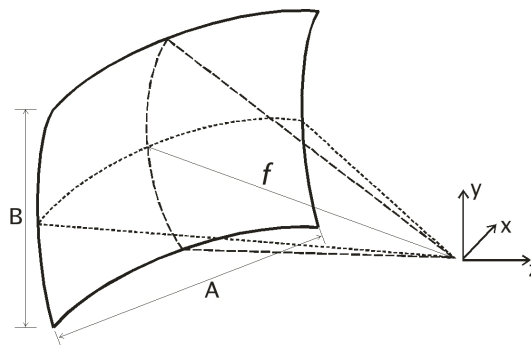
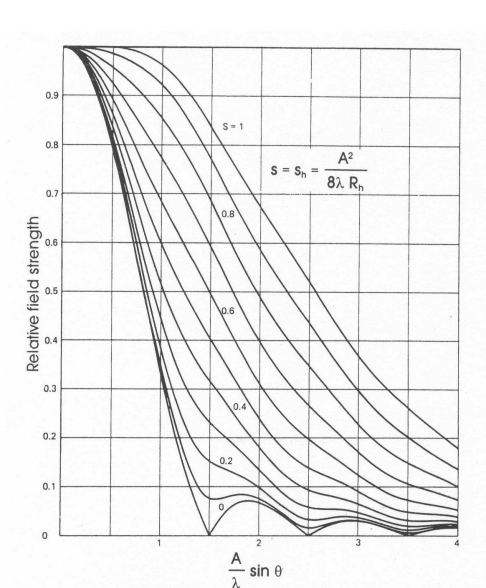


Problema 1

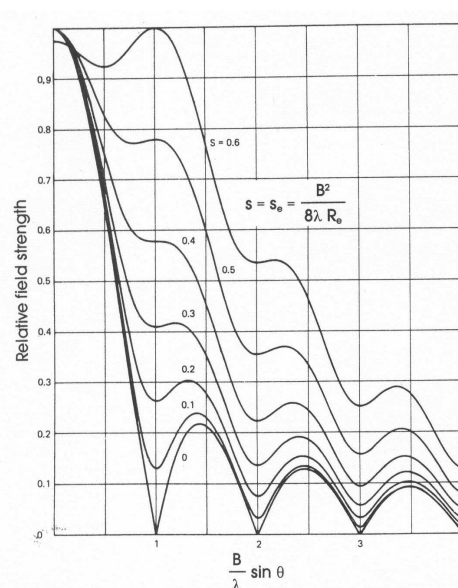
La figura representa un reflector parabólico cuya apertura equivalente es un rectángulo de dimensiones $A \times B$. La relación f/D es 0.75 en ambos planos principales y se alimenta con una bocina piramidal situada en el foco del paraboloides. La frecuencia de trabajo es $f_0=10$ GHz. La distancia focal es $f = 5\lambda_0$. La potencia entregada al alimentador es 1 vatio.



- Diseñe una bocina piramidal óptima, de modo que el nivel en bordes en ambos planos principales sea de -6 dB. Oriente la bocina de modo que la polarización de la misma sea \hat{y} . **Describa** el procedimiento seguido. (2 puntos)
- Calcule la directividad de la bocina. (1 punto)
- Calcule el valor numérico del campo máximo incidente sobre el reflector, E_0 . (2 puntos)
- Aproxime el campo en la apertura como una función separable, $E_0 f(x)g(y)$, de tipo coseno sobre pedestal en ambos planos principales. Calcule la eficiencia de iluminación de la apertura del reflector en función del valor del pedestal, C . Particularice luego para el caso de este problema. (2 puntos)
- Determine la eficiencia de desbordamiento y la directividad del reflector. (3 puntos)

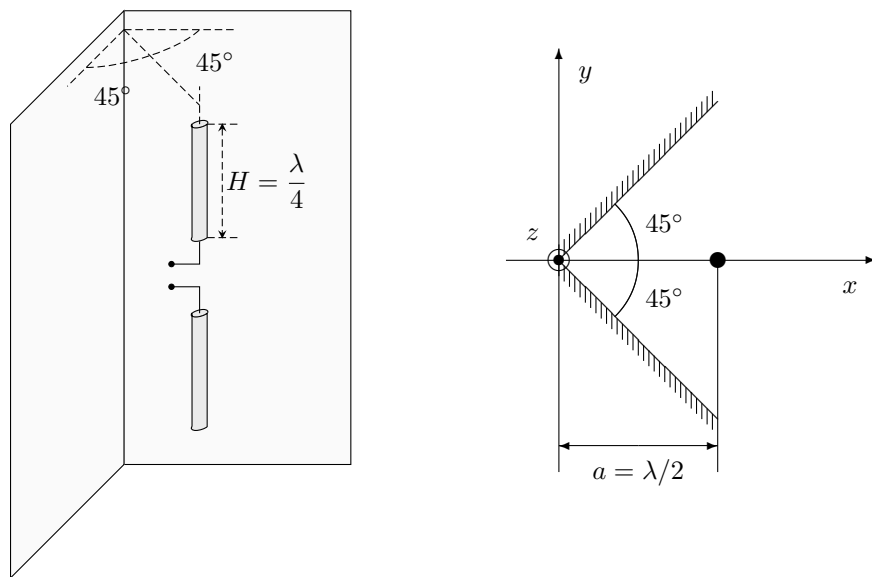


(a) Diagramas normalizados Plano H



(b) Diagramas normalizados Plano E

Problema 2

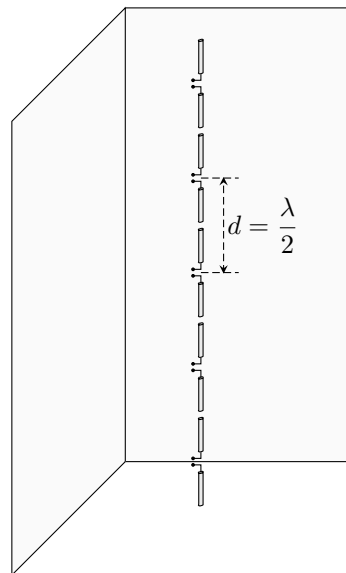
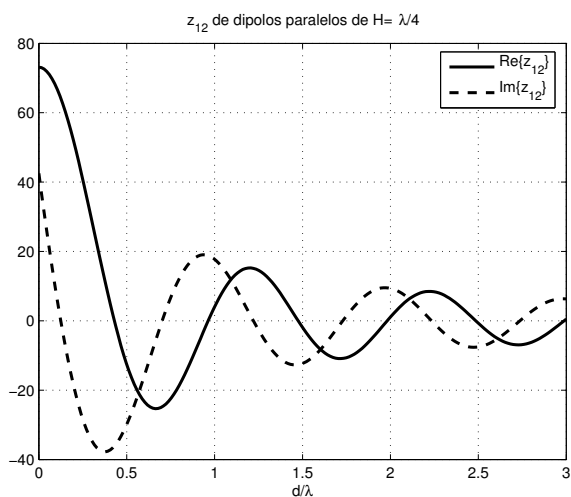


Un dipolo de semibrazo $H = \lambda/4$ se sitúa paralelo, y a una distancia $a = \lambda/2$, de un diedro de dos planos conductores perfectos que forman entre sí un ángulo de 90° , tal y como se muestra en la figura, y que se extienden hasta el infinito. El dipolo es paralelo al eje z , y los planos están situados en $\phi = \pm 45^\circ$. Para el dipolo frente al diedro conductor:

- Dibuje los diagramas plano E y plano H (2 puntos).
- Calcule la impedancia de entrada. Para ello utilice la gráfica de la impedancia mutua que se adjunta (2 puntos).
- Calcule la directividad máxima (2 puntos).

Ahora en lugar de un sólo dipolo se coloca una agrupación lineal uniforme broadside de 5 dipolos $H = \lambda/4$ separados una distancia $d = \lambda/2$ entre sí, tal y como se muestra en la figura. Considere que los dipolos están desacoplados entre sí y que la impedancia de entrada de cada uno de ellos es la calculada en el apartado b). Para la agrupación de dipolos frente al diedro:

- Dibuje los diagramas plano E y plano H (2 puntos).
- Calcule la directividad máxima (2 puntos).



Solución al Problema 1

- a) La caída de 6 dB en bordes del reflector, se debe a dos contribuciones: La atenuación por propagación y la directividad de la bocina. Dado que la relación f/D es 0.75, el ángulo con el que se ve el borde del reflector, β , es 37° y se obtiene mediante

$$\frac{f}{D} = \frac{1}{4 \tan \frac{\beta}{2}}$$

y en consecuencia la caída en el borde por propagación es

$$\tau_c = 40 \log \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) = -1 \text{ dB}$$

Así pues la directividad de la bocina debe ser tal que a β grados de la dirección broadside el nivel esté 5 dB por debajo del máximo ($\tau_d = -5$ dB).

Para obtener las dimensiones de la bocina que garantizan ese nivel en bordes, contamos con las gráficas universales plano E y plano H. De todas ellas seleccionamos las correspondientes a la bocina óptima, como se indica en el enunciado. Es decir, $t = s_h = 3/8$ y $s = s_e = 1/4$.

El nivel de -5 dB necesario, en escala lineal corresponde a un campo relativo al máximo de 0.56 en el eje vertical de las gráficas.

Esto se traduce en un valor de $\frac{b}{\lambda} \sin \beta = 0,7$ para el plano E, y $\frac{a}{\lambda} \sin \beta = 0,9$ para el plano H.

Despejando a y b en función de la longitud de onda, $a = 1,5\lambda$ y $b = 1,17\lambda$. Por su parte, las longitudes L_E y L_H de la bocina son inmediatas de obtener dado que la bocina es óptima:

$$\frac{1}{4} = \frac{b^2}{8\lambda L_E} \text{ y } \frac{3}{8} = \frac{a^2}{8\lambda L_H}$$

de donde $L_E = 0,7\lambda$ y $L_H = 0,75\lambda$

- b) La bocina es óptima por lo que su eficiencia es aproximadamente $\eta = 0,5$. La directividad es

$$D_{bocina} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab\eta = 11, (10,5 \text{ dB})$$

- c) El campo máximo incidente en la superficie del reflector E_0 se puede obtener igualando la definición de directividad, al valor obtenido en el apartado anterior:

$$\frac{E_0^2/\eta}{W_{rad}/4\pi r^2} = D_{bocina}$$

de donde $E_0 = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{D_{bocina}\eta W_{rad}}{4\pi}} = 1,2 \text{ V/cm}$.

- d) La distribución de campo coseno sobre pedestal se expresa como

$$f(x) = C + (1 - C) \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

La distribución de campo coseno sobre pedestal se expresa como $f(x) = C + (1 - C) \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right)$ siendo L la dimensión de la apertura en x . Dado que la apertura es separable, la eficiencia de iluminación total se puede obtener como producto de las eficiencias en ambas dimensiones: $\eta_{il} = \eta_x \cdot \eta_y$. En este caso la distribución en ambos planos es la misma por lo que basta calcular una de ellas

$$\eta_x = \frac{1}{L} \frac{\left(\int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx \right)^2}{\int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2 dx} = \frac{\left[C + \frac{2}{\pi} (1 - C) \right]^2}{C^2 + \frac{(1 - C)^2}{2} + \frac{4C(1 - C)}{\pi}}$$

En el caso particular del problema, C es 0.5 ($\tau = -6$ dB) y por tanto $\eta_x = 0,97$ y la eficiencia total $\eta = \eta_x^2 = 0,94$.

- e) La eficiencia de desbordamiento es la relación entre la potencia captada por el reflector y la transmitida por la bocina. En este caso, esta última es $W_{rad} = 1$, y la potencia captada por el reflector, W_a , se puede calcular a partir de la distribución de campo en la apertura y el campo máximo calculado en el apartado c) mediante:

$$W_a = \frac{1}{\eta} \int_{-A/2}^{A/2} \int_{-B/2}^{B/2} |E_a(x, y)|^2 dx dy$$

donde el campo en la apertura es

$$E_a(x, y) = E_0 \left[C + (1 - C) \cos\left(\frac{\pi}{A}x\right) \right] \left[C + (1 - C) \cos\left(\frac{\pi}{B}x\right) \right]$$

Sustituyendo obtenemos

$$\eta_s = \frac{W_a}{W_{rad}} = \frac{1}{\eta} E_0^2 \cdot AB \cdot \left[C^2 + \frac{(1 - C)^2}{2} + \frac{4C(1 - C)}{\pi} \right]^2 = \frac{1}{120\pi} 1,2^2 (6,66 \cdot 3)^2 \cdot 0,69^2 = 0,73$$

y la directividad del reflector resulta

$$D_{ref} = \frac{4\pi}{\lambda^2} AB \eta_{il} \eta_s = 382,5 \text{ (26dB)}$$

Solución al Problema 2

- a) Para analizar el dipolo frente al reflector aplicaremos la teoría de imágenes. En la siguiente figura se muestran los tres dipolos imagen que aparecen, su posición y el valor de la corriente que circula por ellos.

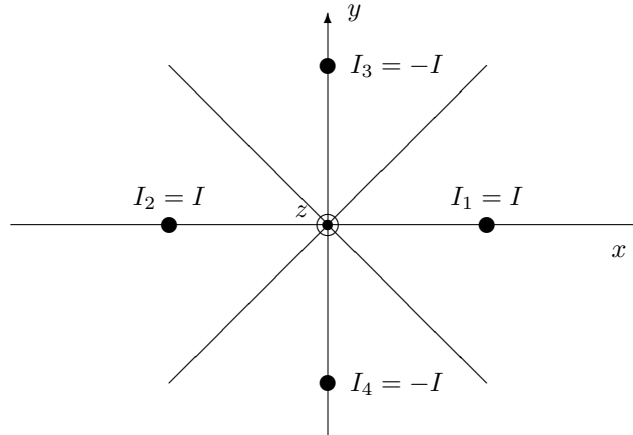


Figura 1:

El vector de radiación total será la superposición del vector de radiación de los cuatro dipolos:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{N}_{\lambda/4} e^{jk_x a} + \vec{N}_{\lambda/4} e^{-jk_x a} - \vec{N}_{\lambda/4} e^{jk_y a} - \vec{N}_{\lambda/4} e^{-jk_y a} \\ \vec{N} &= 2 \vec{N}_{\lambda/4} (\cos(k_x a) - \cos(k_y a)) \\ \vec{N} &= \vec{N}_{\lambda/4} \cdot FA\end{aligned}$$

donde $\vec{N}_{\lambda/4}$ es el vector de radiación de un dipolo de semibrzzo $H = \lambda/4$ situado en el origen de coordenadas y paralelo al eje z :

$$\vec{N}_{\lambda/4} = \frac{\lambda}{\pi} I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \hat{z}$$

Por tanto el vector de radiación total es el de un dipolo aislado por un factor de agrupación. Y el campo eléctrico radiado será el campo radiado por el dipolo $H = \lambda/4$ por ese factor de agrupación:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{\lambda/4} \cdot FA \\ \vec{E} &= j \frac{60 I_m}{r} e^{-jkr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \hat{\theta} \cdot 2 (\cos(k_x a) - \cos(k_y a))\end{aligned}$$

Para representar el diagrama de radiación en el plano E debemos en primer lugar determinar cuál es ese plano (formado por la dirección de máxima radiación y la polarización del campo eléctrico en esa dirección).

El campo radiado por el dipolo aislado ($\vec{E}_{\lambda/4}$) es máximo en cualquier dirección del plano XY. El factor de agrupación será máximo cuando:

$$\begin{aligned}|\cos(k_x a) - \cos(k_y a)| &= 2 \\ |\cos(k \sin \theta \cos \phi a) - \cos(k \sin \theta \sin \phi a)| &= 2 \\ \left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \frac{\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \frac{\lambda}{2}\right) \right| &= 2 \\ |\cos(\pi \sin \theta \cos \phi) - \cos(\pi \sin \theta \sin \phi)| &= 2\end{aligned}$$

La ecuación anterior se cumple cuando los argumentos de los cosenos son uno 0 y el otro π . Y eso sucede cuando $\sin \theta = 1$ y $\cos \phi$ y $\sin \phi$ valen el uno 0 y el otro 1. Es decir, se cumple para los siguientes valores de θ y ϕ :

θ	ϕ	Dirección
$\pi/2$	0	$+\hat{x}$
$\pi/2$	$\pi/2$	$+\hat{y}$
$\pi/2$	π	$-\hat{x}$
$\pi/2$	$3\pi/2$	$-\hat{y}$

No obstante, hemos de recordar que hemos aplicado teoría de imágenes y que en el problema original existen dos planos metálicos que se extienden hasta el infinito en $\phi = \pm\pi/4$. Al aplicar teoría de imágenes los planos desaparecen, pero el campo radiado que obtenemos tan sólo es válido en $\phi \in [-\pi/4, \pi/4]$. Por tanto el único máximo válido es el de $+\hat{x}$. Así que en la dirección $+\hat{x}$ tanto el diagrama del dipolo aislado como de la agrupación son máximos, y por tanto esa es la dirección de máxima radiación. El dipolo produce un campo eléctrico polarizado según $\hat{\theta}$, y el eje \hat{x} se cumple que $\hat{\theta}(\theta = \pi/2, \phi = 0) = -\hat{z}$. Por tanto el plano E es el plano XZ. Y el plano H es el plano XY, que es el que contiene a la dirección de máxima radiación ($+\hat{x}$) y al campo magnético en esa dirección ($\hat{\phi}(\theta = \pi/2, \phi = 0) = \hat{y}$).

En el plano E (XZ) se cumple que $\phi = 0$. Por tanto:

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi = k \sin \theta$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \phi = 0$$

Y el factor de agrupación en ese plano es:

$$FA(\theta, \phi = 0) = FA(k_x = k \sin \theta, k_y = 0) = 2 (\cos(k \sin \theta a) - \cos(0))$$

$$FA(\theta, \phi = 0) = 2 (\cos(\pi \sin \theta) - 1)$$

Para dibujar ese diagrama recurriremos al método gráfico. Si llamamos $u = \pi \sin \theta$, debemos representar la función $f(u) = |2 (\cos(u) - 1)|$. Como $\sin \theta$ puede variar entre -1 y 1, u variará entre $-\pi$ y π . En la figura 2 se ha utilizado el método gráfico para calcular el diagrama de la agrupación en el plano XZ.

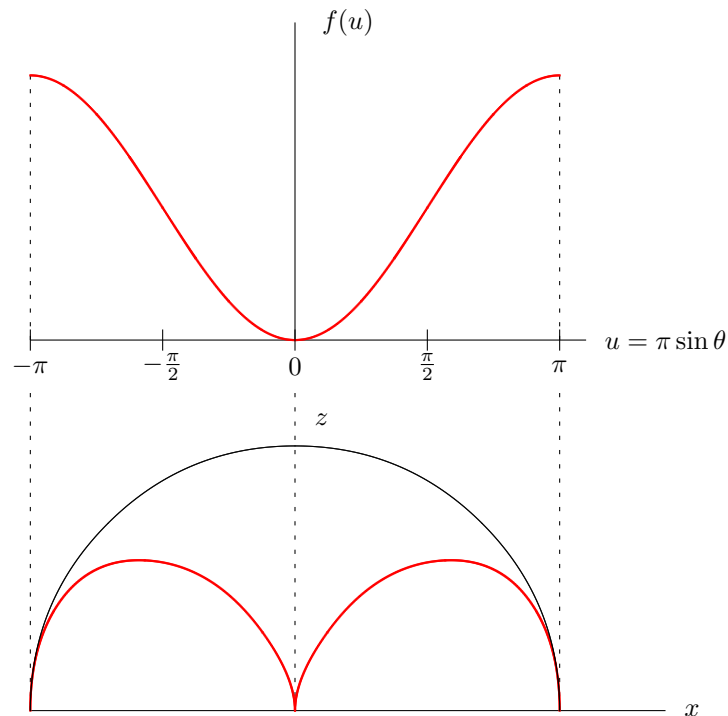


Figura 2: Determinación del diagrama de radiación de la agrupación en el plano XZ mediante el método gráfico

Ya estamos en condiciones de representar los diagramas de radiación del dipolo aislado (parecido al del dipolo elemental, pero un poco más directivo), de la agrupación (el calculado en la figura 2), y del dipolo frente al diedro (el producto de los dos diagramas), en el plano E. En la tabla 1 se muestran dichos diagramas. Obsérvese que se ha anulado la parte del diagrama en el semiplano $z < 0$ porque en ese semiplano están los planos conductores y en su interior el campo es nulo.

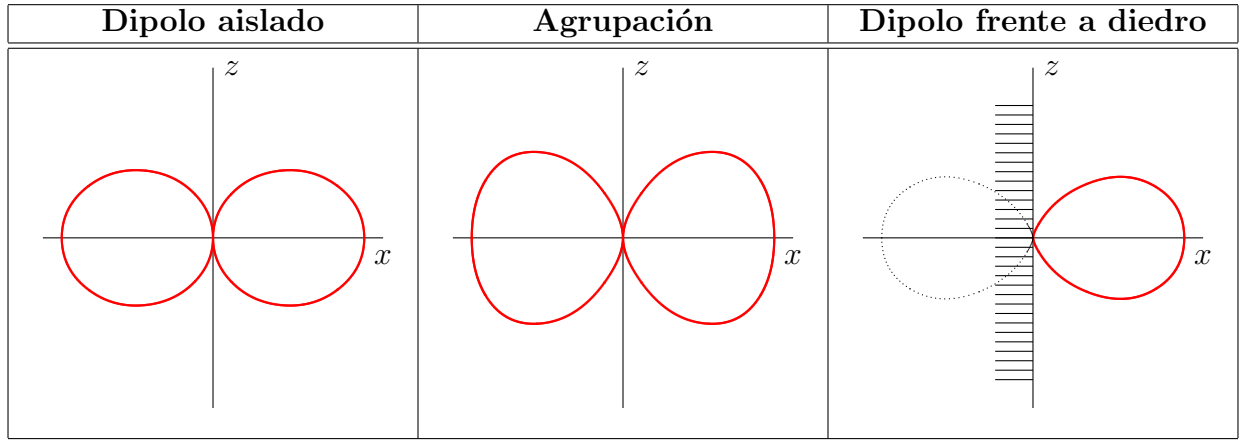


Tabla 1: Diagramas en el plano E (XZ)

Ahora representaremos el diagrama del dipolo frente al diedro en el plano H (plano XY). El diagrama de radiación del dipolo aislado es omnidireccional en ese plano. El factor de agrupación particularizado en el plano XY ($\theta = \pi/2$) es:

$$FA(\theta = \pi/2, \phi) = FA(k_x = k \cos \phi, k_y = k \sin \phi) = 2(\cos(k \cos \phi a) - \cos(k \sin \phi a))$$

$$FA(\theta = \pi/2, \phi) = f(\phi) = 2(\cos(\pi \cos \phi) - \cos(\pi \sin \phi))$$

Para representar este diagrama podemos buscar los nulos y los máximos. Para encontrar los nulos igualamos el diagrama a cero y despejamos la posición de los nulos (ϕ_c):

$$f(\phi) = 2(\cos(\pi \cos \phi_c) - \cos(\pi \sin \phi_c)) = 0$$

$$\cos(\pi \cos \phi_c) = \cos(\pi \sin \phi_c)$$

$$\pi \cos \phi_c = \pm \pi \sin \phi_c$$

$$\tan \phi_c = \pm 1 \rightarrow \phi_c = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$$

Los máximos del diagrama ya los hemos obtenido con anterioridad y han resultado estar en las direcciones $\pm \hat{x}$ y $\pm \hat{y}$. Por tanto ya podemos dibujar también el diagrama de la agrupación en el plano H. El dibujo se muestra en la tabla 2, junto con el diagrama del dipolo aislado y el diagrama total. De nuevo se observa que en el diagrama total se ha anulado la parte del diagrama que queda dentro de los planos conductores.

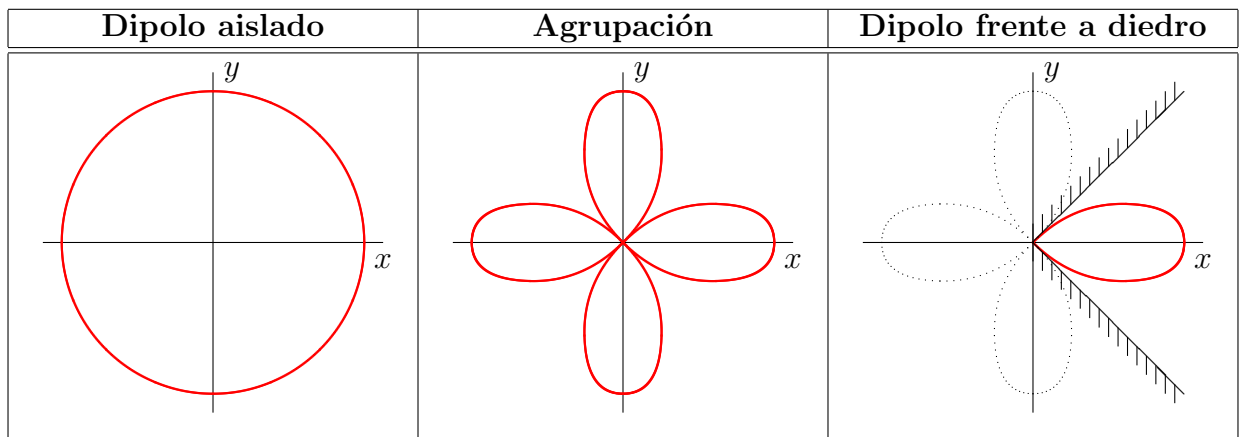


Tabla 2: Diagramas en el plano H (XY)

- b) Para cálculos de impedancia hemos de tener en cuenta la influencia mutua entre el dipolo original y los tres dipolos más que aparecen al aplicar la teoría de imágenes. Como en total hay 4 dipolos, la tensión en el primer dipolo será:

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 + z_{13} I_3 + z_{14} I_4$$

Tal y como hemos numerado los dipolos (ver figura 1):

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_1 - z_{13} I_1 - z_{14} I_1$$

Por tanto:

$$z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} + z_{12} - z_{13} - z_{14}$$

La autoimpedancia del dipolo $H = \lambda/4$ es $z_{11} = 73 + j 43 \Omega$. Y mirando en la gráfica de la impedancia mutua de dipolos $H = \lambda/4$ paralelos que se adjuntaba en el enunciado, y teniendo en cuenta que los dipolos 1 y 2 están separados $d = \lambda$, los dipolos 1 y 3 $d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, y los dipolos 1 y 4 $d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} z_{12} &= 4 + j 18 \Omega \\ z_{13} &= z_{14} = -25 + j 1 \Omega \end{aligned}$$

Por tanto:

$$z_{in} = 73 + j 43 + 4 + j 18 - 2 * (-25 - j 1) = 127 + j 59 \Omega$$

c) La directividad se puede calcular de la siguiente manera:

$$D = \frac{\frac{|\vec{E}|_{max}^2}{\eta}}{\frac{W_r}{4\pi r^2}} = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r}$$

El campo radiado máximo es el campo radiado en la dirección \hat{x} . Y ese campo será el radiado por el dipolo $H = \lambda/4$ aislado por el factor de agrupación:

$$\begin{aligned} |\vec{E}|_{max} &= |\vec{E}|(\theta = \pi/2, \phi = 0) = |\vec{E}|_{\lambda/4}(\theta = \pi/2, \phi = 0) \cdot FA(\theta = \pi/2, \phi = 0) \\ |\vec{E}|_{max} &= \frac{60 I_m}{r} 4 \end{aligned}$$

Y la potencia radiada por la antena es la radiada por el dipolo (los dipolos imagen no cuentan):

$$W_r = \Re\{z_{in}\} I^2(0) = 127 I_m^2$$

Finalmente:

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r} = \frac{|\frac{60 I_m}{r} 4|^2 4\pi r^2}{120\pi 127 I_m^2} = 15,11 = 11,8 \text{ dB}$$

d) Si en lugar de tener un único dipolo frente al diedro tenemos una agrupación de 5 dipolos, los diagramas serán los mismos de antes pero multiplicados por el factor de agrupación de una agrupación lineal uniforme a lo largo del eje z con $\alpha = 0$ y $d = \lambda/2$. Por tanto se trata de una agrupación broadside cuyo diagrama será omnidireccional en el plano perpendicular al eje de la agrupación (plano XY). De modo que el diagrama plano H será el mismo que para un único dipolo frente al diedro (ver tabla 3).

Dipolo frente a diedro	Agrupación	Total

Tabla 3: Diagramas en el plano H (XY)

En el plano E el diagrama será el obtenido en el apartado a) para un único dipolo frente al diedro multiplicado por el factor de agrupación. Como $\alpha = 0$ y $d = \lambda/2$, el margen visible es $\Psi_z \in [-\pi, \pi]$. Por otro lado en una agrupación uniforme de 5 antenas en el factor de agrupación hay 4 ceros simples entre 0 y 2π en las posiciones $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$ y $8\pi/5$ (ver figura 3). Utilizando el método gráfico se puede obtener el diagrama de radiación de la agrupación en un plano que contenga al eje z (ver figura 3).

Finalmente en la tabla 4 se muestra el diagrama de radiación en el plano E.

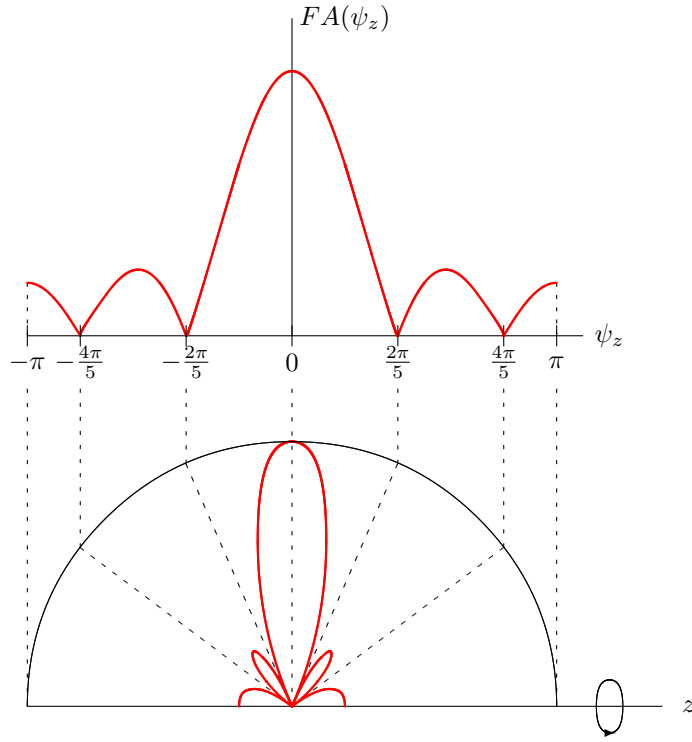


Figura 3: Determinación del diagrama de radiación de la agrupación en el eje z mediante el método gráfico

Dipolo frente a diedro	Agrupación	Total

Tabla 4: Diagramas en el plano E (XZ)

e) Para calcular la directividad seguiremos el mismo procedimiento que en el apartado c):

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r}$$

En este caso el campo radiado máximo es el mismo que en el apartado c) pero multiplicado por el factor de agrupación. Como la agrupación es uniforme broadside, en la dirección perpendicular al eje z el diagrama de la agrupación es máximo e igual al número de antenas. Por tanto:

$$|\vec{E}|_{max} = |\vec{E}|(\theta = \pi/2, \phi = 0) = |\vec{E}|_{\lambda/4}(\theta = \pi/2, \phi = 0) \cdot FA_1(\theta = \pi/2, \phi = 0) \cdot FA_2(\theta = \pi/2, \phi = 0)$$

$$|\vec{E}|_{max} = \frac{60 I_m}{r} \cdot 4 \cdot 5$$

Y la potencia radiada es la radiada por los cinco dipolos (los dipolos imagen no cuentan):

$$W_r = 5 \Re\{z_{in}\} I^2(0) = 5 \cdot 127 I_m^2$$

Finalmente:

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r} = \frac{\left| \frac{60 I_m}{r} \cdot 4 \cdot 5 \right|^2 4\pi r^2}{120\pi 5 \cdot 127 I_m^2} = 75,55 = 18,8 \text{ dB}$$