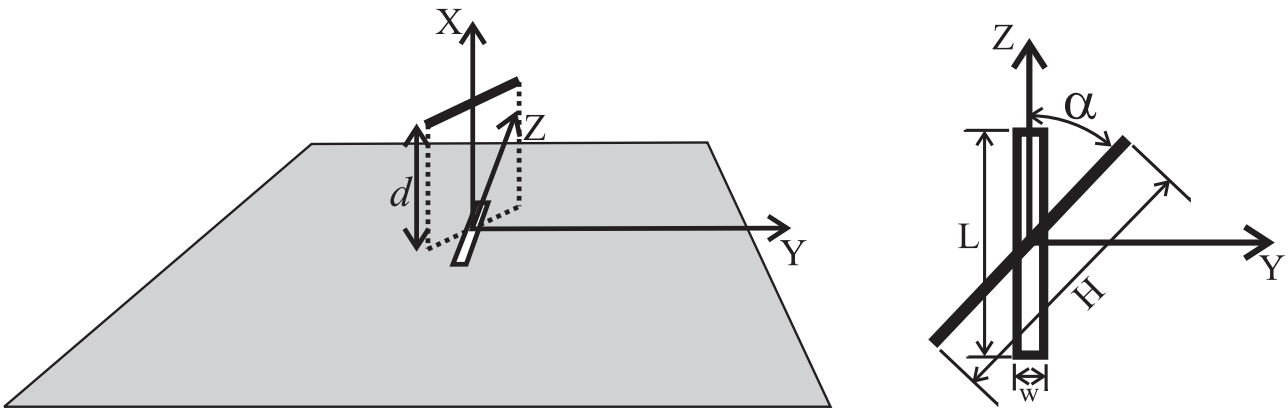


Problema 1

Considere la antena de la figura formada por una ranura en plano de masa y un dipolo. Ambas antenas son elementales y están orientadas según se muestra. La ranura está orientada en el eje Z y el dipolo está en un plano paralelo al plano YZ y se encuentra formando un ángulo α respecto al eje Z . El dipolo está a una altura $d = \lambda/4$ sobre el plano de masa. La longitud de la ranura es $L \ll \lambda$ y la del dipolo, $H \ll \lambda$. La anchura de la ranura es $w \ll L$.



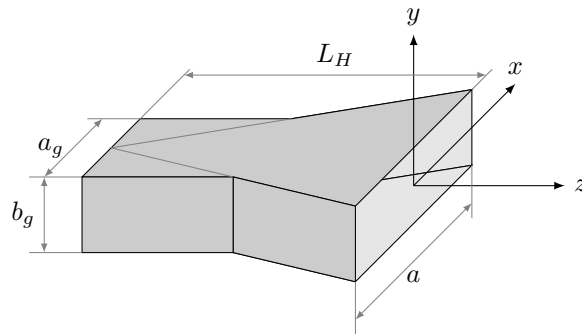
Se desea que el conjunto formado por ranura y dipolo radie polarización circular en la dirección broadside (eje X). Para ello debemos determinar la alimentación de la ranura (modulo y fase), $V = V_0 e^{j\psi}$, capaz de ello. Para simplificar el problema suponga que la corriente por el dipolo está normalizada: $I=1$ Amperio.

- Calcule el campo radiado por una ranura elemental de dimensiones $L \times w$ cuyo campo en la apertura es $\vec{E}_{ap} = -\frac{V_0 e^{j\psi}}{w} \hat{y}$. (2 puntos)
- Calcule el campo radiado por un dipolo elemental de longitud H y corriente $I=1$ Amperio situado paralelo a un plano conductor y a una distancia $d = \lambda/4$ de éste. El dipolo forma un ángulo α con respecto al eje Z . **IMPORTANTE:** Para que el campo radiado por la ranura y el dipolo se puedan sumar, es necesario que la referencia de fase sea la misma en ambos casos. Por tanto considere que el sistema de coordenadas es el de la figura, con $x = 0$ en la superficie del plano conductor. (2 puntos)
- Calcule el campo total, E_θ y E_ϕ , obtenido como la suma del radiado por ambas antenas y particularice para la dirección broadside (eje x). (1 punto)
- Obtenga la parte real e imaginaria de las componentes E_θ y E_ϕ del campo total en la dirección broadside. Calcule la fase de la tensión aplicada a la ranura, ψ , que hace que las componentes E_θ y E_ϕ estén en cuadratura. (2 puntos)
- Calcule la amplitud de la tensión aplicada a la ranura, V_0 , que hace que las amplitudes de E_θ y E_ϕ sean iguales en la dirección broadside. (2 punto)
- Sustituya el valor obtenido en e) para V_0 en la expresión de ψ , obtenida en el apartado d) de modo que quede explícito el valor de la fase. ¿Hay algún valor de α para el cual no sea posible obtener polarización circular? (1 punto)

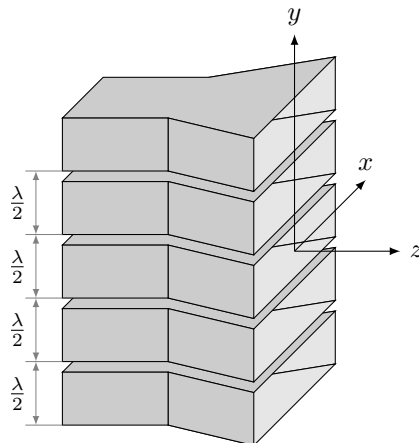
<p>Datos: $\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$ $\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$ $\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$</p>
--

Problema 2

Se desea diseñar una bocina sectorial plano H para transmitir a 11 GHz. La bocina se alimenta con una guía rectangular WR-90 de dimensiones $a_g=22,86$ mm y $b_g=10,16$ mm. Se pretende hacer un diseño en el que el error de fase sea despreciable, por lo que la longitud de la bocina L_H se fija a un valor muy elevado.



- Calcule el valor que debe tener el ancho de la boca de la bocina a para que la directividad sea de 12 dB. (2 puntos)
- Dibuje los diagramas plano E y plano H de la bocina. (2 puntos)



Para aumentar la directividad en el plano E se decide utilizar una agrupación de 5 bocinas en lugar de una sola bocina. Las 5 bocinas se colocan una encima de la otra tal y como se muestra en la figura. La distribución de amplitudes en la agrupación es triangular, la separación entre bocinas es de $\lambda/2$, y las 5 bocinas se alimentan en fase.

- Dibuje los diagramas plano E y plano H de la agrupación de 5 bocinas. (2 puntos)
- Obtenga el NLPS y el ancho de haz entre nulos en el plano E del diagrama total (teniendo en cuenta tanto el diagrama de la bocina como el de la agrupación). (2 puntos)
- Calcule la potencia que entregaría a una carga adaptada un dipolo de longitud $\lambda/2$ orientado según $\hat{x} + \hat{y}$ y situado en el eje Z a una distancia de 10 km de la agrupación de 5 bocinas. Suponga que la potencia radiada por la primera y la última bocina de la agrupación es de 1 W cada una. (2 puntos)

a) La corriente magnética equivalente es $\vec{M} = -2\hat{n} \times \vec{E}_{ap} = 2 \frac{V_0 e^{j\omega t}}{w} \hat{z}$

El vector de radiación resulta ser $L_z = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2 \frac{V_0 e^{j\omega t}}{w} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dy' dz' = 2V_0 e^{j\omega t} L$

Por tanto el campo radiado es $\vec{E}_{ranura} = E_\phi \hat{\phi} = j\omega\eta F_\theta \hat{\phi} = -j \frac{k}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} LV_0 e^{j\omega t} \sin\theta \hat{\phi}$

b) calculemos primero el campo radiado por un dipolo elemental centrado en el origen y cuya orientación es la que indica el enunciado. Su vector de radiación es

$\vec{N} = IH (\cos\alpha \hat{z} + \sin\alpha \hat{y})$. Se puede ver como dos dipolos con orientaciones z e y, respectivamente, siendo el campo radiado por cada uno de ellos:

$$N_z = H \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} E_\theta^z = -j\omega A_\theta = j\omega A_z \sin\theta = j \frac{k\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} H \cos\alpha \sin\theta \\ E_\phi^z = 0 \end{cases}$$

$$N_y = H \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} E_\theta^y = -j\omega A_\theta = -j\omega A_y \cos\theta \sin\phi = -j \frac{k\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} H \sin\alpha \cos\theta \sin\phi \\ E_\phi^y = -j\omega A_\phi = -j\omega A_y \cos\phi = -j \frac{k\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} H \sin\alpha \cos\phi \end{cases}$$

El campo total será $\vec{E}_0 = \vec{E}_0^z + \vec{E}_0^y$, la suma de ambos.

Si ahora consideramos el dipolo sobre el plano de masa, el problema es equivalente a dos dipolos en espacio libre con corrientes opuestas.

Para que la referencia de fase esté en el origen de coordenadas calculamos el campo como suma del de dos dipolos desplazados respecto al origen:

$$\vec{E}_{dipolo} = \vec{E}_0 e^{jk_x d} - \vec{E}_0 e^{-jk_x d} = 2j\vec{E}_0 \sin(k_x d)$$

c) Particularicemos ahora el campo total para la dirección broadside ($\theta=\pi/2, \phi=0$)

$$E_\theta^{total} = -\frac{k\eta}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} H \cos\alpha$$

$$E_\phi^{total} = \frac{k\eta}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} H \sin\alpha - j \frac{k}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} LV_0 e^{j\omega t}$$

d) Si descartamos el término de la propagación, $\frac{e^{-jkr}}{r}$, dado que es común a ambas componentes, observamos por un lado que

$$\operatorname{Re}\left[E_{\theta}^{total}\right] = -\frac{k\eta}{2\pi} H \cos \alpha$$

$$\operatorname{Im}\left[E_{\theta}^{total}\right] = 0$$

y por otro que

$$\operatorname{Re}\left[E_{\phi}^{total}\right] = \frac{k\eta}{2\pi} H \sin \alpha + \frac{k}{2\pi} LV_0 \sin \psi$$

$$\operatorname{Im}\left[E_{\phi}^{total}\right] = \frac{k}{2\pi} LV_0 \cos \psi$$

Dado que E_{θ}^{total} es real pura, para que ambas componentes de campo estén en cuadratura, E_{ϕ}^{total} debe ser imaginaria pura por lo que debemos obligar a que

$$\frac{k\eta}{2\pi} H \sin \alpha + \frac{k}{2\pi} LV_0 \sin \psi = 0,$$

Lo cual se consigue para una fase $\psi = \sin^{-1}\left(\frac{-\eta H \sin \alpha}{LV_0}\right)$

e) Conocido el valor de ψ en función de V_0 debemos ahora encontrar el valor de V_0 que hace $|E_{\theta}^{total}| = |E_{\phi}^{total}|$

sabemos que

$$|E_{\theta}^{total}| = \frac{k\eta}{2\pi r} H \cos \alpha$$

En cuanto a la componente E_{ϕ}^{total} , directamente tomamos la parte imaginaria ya que acabamos de forzar a que la parte real sea cero.

$$|E_{\phi}^{total}| = \frac{k}{2\pi r} LV_0 \cos \psi$$

Igualando ambas componentes $\eta H \cos \alpha = LV_0 \cos \psi$.

Ahora podemos poner el coseno de ψ como $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}$ e introducir el resultado del apartado anterior para obtener $V_0 = \eta \frac{H}{L}$

f) Finalmente es inmediato obtener una expresión explícita para ψ sin más que sustituir V_0 en la expresión obtenida en d) para ψ . Como se puede ver

$$\psi = -\alpha$$

Lo cual quiere decir que, al menos en teoría, sólo si $\alpha = \pm\pi/2$ no es posible conseguir polarización circular, ya que ranura y dipolo radian componentes de campo paralelas y la polarización es lineal.

Solución al Problema 2

a) La directividad de la bocina será:

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{geom} \eta_{il} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab_g \frac{8}{\pi^2} F(t) G(s)$$

Como la bocina es plano H, no hay error de fase a lo largo del eje y , y por tanto $G(s) = 1$. Por otro lado nos dicen que se desea hacer un diseño en el que el error de fase sea despreciable, por tanto $t \simeq 0$ y $F(t) \simeq 1$.

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab_g \frac{8}{\pi^2} = \frac{a}{\lambda} \frac{b_g}{\lambda} \frac{32}{\pi} = 12 \text{ dB} = 10^{12/10} = 15,85$$

Despejando:

$$\frac{a}{\lambda} = 15,85 \frac{\pi}{32} \frac{1}{\frac{b_g}{\lambda}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{11 \cdot 10^9} = 2,727 \text{ cm}$$

$$\frac{b_g}{\lambda} = 0,3725$$

Obtenemos finalmente:

$$\frac{a}{\lambda} = 15,85 \frac{\pi}{32} \frac{1}{0,3725} = 4,177$$

$$a = 4,177\lambda = 11,4 \text{ cm}$$

b) Puesto que el error de fase es despreciable, el campo en la apertura de la bocina será el siguiente (distribución coseno en el eje x y uniforme en el eje y , pero sin error de fase):

$$\vec{E}_a(x', y') = \begin{cases} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) \hat{y} & \text{dentro} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$\vec{E}_a(x', y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) \text{rect}\left(\frac{x'}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{b_g}\right) \hat{y}$$

La distribución de campo en la apertura es separable, y por tanto:

$$\vec{E}_a(x', y') = E_0 f(x') g(y') \hat{y}$$

$$f(x') = \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) \text{rect}\left(\frac{x'}{a}\right)$$

$$g(y') = \text{rect}\left(\frac{y'}{b_g}\right)$$

Y el campo radiado (amplitud) será (suponiendo que $Z_0 = \eta$):

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) I(k_x, k_y)$$

donde $I(k_x, k_y)$ es la transformada de Fourier 2-D del campo en la apertura. Como la distribución de campo es separable, la transformada 2-D será el producto de las transformadas de las distribuciones de campo a lo largo de los ejes x e y :

$$\begin{aligned}
I(k_x, k_y) &= E_0 F(k_x, a) G(k_y, b_g) \\
F(k_x, a) &= \mathcal{TF} \{f(x')\} = \frac{a \cos(\pi u_x)}{2\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 - u_x^2}, \quad u_x = \frac{k_x}{2\pi} a \\
G(k_y, b_g) &= \mathcal{TF} \{g(y')\} = b_g \text{sinc}(u_y), \quad u_y = \frac{k_y}{2\pi} b_g
\end{aligned}$$

El máximo de campo radiado se produce en la dirección perpendicular a la apertura (eje z). Por otro lado, como el campo eléctrico en la apertura está polarizado según y , el campo radiado en la dirección del eje z está también polarizado según y . De manera que el plano E será el formado por la dirección de máxima radiación (\hat{z}) y la polarización del campo radiado en esa dirección (\hat{y}). Es decir, el plano E es el plano YZ . Y el plano H es el plano XZ .

En el plano E (YZ), se cumple que $\phi = \pi/2$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
k_x &= k \sin \theta \cos \phi = 0 \\
k_y &= k \sin \theta \sin \phi = k \sin \theta \\
u_x &= \frac{k_x}{2\pi} a = 0 \\
u_y &= \frac{k_y}{2\pi} b_g = \frac{k \sin \theta}{2\pi} b_g = \frac{\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta}{2\pi} b_g = \frac{b_g}{\lambda} \sin \theta = 0,37 \sin \theta
\end{aligned}$$

Por tanto el campo radiado en ese plano será:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) I(k_x = 0, k_y = k \sin \theta)$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) E_0 \frac{2a}{\pi} b_g \text{sinc}(0,37 \sin \theta)$$

El diagrama de radiación de campo es:

$$d(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}|_{max}}$$

En el plano E será:

$$d(\theta, \phi = \pi/2) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \text{sinc}(0,37 \sin \theta)$$

Apertura elemental	TF de la distrib. uniforme	Producto (Diagrama Plano E)

Tabla 1: Diagrama Plano E de la bocina

El diagrama $(1 + \cos \theta)/2$ (diagrama de radiación de la apertura elemental) se ha dibujado utilizando el método gráfico en la figura 1. El diagrama $\text{sinc}(0,37 \sin \theta)$ también se ha dibujado utilizando el método gráfico (ver figura 2). Finalmente el producto de los dos diagramas nos proporciona el diagrama plano E de la bocina. En la Tabla 1 se muestra el diagrama total. Hay que tener en cuenta que puesto que se ha aplicado el teorema de equivalencia el diagrama es válido sólo hacia fuera de la bocina ($z > 0$).

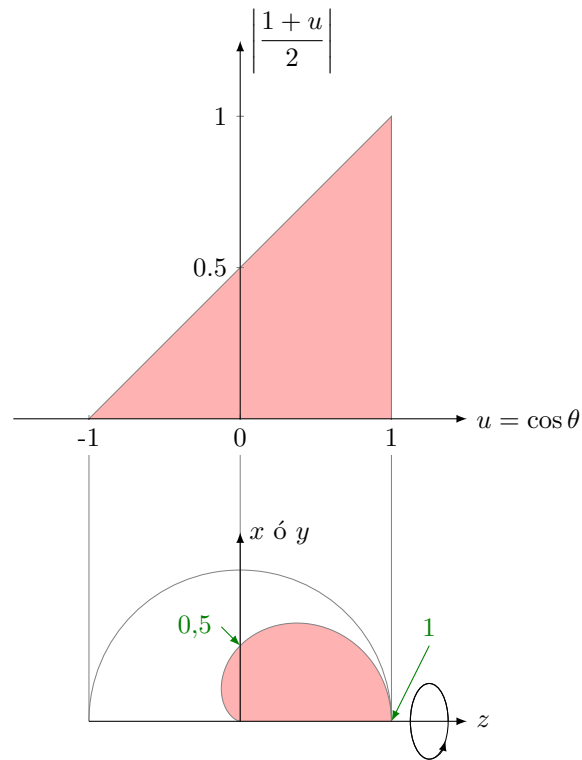


Figura 1: Diagrama de la apertura elemental obtenido mediante el método gráfico

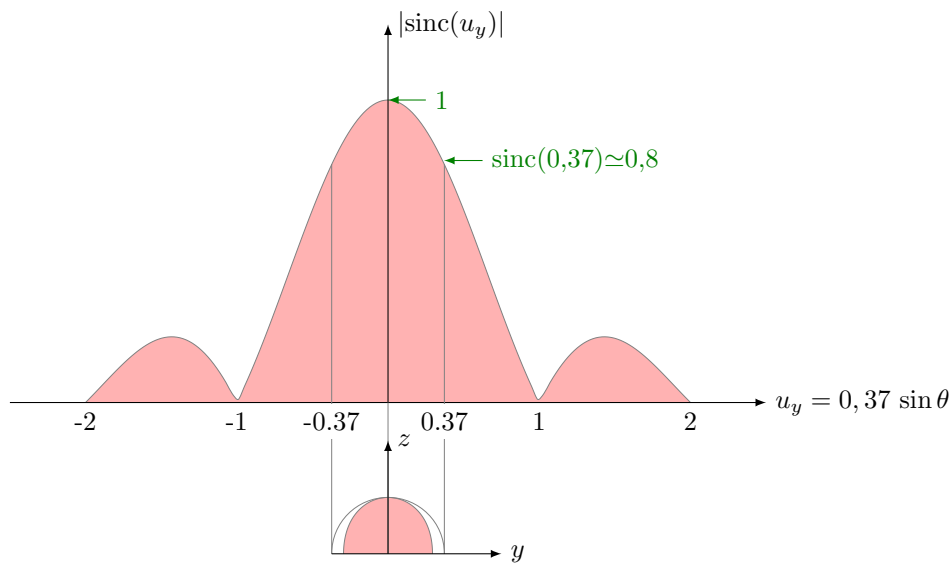


Figura 2: Diagrama de la TF de la distribución uniforme obtenido mediante el método gráfico

En el plano H (XZ), se cumple que $\phi = 0$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
 k_x &= k \sin \theta \cos \phi = k \sin \theta \\
 k_y &= k \sin \theta \sin \phi = 0 \\
 u_x &= \frac{k_x}{2\pi} a = \frac{k \sin \theta}{2\pi} a = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\sin \theta}{2\pi} a = \frac{a}{\lambda} \sin \theta = 4,177 \sin \theta \simeq 4,2 \sin \theta \\
 u_y &= \frac{k_y}{2\pi} b_g = 0
 \end{aligned}$$

Por tanto el campo radiado en ese plano será:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) I(k_x = k \sin \theta, k_y = 0)$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) E_0 \frac{a}{2\pi} \frac{\cos(\pi u_x)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - u_x^2} b$$

El diagrama de radiación de campo en el plano H será:

$$d(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}|_{max}}$$

$$d(\theta, \phi = 0) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \frac{1}{4} \frac{\cos(\pi u_x)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - u_x^2} = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \frac{\cos(\pi u_x)}{1 - (2u_x)^2}$$

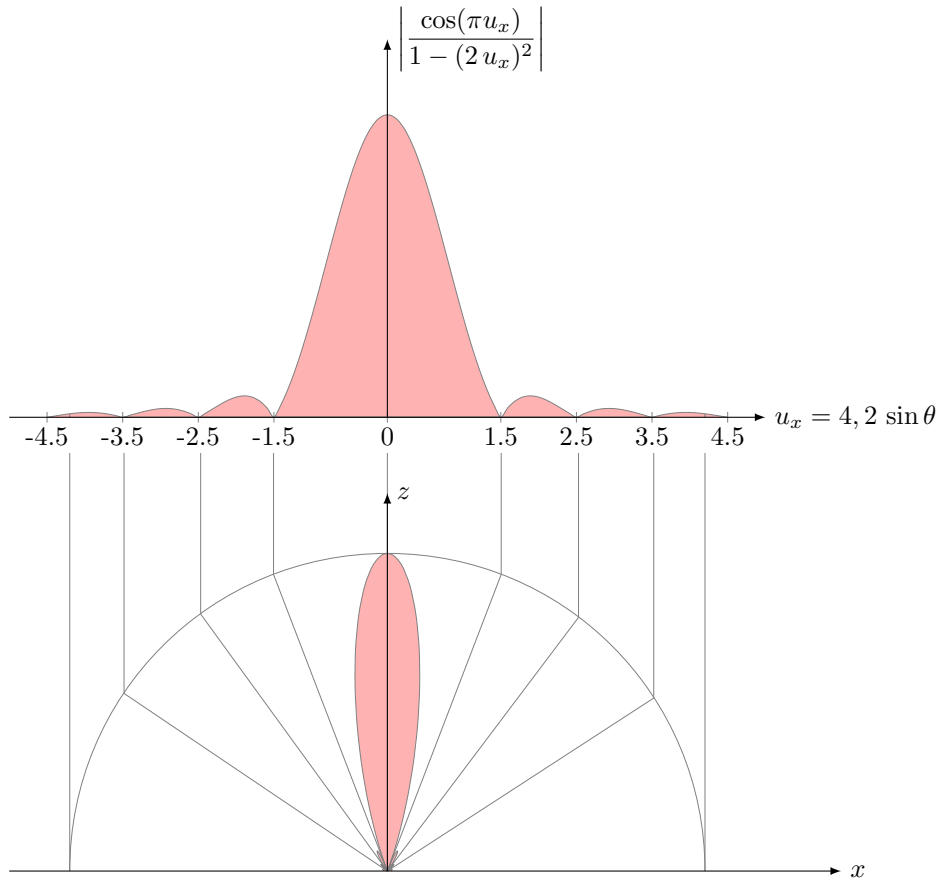


Figura 3: Diagrama de la TF de la distribución coseno obtenido mediante el método gráfico

En la figura 3 se muestra el diagrama $(\cos(\pi u_x))/(1 - (2u_x)^2)$. Como se aprecia en la Tabla 2 en este caso el diagrama de la apertura elemental se puede despreciar, debido a que la dimensión eléctrica de la apertura ($a/\lambda = 4,2$) en ese plano es grande. Por tanto, el diagrama plano H es directamente la transformada de Fourier de la distribución coseno. Por contra antes la dimensión eléctrica ($b_g/\lambda = 0,37$) era pequeña y no se podía despreciar el diagrama de radiación de la apertura elemental.

- c) La agrupación de bocinas es una agrupación triangular de 5 bocinas ($N = 5$) a lo largo del eje y , alimentadas en fase ($\alpha = 0$) y con un espaciado de $\lambda/2$. Por tanto, el factor de agrupación será (teniendo en cuenta que el origen de coordenadas está en el centro de la agrupación):

$$FA(\Psi_y) = \left(\frac{\sin\left(\frac{N'\Psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_y}{2}\right)} \right)^2$$

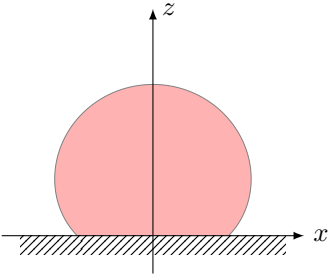
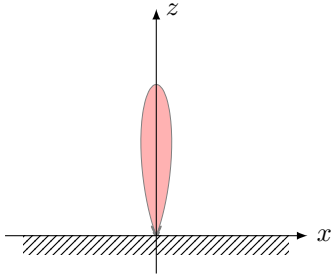
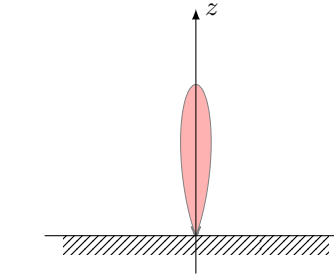
Apertura elemental	TF de la distrib. coseno	Producto (Diagrama Plano H)
		

Tabla 2: Diagrama Plano H de la bocina

$$N' = \frac{N + 1}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$FA(\Psi_y) = \left(\frac{\sin\left(\frac{3\Psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_y}{2}\right)} \right)^2$$

Sabemos que el FA es máximo en $\Psi_y = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. Sabemos que entre 0 y 2π hay $N' - 1 = 2$ ceros dobles en las posiciones $\Psi_y = 2\pi/3, 4\pi/3$. Con todo esto podemos dibujar el FA en función de Ψ_y , tal y como se muestra en la figura 4. Para poder determinar el diagrama de radiación en el espacio real hay que determinar el margen visible:

$$\Psi_y = k_y d + \alpha = k \sin \theta \sin \phi \frac{\lambda}{2} + 0 = \pi \sin \theta \sin \phi$$

$$\Psi_y \in [-\pi, \pi]$$

Sabiendo ya cuál es el margen visible se puede utilizar el método gráfico y obtener el diagrama de radiación en el espacio real, tal y como se ha hecho en la figura 4. Se puede apreciar que el diagrama de radiación tiene simetría de revolución en torno al eje de la agrupación (eje y). Por tanto el diagrama es omnidireccional en el plano perpendicular al eje de la agrupación (plano XZ).

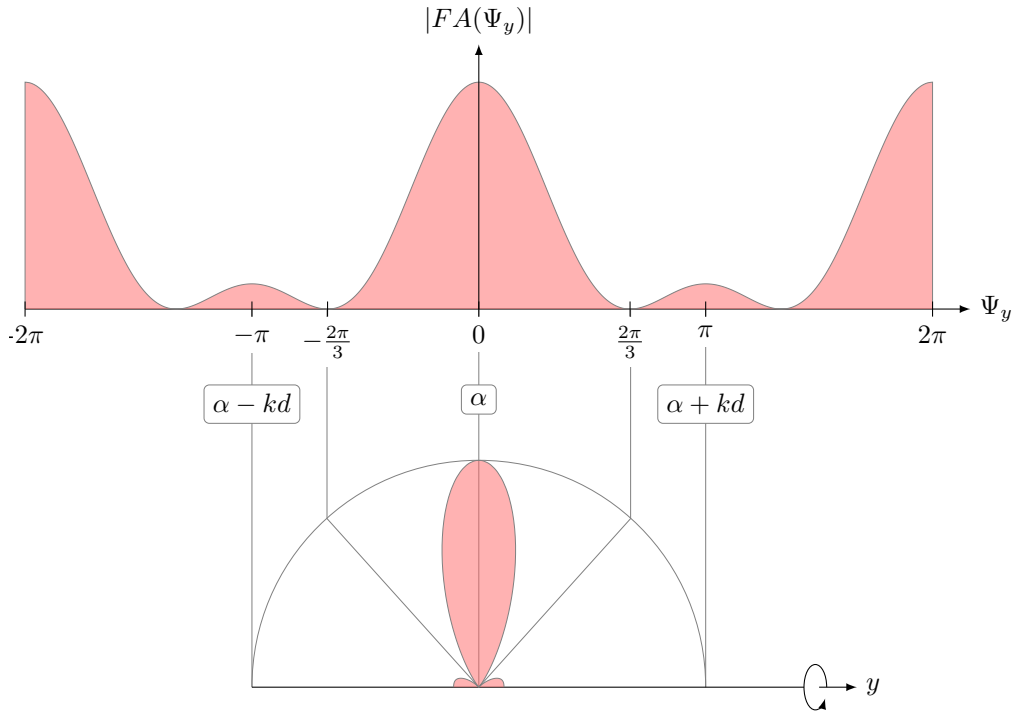


Figura 4: Diagrama de radiación de la agrupación

En la Tabla 3 se muestran los diagramas plano E y plano H de la agrupación de bocinas.

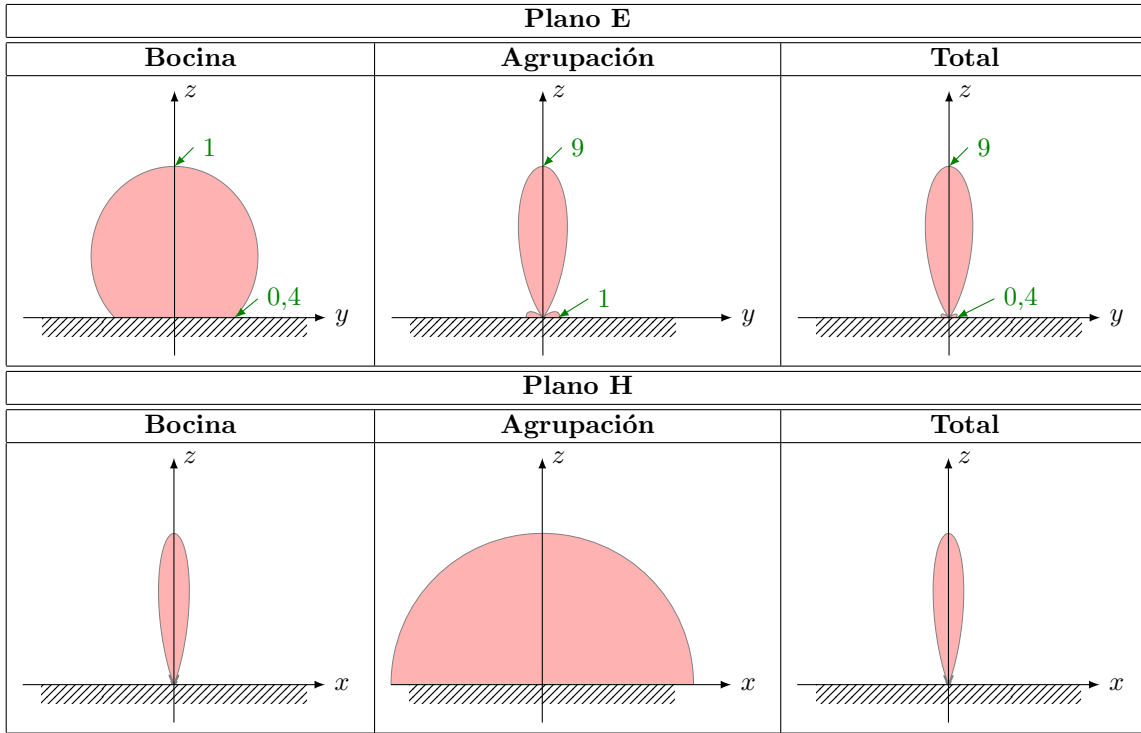


Tabla 3: Diagramas Plano E y Plano H de la agrupación de bocinas

- d) En la tabla 3 se ha anotado el valor del lóbulo principal (9) y secundario (0,4) en el diagrama plano E. Por tanto:

$$NLPS = 20 \log \left(\frac{9}{0,4} \right) = 27 \text{ dB}$$

Si observamos el diagrama plano E de la tabla 3 podemos apreciar que los nulos del diagrama los determina el diagrama de la agrupación, ya que el diagrama de la bocina no presenta nulos. Por tanto el ancho de haz entre nulos del diagrama total será el mismo que el del diagrama de la agrupación. En el plano E (plano YZ), se cumple que $\phi = \pi/2$ y $\Psi_y = \pi \sin \theta$. Y el nulo que delimita el lóbulo principal se da para $\Psi_y = 2\pi/3$ (ver figura 4). Por tanto, si llamamos θ_c al valor de θ para el cuál se da el nulo:

$$\frac{2\pi}{3} = \pi \sin \theta_c \rightarrow \theta_c = \arcsin \left(\frac{2}{3} \right) = 41,8^\circ$$

Y el ancho de haz entre nulos es el doble de θ_c :

$$\Delta\theta_c = 2\theta_c = 83,6^\circ$$

- e) La potencia recibida la podemos calcular mediante la ecuación de transmisión:

$$W_{rec} = W_t D_T D_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 C_a C_p$$

donde:

$$\begin{aligned} W_t &= 1 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 19 \text{ W} \\ D_R &= 1,64 \\ R &= 10 \cdot 10^3 \\ C_a &= 1 \end{aligned}$$

Quedan por determinar C_p y D_T . Esta última, la directividad de la antena transmisora (agrupación de 5 bocinas), se puede calcular de la siguiente forma:

$$D_T = \frac{|\vec{E}|_{max}^2}{\eta} \frac{4\pi r}{W_T} = \frac{|\vec{E}_1|_{max}^2 \cdot |FA|_{max}^2}{\eta} \frac{4\pi r}{W_{T_1}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^1)}$$

$$D_T = \frac{|\vec{E}_1|_{max}^2}{\eta} \frac{4\pi r}{W_{T_1}} \frac{|FA|_{max}^2}{(1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^1)} = D_1 \frac{9^2}{19} = 4,26 D_1$$

donde D_1 es la directividad de una sólo bocina, que ya sabemos que es 12 dB (15,85 en lineal).

$$D_T = 4,26 D_1 = 4,26 \cdot 15,85 = 67,5$$

El coeficiente de desacople de polarización lo calcularemos aplicando la fórmula:

$$C_p = \frac{|\vec{E}_i \cdot \vec{l}|^2}{|\vec{E}_i|^2 \cdot |\vec{l}|^2}$$

En este caso sabemos que el campo radiado por la agrupación de 5 bocinas estrará polarizado linealmente según \hat{y} , mientras que el dipolo receptor recibirá campo con polarización lineal según $\hat{x} + \hat{y}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= A\hat{y} \\ \vec{l} &= B(\hat{x} + \hat{y}) \end{aligned}$$

Las amplitudes A y B no son relevantes porque en la fórmula de C_p dividimos por la norma de \vec{E}_i y \vec{l} :

$$C_p = \frac{|A\hat{y} \cdot B(\hat{x} + \hat{y})|^2}{|A\hat{y}|^2 \cdot |B(\hat{x} + \hat{y})|^2} = \frac{A^2 B^2}{A^2 B^2 2} = 0,5$$

Finalmente:

$$W_{rec} = W_t D_T D_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 C_a C_p = 19 \cdot 67,5 \cdot 1,64 \cdot \left(\frac{0,02727}{4\pi \cdot 10 \cdot 10^3}\right)^2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 49,6 \cdot 10^{-12} \text{ W} = -73 \text{ dBm}$$