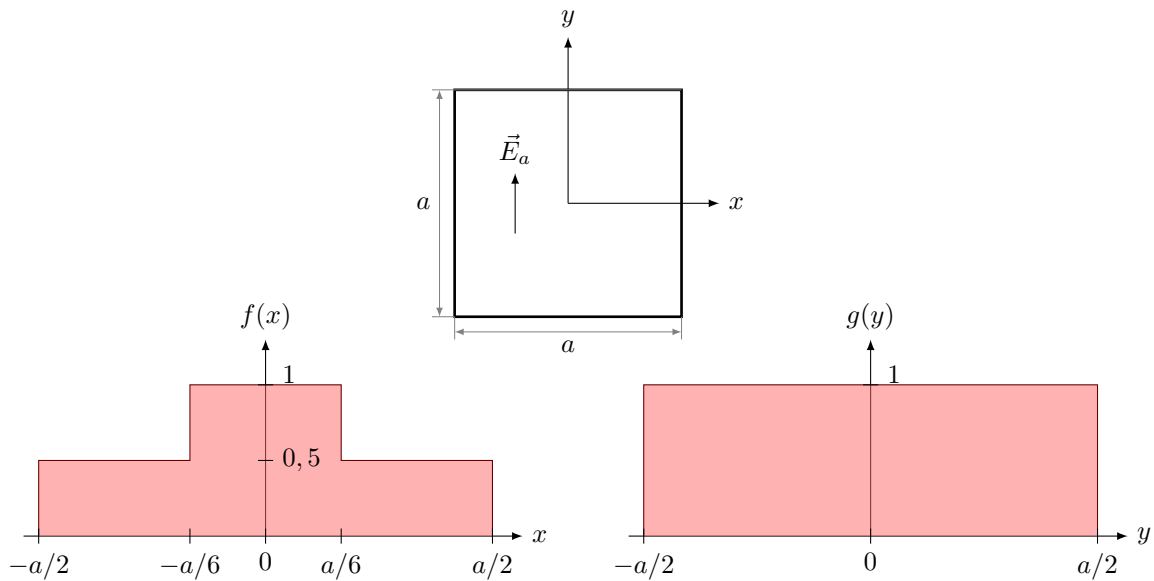


Problema 1

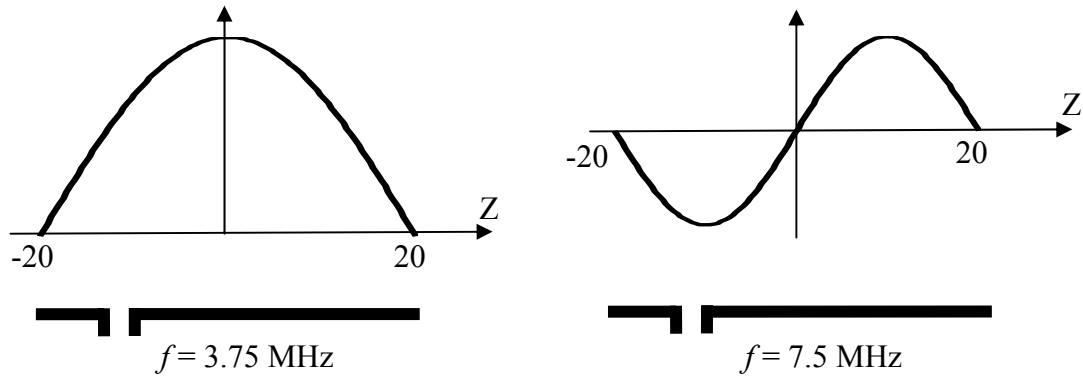
Se desea analizar una apertura cuadrada de lado $a=60$ cm trabajando a 3 GHz y situada en el plano XY , tal y como se muestra en la figura. La distribución de campo en la apertura es $\vec{E}_a = 10 f(x) g(y) \hat{y}$ V/m, donde $f(x)$ y $g(y)$ son las que se muestran en la figura. Se sugiere analizar la apertura como una agrupación de tres aperturas uniformes de tamaño $a/3 \times a$.



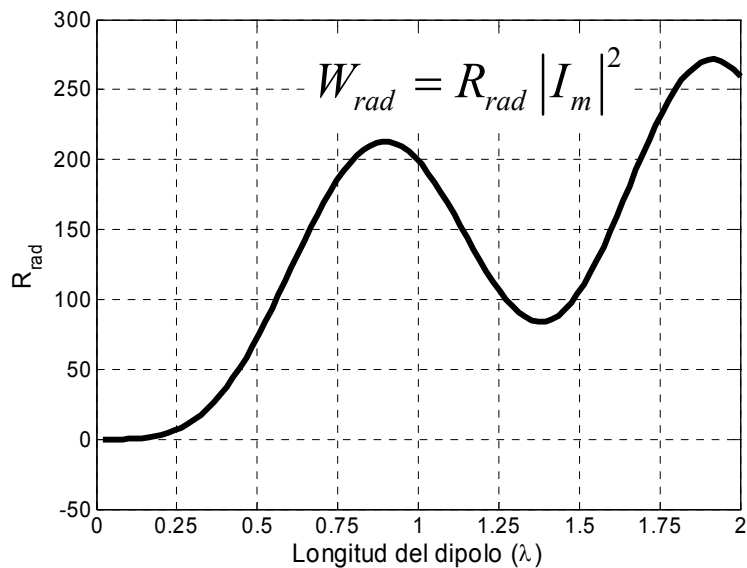
- Obtenga una expresión para la amplitud de campo radiado por la apertura (2 puntos).
- Dibuje de forma aproximada los cortes del diagrama de campo radiado en los planos E y H (4 puntos).
- Calcule el NLPS y el ancho de haz entre ceros en los cortes plano E y H del diagrama (2 puntos).
- Calcule la eficiencia de iluminación de la apertura y la directividad máxima (2 puntos).

PROBLEMA 2

La antena Windom es una antena muy sencilla empleada habitualmente por los radioaficionados. La antena consiste en un dipolo asimétrico de 40 m que trabaja en las frecuencias 3.75 MHz y 7.5 MHz. Los brazos del dipolo son de longitudes $H_1 = 13.4$ y $H_2 = 26.6$ m respectivamente. Las distribuciones de corriente a esas frecuencias son las mostradas en la figura



- Indique las expresiones de las corrientes $I(z)$ a ambas frecuencias. (1 punto)
- Determine la expresión del campo y dibuje el diagrama de radiación plano E para 7.5 MHz, indicando de forma aproximada la posición de los máximos. (2 puntos)
- La antena suele situarse paralela al suelo. Determine la altura h sobre el suelo que refuerza el máximo de radiación obtenido en b). (3 puntos)
- Obtenga la R_{in} de la antena para 3.75 MHz (se da la gráfica de la R_{rad} referida a I_m). (2 puntos)
- Despreciando posibles efectos mutuos en la impedancia por la presencia del suelo, determine la directividad en la dirección obtenida en b) cuando la antena trabaja a 3.75 MHz. (2 puntos)



Solución al Problema 1

a) La amplitud de campo radiado por la apertura será:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| \cdot |FA|$$

donde $|\vec{E}_1|$ es el campo radiado por una agrupación uniforme de tamaño $a/3 \times a$ con una amplitud de campo en la apertura $\vec{E}_a = 5\hat{y}$, y FA es el factor de agrupación de una agrupación triangular de tres antenas situadas a lo largo del eje x , separadas $a/3$, y alimentadas en fase. Por tanto:

$$\begin{aligned} |\vec{E}_1| &= \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \mathcal{TF}\{E_a(x, y)\} \\ &= \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \mathcal{TF}\left\{5 \text{rect}\left(\frac{x}{a/3}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{a}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) 5 \frac{a}{3} \text{sinc}\left(\frac{k_x a}{2\pi \cdot 3}\right) a \text{sinc}\left(\frac{k_y a}{2\pi}\right) \\ FA(\Psi_x) &= \left(\frac{\sin(\Psi_x)}{\sin\left(\frac{\Psi_x}{2}\right)} \right)^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $a=60$ cm, y que la frecuencia es 3 GHz, podemos deducir que $a = 6\lambda$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{k_x a}{2\pi \cdot 3} &= \frac{2\pi \sin \theta \cos \varphi}{\lambda} \frac{6\lambda}{3} = 2 \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{k_y a}{2\pi} &= \frac{2\pi \sin \theta \sin \varphi}{\lambda} 6\lambda = 6 \sin \theta \sin \varphi \\ \Psi_x &= k_x \frac{a}{3} + \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi \frac{6\lambda}{3} + 0 = 4\pi \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{1}{\lambda r} \frac{5a^2}{3} &= \frac{5 \cdot 36 \lambda^2}{3 \lambda r} = \frac{60\lambda}{r} = \frac{6}{r} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| \cdot |FA| = \frac{6}{r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \text{sinc}(2 \sin \theta \cos \varphi) \text{sinc}(6 \sin \theta \sin \varphi) \left(\frac{\sin(4\pi \sin \theta \cos \varphi)}{\sin\left(\frac{4\pi \sin \theta \cos \varphi}{2}\right)} \right)^2$$

b) Dado que el campo en la apertura está polarizado linealmente según \hat{y} , el plano E es el plano YZ , y el plano H es el plano XZ

En el plano E (YZ) $\varphi = \pi/2$. Por tanto el campo en el plano E es:

$$\begin{aligned} |\vec{E}|_{\varphi=\pi/2} &= \frac{6}{r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \text{sinc}(0) \text{sinc}(6 \sin \theta) \left(\frac{\sin(0)}{\sin\left(\frac{0}{2}\right)} \right)^2 \\ &= \frac{6}{r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \cdot 1 \cdot \text{sinc}(6 \sin \theta) (2)^2 \\ &= \frac{24}{r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \text{sinc}(6 \sin \theta) \end{aligned}$$

Y el corte del diagrama de campo en el plano E:

$$d_E(\theta) = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}|_{max}} \Big|_{\varphi=\pi/2} = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \text{sinc}(6 \sin \theta)$$

En la figura 1 se ha representado, utilizando el método gráfico, el diagrama $\text{sinc}(6 \sin \theta)$. En la tabla 1 se ha multiplicado dicho diagrama por el diagrama de la apertura elemental, aunque en este caso prácticamente no se modifica el diagrama $\text{sinc}(6 \sin \theta)$ ya que es muy directivo.

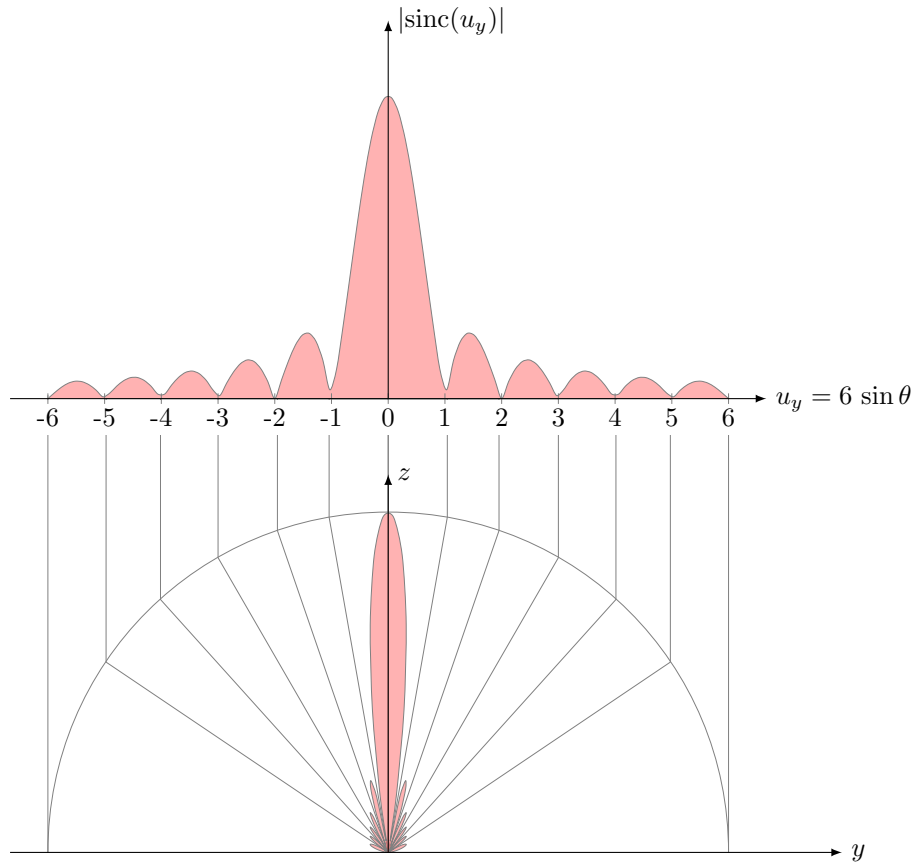


Figura 1: Diagrama de la TF de la distribución de campo en el eje y obtenido mediante el método gráfico

Apertura elemental	TF de la distrib. uniforme	Producto (Diagrama Plano E)

Tabla 1: Diagrama Plano E de la apertura

En el plano H (XZ) $\varphi = 0$. Por tanto el campo en el plano E es:

$$|\vec{E}|_{\varphi=0} = \frac{6}{r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \text{sinc}(2 \sin \theta) \left(\frac{\sin(4\pi \sin \theta)}{\sin\left(\frac{4\pi \sin \theta}{2}\right)} \right)^2$$

Y el corte del diagrama de campo en el plano H, teniendo en cuenta que $a = 6\lambda$:

$$d_H(\theta) = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}|_{max}} \Big|_{\varphi=0} = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \text{sinc}(2 \sin \theta) \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(4\pi \sin \theta)}{\sin\left(\frac{4\pi \sin \theta}{2}\right)} \right)^2$$

Podemos dibujar el diagrama $\text{sinc}(2 \sin \theta) \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(4\pi \sin \theta)}{\sin\left(\frac{4\pi \sin \theta}{2}\right)} \right)^2$ mediante el método gráfico si llamamos $u_x = 2 \sin \theta$. En este caso el margen visible es $u_x \in [-2, 2]$, y los ceros del diagrama serán los de $\text{sinc}(u_x)$ más los de $\frac{1}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi u_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi u_x}{2}\right)} \right)^2$:

- Ceros de $\text{sinc}(u_x)$: $u_x \in [-2, -1, 1, 2]$
- Ceros de $\frac{1}{4} \left(\frac{\sin(2\pi u_x)}{\sin(\frac{2\pi u_x}{2})} \right)^2$: Como es una agrupación triangular de tres antenas los ceros están en $\Psi_x \in [-3\pi, \pi, \pi, 3\pi]$. Como $u_x = \Psi_x/(2\pi)$, lo ceros de u_x son $u_x \in [-1.5, -0.5, 0.5, 1.5]$. Estos ceros son dobles pues se trata del factor de agrupación de una agrupación triangular.

En la figura 2 se han representado los diagramas $|\text{sinc}(u_x)|$, $\frac{1}{4} \left(\frac{\sin(2\pi u_x)}{\sin(\frac{2\pi u_x}{2})} \right)^2$ y el producto de los dos. Se puede observar que los ceros del producto de los dos diagramas están en $u_x \in [-2, -1.5, -1, -0.5, 0.5, 1, 1.5, 2]$.

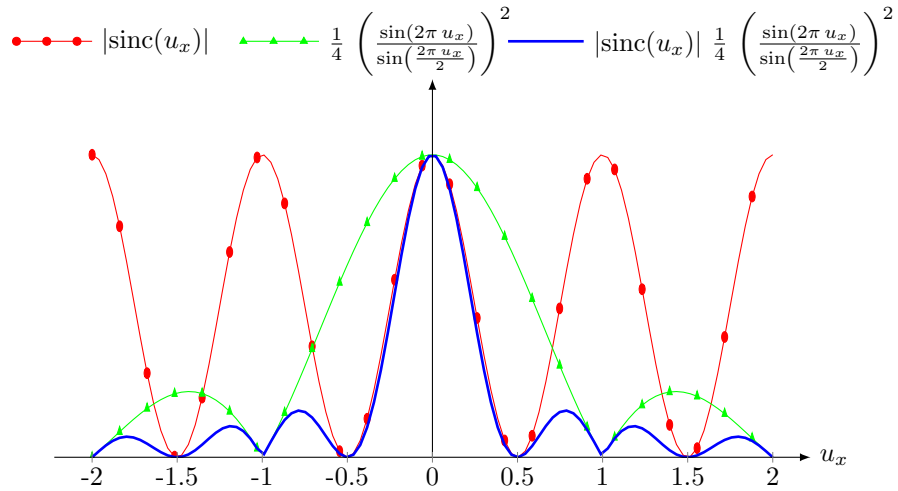


Figura 2: Diagramas $|\text{sinc}(u_x)|$, $\frac{1}{4} \left(\frac{\sin(2\pi u_x)}{\sin(\frac{2\pi u_x}{2})} \right)^2$ y producto de los dos.

En la figura 3 se ha dibujado el diagrama $\text{sinc}(2 \sin \theta) \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(2\pi u_x)}{\sin(\frac{2\pi u_x}{2})} \right)^2$ mediante el método gráfico.

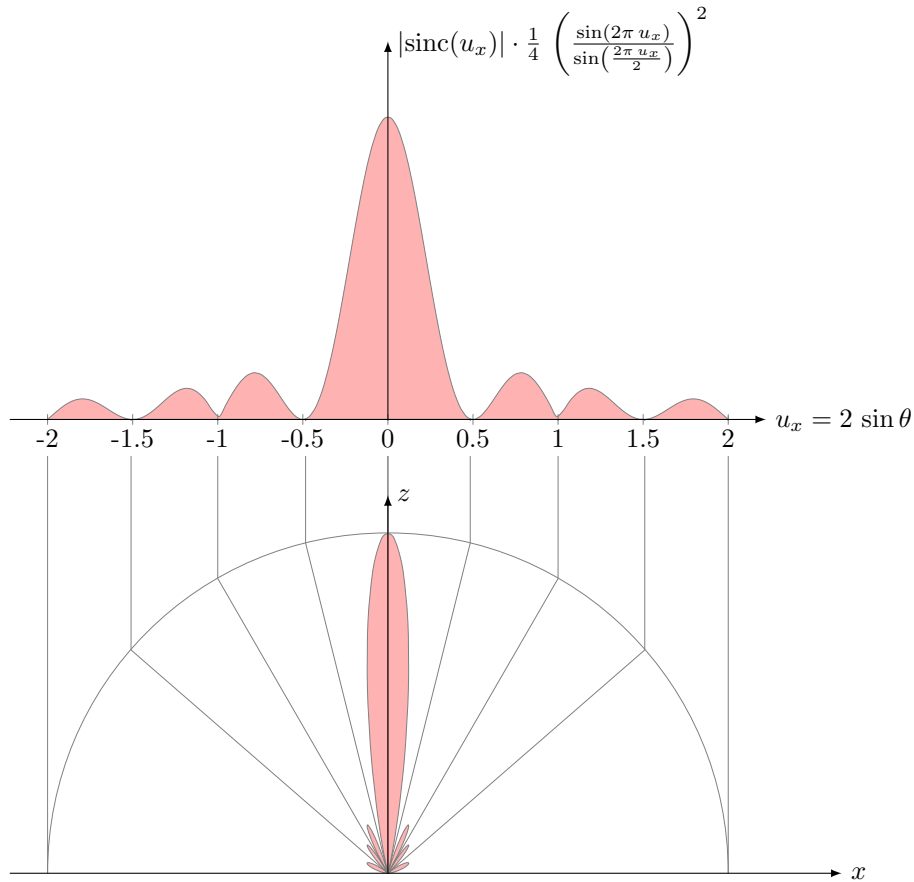


Figura 3: Diagrama de la TF de la distribución de campo en el eje x obtenido mediante el método gráfico

Finalmente el corte del diagrama de campo en el plano H será el producto del diagrama de la figura 3 por el diagrama de radiación de la apertura elemental, que de nuevo apenas modifica el diagrama. El producto de ambos diagramas se representa en la tabla 2.

Apertura elemental	TF de la distrib. campo en x	Producto (Diagrama Plano H)

Tabla 2: Diagrama Plano H de la apertura

c) El NLPS en el plano E será el de la transformada de la distribución uniforme, es decir, 13,2 dB. Si tenemos en cuenta el diagrama de la apertura elemental aumentará ligeramente este valor:

$$NLPS_E = \frac{d_E(\theta = \theta_{LP})}{d_E(\theta = \theta_{LS})} = \frac{d_E(\theta = 0)}{d_E(\theta \simeq \arcsin(1,5/6))} = \frac{1}{\left(\frac{1+\cos(14,5^\circ)}{2}\right) \text{sinc}(1,5)} = 13,6 \text{ dB}$$

En el plano H el NLPS será:

$$NLPS_H = \frac{d_H(\theta = \theta_{LP})}{d_H(\theta = \theta_{LS})} = \frac{d_H(\theta = 0)}{d_H(\theta \simeq \arcsin(0,75/2))} = \frac{1}{\left(\frac{1+\cos(22^\circ)}{2}\right) \text{sinc}(0,75) \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(2\pi \cdot 0,75)}{\sin\left(\frac{2\pi \cdot 0,75}{2}\right)}\right)^2} = 16,8 \text{ dB}$$

El primer cero en el corte plano E del diagrama se produce para $\theta = \arcsin(1/6) = 9,6^\circ$. Por tanto el ancho de haz entre ceros en el plano E es:

$$\Delta\theta_c^E = 2 \cdot 9,6^\circ = 19,2^\circ$$

En el corte plano H del diagrama el primer nulo se da en $\theta = \arcsin(0,5/2) = 14,5^\circ$. Por tanto el ancho de haz entre ceros en el plano E es:

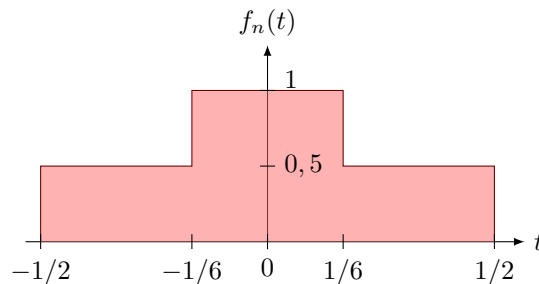
$$\Delta\theta_c^H = 2 \cdot 14,5^\circ = 29^\circ$$

d) La eficiencia de iluminación es:

$$\eta_{il} = \eta_{il_x} \cdot \eta_{il_y}$$

Como la distribución de campo en la apertura en el eje y es uniforme, $\eta_{il_y} = 1$.

Calcularemos ahora la eficiencia de iluminación en el eje x . Para ello normalizaremos la distribución de campo en la apertura en el eje x para que varíe entre $-1/2$ y $1/2$. En la figura se muestra la distribución de campo normalizada:



La eficiencia de iluminación en el eje x será:

$$\eta_{il_x} = \frac{\left| \int_{-1/2}^{1/2} f_n(t) dt \right|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |f_n(t)|^2 dt} = \frac{\left| \int_{-1/2}^{-1/6} \frac{1}{2} dt + \int_{-1/6}^{1/6} 1 dt + \int_{1/6}^{1/2} \frac{1}{2} dt \right|^2}{\int_{-1/2}^{-1/6} \frac{1}{4} dt + \int_{-1/6}^{1/6} 1 dt + \int_{1/6}^{1/2} \frac{1}{4} dt} = \frac{\left| \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{2} \right|^2}{\frac{1}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{4}} = \frac{8}{9} = 0,89$$

La directividad máxima será:

$$D = \frac{4\pi}{\lambda} a^2 \eta_{il_x} \eta_{il_y} = 4\pi \cdot 6^2 \cdot 0,89 = 403 = 26 \text{ dB}$$

SOLUCIÓN AL PROBLEMA 2

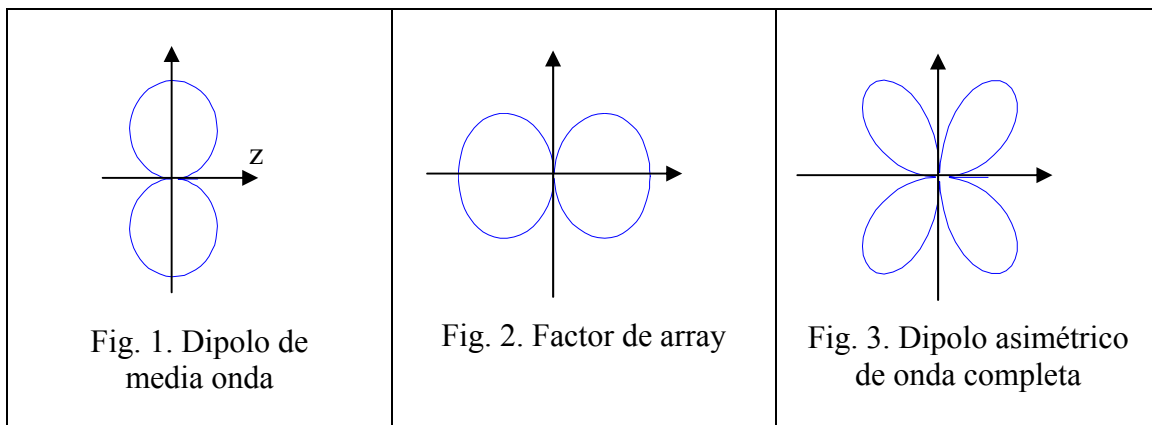
a) A la frecuencia de 3,75 MHz, la longitud de onda es 80 m. por lo tanto el dipolo tiene una longitud total de media longitud de onda. La distribución de corriente es

$I(z) = I_m \cos\left(\frac{\pi}{L} z\right)$, siendo $L = 40$ m, la longitud total del dipolo. Si se dobla la frecuencia, tenemos un dipolo de onda completa cuya distribución de corriente es la mostrada y que responde a la ecuación $I(z) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{L} z\right)$

b) A la frecuencia de 7,5 MHz, el dipolo asimétrico presenta una distribución que, para su análisis, se puede interpretar como si se tratara de un array de dos dipolos de media onda con corrientes opuestas. Por tanto

$$\vec{E} = j60I_m \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \hat{\theta} \cdot \left(e^{jk_z \frac{\lambda}{4}} - e^{-jk_z \frac{\lambda}{4}}\right)$$

En el plano E, los diagramas del dipolo y del array son



El producto de ambos nos da el diagrama de la figura 3.

De forma aproximada, se puede decir que los máximos apuntan en las dirección $\theta_{max}=45^\circ$ y $\theta_{max}=135^\circ$. Siendo más precisos y buscando los máximos por un proceso de máximos y mínimos obtenemos que el apuntamiento real es de $\theta_{max}=54^\circ$ y $\theta_{max}=126^\circ$.

c) Para reforzar el máximo obtenido en el apartado anterior, el rayo directo debe sumarse en fase con el reflejado en el suelo. El efecto combinado de la antena y el suelo, se puede analizar con ayuda de la teoría de las imágenes, suponiendo que el suelo actúa como un conductor perfecto. El conjunto antena-suelo, es equivalente a dos antenas con corrientes opuestas y separadas una distancia $2h$.

Si tomamos como eje x la dirección perpendicular al suelo, el factor de array asociado a la antena y su imagen es

$$FA_x = e^{jk_x h} - e^{-jk_x h} = 2j \sin(k_x h)$$

El plano E es el plano XZ, es decir, $\phi=0$ y por tanto $k_x = k \sin \theta$.

El máximo del factor de array es 2: $\left| 2 \operatorname{sen} \left[kh \operatorname{sen} (54^\circ) \right] \right| = 2$

por tanto el valor de h se obtiene haciendo $kh \operatorname{sen} (54^\circ) = \frac{\pi}{2}$. Es decir

$$h = \frac{\lambda}{3.23} = 12,36 \text{ m.}$$

Si $\theta_{\max} = 45^\circ$, entonces $h = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} = 14,14 \text{ m.}$

d) La resistencia a la entrada está relacionada con la resistencia de radiación. Para calcularla, aprovechamos que la potencia radiada debe ser la misma independientemente de dónde alimentemos.

Así, $W_{\text{rad}} = R_{\text{rad}} |I_m|^2 = R_{\text{in}} |I_{\text{in}}|^2$. La corriente a la entrada y la corriente máxima están relacionadas ya que $I_{\text{in}} = I \left(z = \frac{L}{2} - H_1 \right) = I_m \cos \left[\frac{\pi}{L} \left(\frac{L}{2} - H_1 \right) \right]$, siendo $H_1 = 13,4 \text{ m}$, la longitud del semibrazo menor. De modo que

$$R_{\text{in}} = \frac{R_{\text{rad}}}{\left| \cos \left[\frac{\pi}{L} \left(\frac{L}{2} - H_1 \right) \right] \right|^2} = \frac{73}{(0.86)^2} = 96.7 \Omega$$

e) La directividad en la dirección del apartado b), para la antena funcionando a 3,75 MHz, se calcula mediante

$$D(\theta = \theta_{\max}) = \frac{P(\theta = \theta_{\max})}{W_{\text{rad}}} 4\pi r^2,$$

siendo $P(\theta = \theta_{\max}) = \frac{|E(\theta = \theta_{\max})|^2}{\eta}$, donde el campo es el de un dipolo de media onda

multiplicado por un factor 2 debido al efecto del suelo ($|FA_x(\theta = \theta_{\max})| = 2$).

Así pues $|E(\theta = \theta_{\max})| = 60 \frac{|I_m|}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta_{\max}\right)}{\operatorname{sen} \theta_{\max}} \cdot 2$ y por otro lado $W_{\text{rad}} = R_{\text{rad}} |I_m|^2$.

Si se escogió $\theta_{\max} = 54^\circ$, entonces $D(\theta = 54^\circ) = 4.9$ (6.9 dB), mientras que para la dirección aproximada, y con la altura que corresponde, la directividad es ligeramente menor: 6.2 dB.