_d |I_d|^2$$

donde $R_d = 80\Omega$, mientras que R_{in} es inmediato de calcular. La impedancia que presenta el dipolo con el transformador de $\lambda/4$ es $R_L = Z_0^2/R_d = 125\Omega$. Por tanto

$$R_{in} = R_L \parallel R_L = 62,5\Omega$$

Por lo tanto podemos escribir que

$$62,5 |I_{in}|^2 = 160 |I_d|^2$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{|I_d|}{|I_{in}|} = 0,625$$

La longitud efectiva máxima se define como $|l_{ef \text{ máx}}| = \frac{|N_{max}|}{|I_{in}|} = \frac{\frac{\lambda}{\pi} |I_d| \cdot 2 \cdot 2}{|I_{in}|} = 2,5 \frac{\lambda}{\pi}$

Solución al Problema 2

- a) Los ceros del diagrama de la agrupación están en $\theta = 180^\circ$ y $\theta = 95^\circ$. Para calcular los ceros del polinomio tenemos que calcular previamente la posición de los ceros en Ψ . Teniendo en cuenta que $d = \lambda/4$ y que la agrupación es *endfire*, es decir, que $\alpha = -kd$:

$$\Psi = kd \cos \theta + \alpha = kd \cos \theta - kd = kd (\cos \theta - 1) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} (\cos \theta - 1) = \frac{\pi}{2} (\cos \theta - 1)$$

Por tanto la posición de los ceros en Ψ es:

$$\Psi_c = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (\cos 180^\circ - 1) = -\pi = 180^\circ \\ \frac{\pi}{2} (\cos 95^\circ - 1) = -0,544\pi = -97,8^\circ \end{cases}$$

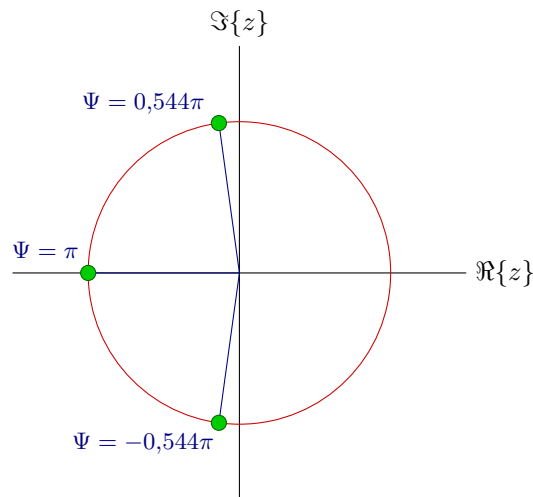
Y la posición de los ceros en el polinomio es:

$$z_c = e^{j\Psi_c} = \begin{cases} e^{-j\pi} = -1 \\ e^{-j0,544\pi} \end{cases}$$

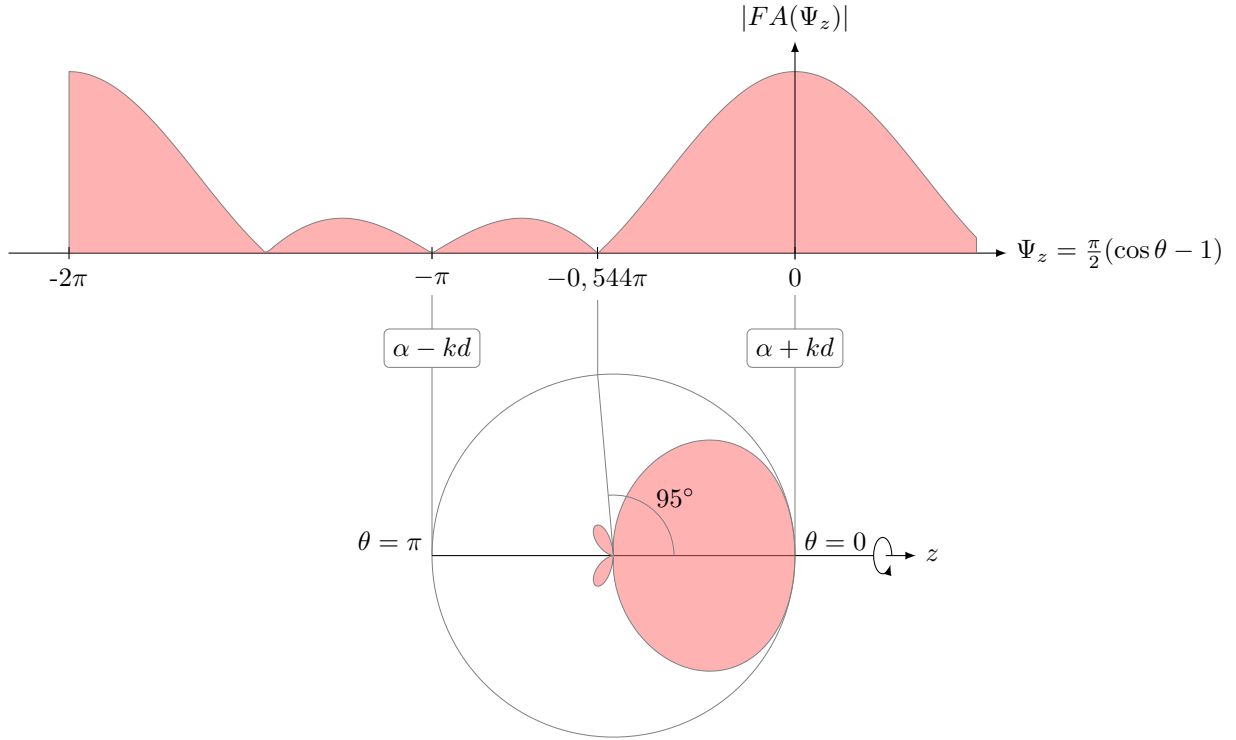
Y como me dicen que los ceros con parte imaginaria deben tener su correspondiente cero conjugado, añadimos el cero $z_c = e^{-j0,544\pi}$, de manera que finalmente quedan los siguientes tres ceros:

$$z_c = e^{j\Psi_c} = \begin{cases} -1 \\ e^{j0,544\pi} \\ e^{-j0,544\pi} \end{cases}$$

De esta forma los ceros en el plano z complejo quedan así:



- b) Conocidos los nulos Ψ_c del factor de agrupación $FA(\Psi)$, el diagrama se puede obtener mediante el método gráfico, tal y como se muestra en la figura. Nótese que el margen visible es $\Psi \in [\alpha - kd, \alpha + kd] = [-\pi, 0]$



c) Podemos obtener una expresión para el polinomio a partir de los ceros ya calculados de la siguiente forma:

$$p(z) = \prod_{n=1}^{N-1} (z - z_c^n)$$

donde N es el número de antenas (en este caso $N = 4$, luego hay tres ceros):

$$p(z) = (z - (-1)) \cdot (z - e^{j0,544\pi}) \cdot (z - e^{-j0,544\pi})$$

$$p(z) = (z + 1) \cdot (z^2 - 2 \cos(0,544\pi) z + 1)$$

$$p(z) = (z + 1) \cdot (z^2 + 0,273 z + 1)$$

$$p(z) = (z^3 + 1,273 z^2 + 1,273 z + 1)$$

Por tanto ya sabemos las amplitudes a_n del polinomio. Las corrientes de alimentación de los elementos de la agrupación serán $I_n = I_{\text{ref}} a_n e^{jn\alpha}$, donde I_{ref} es la corriente de referencia. Sabiendo que $\alpha = -90^\circ$, y suponiendo que $I_{\text{ref}} = 1$, las corrientes de alimentación serán las siguientes:

n	Módulo	Fase
1	1	0
2	1.273	-90°
3	1.273	-180°
4	1	-270°

d) El NLPS lo obtendremos dividiendo el valor del factor de agrupación en el lóbulo principal y en el lóbulo secundario:

$$NLPS = \frac{|FA(\Psi_{LP})|}{|FA(\Psi_{LS})|} = \frac{|FA(0)|}{|FA\left(\frac{-\pi-0,544\pi}{2}\right)|} = \frac{|FA(0)|}{|FA(-0,772\pi)|}$$

Para calcular el valor del factor de agrupación en esas posiciones necesitamos una expresión para $|FA(\Psi)|$:

$$FA(\Psi) = p(z = e^{j\Psi}) = (z + 1) \cdot (z^2 + 0,273 z + 1) \Big|_{z=e^{j\Psi}}$$

$$FA(\Psi) = (e^{j\Psi} + 1) \cdot (e^{2j\Psi} + 0,273 e^{j\Psi} + 1)$$

Tomando el módulo y haciendo uso de las expresiones que se dan como dato en el enunciado del problema:

$$|FA(\Psi)| = |e^{j\Psi} + 1| \cdot |e^{2j\Psi} + 0,273 e^{j\Psi} + 1| = |2 \cos(\Psi/2)| \cdot |0,273 + 2 \cos(\Psi)|$$

Por tanto:

$$NLPS = \frac{|2 \cos(0/2)| \cdot |0,273 + 2 \cos(0)|}{|2 \cos(-0,772\pi/2)| \cdot |0,273 + 2 \cos(-0,772\pi)|} = 5,25 = 14,4 \text{ dB}$$

e) El decaimiento en bordes lo podemos calcular de la siguiente forma:

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{D_f(\beta)}{D_f(0)} \right)$$

Sabiendo que la directividad se puede expresar como el producto de la directividad máxima por el diagrama de radiación de potencia ($D_f(\theta) = D_f t(\theta)$):

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{D_f t(\beta)}{D_f t(0)} \right)$$

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{t(\beta)}{t(0)} \right)$$

Y el diagrama de radiación de la agrupación es $t(\theta) = t_1(\theta) \cdot t_{\text{agr}}(\theta)$, donde $t_1(\theta)$ es el diagrama de radiación de un elemento de la agrupación aislado, y $t_{\text{agr}}(\theta) = |FA(\theta)|^2$ es el diagrama de la agrupación. Como se trata de una agrupación de radiadores isotrópicos, $t_1(\theta) = 1$. Por tanto:

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{|FA(\theta = \beta)|^2}{|FA(\theta = 0)|^2} \right)$$

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 20 \log_{10} \left(\frac{|2 \cos(\Psi_\beta/2)| \cdot |0,273 + 2 \cos(\Psi_\beta)|}{|2 \cos(0/2)| \cdot |0,273 + 2 \cos(0)|} \right)$$

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 20 \log_{10} \left(\frac{|2 \cos(\Psi_\beta/2)| \cdot |0,273 + 2 \cos(\Psi_\beta)|}{4,546} \right)$$

donde $\Psi_\beta = \Psi(\theta = \beta) = \frac{\pi}{2} (\cos \beta - 1)$

El valor del ángulo β lo podemos obtener a partir de la relación f/D del reflector, que sabemos que es 0,35:

$$\tan \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{4 \cdot (f/D)} = \frac{1}{4 \cdot 0,35} = 0,714$$

$$\beta = 2 \cdot \arctan(0,714) = 1,24 \text{ rad} = 71^\circ$$

$$\Psi_\beta = \Psi(\theta = \beta) = \frac{\pi}{2} (\cos 71^\circ - 1) = -0,337\pi$$

Finalmente:

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{1,24}{2} \right) \right) + 20 \log_{10} \left(\frac{|2 \cos(-0,337\pi/2)| \cdot |0,273 + 2 \cos(-0,337\pi)|}{4,546} \right) = -10 \text{ dB}$$

f) El pedestal C coincide con el valor del decaimiento en bordes del reflector, por tanto $C = 10^{-10/20} = 0,32$. A partir de la gráfica podemos ver que para un valor de $C \simeq 0,32$, el lóbulo secundario está a -22 dB. Por tanto el NLPS es 22 dB. Y también vemos que para ese valor de C caen 3 dB cuando $u = k a \sin \theta_{-3} \simeq 1,8$. Despejando $\theta_{-3} = 3,3^\circ$, y por tanto el ancho de haz a -3 dB es $\Delta_{-3} = 2\theta_{-3} = 6,6^\circ$.