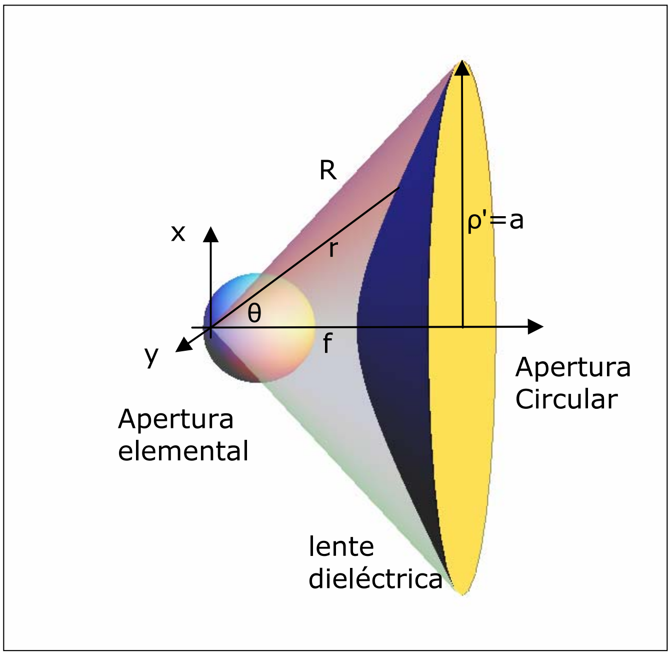
PROBLEMA 2.- Una lente alimentada en su foco por una apertura elemental se puede analizar utilizando la misma metodología que en los reflectores.
La lente se construye con un material de índice de refracción n=2. La distancia focal de la lente es de 15 cm, y la frecuencia es de 10 GHz. La distancia al borde R es de 30 cm. La ecuación de la lente es



$$r = \frac{(n-1)f}{n\cos\theta - 1}$$

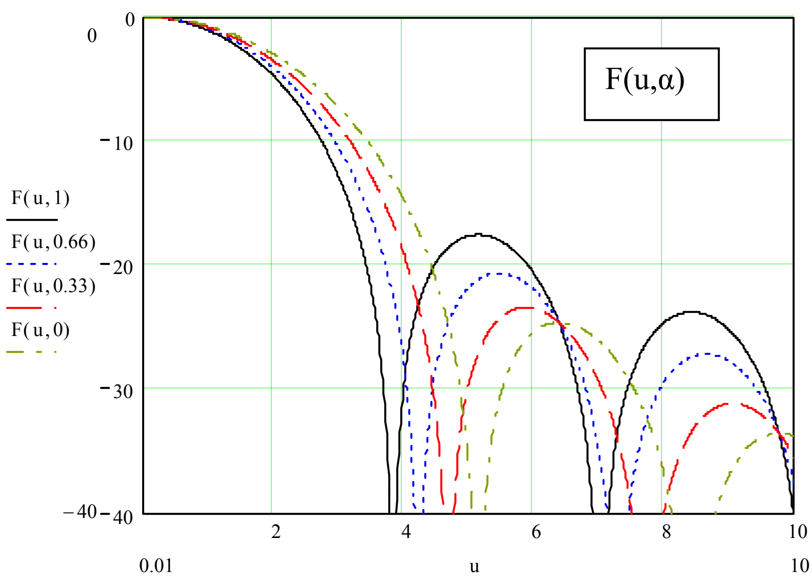
a) Calcule la atenuación de la amplitud de los campos en dB, en el borde superior de la lente con respecto al centro, debida a la diferencia de caminos recorridos por la onda esférica. (1 punto)
b) Calcule la atenuación de la amplitud de los campos en dB, en el borde superior de la lente, con respecto al centro, debida al diagrama de radiación de la apertura elemental situada en el foco (1 punto).
c) Los campos en la apertura equivalente de la lente se pueden aproximar por una función parabólica sobre pedestal. Calcule el valor del parámetro α.(1punto).

$$E(\rho') = E_0\left(1+(\alpha-1)\left(\frac{\rho'}{a}\right)^2\right) = E_0\left(1+(\alpha-1)s^2\right)x$$

d) Calcule, en función del parámetro α, la eficiencia de iluminación de la apertura. Particularice en los casos α=1 y α=0. Razone los resultados numéricos obtenidos. (3 puntos).
e) Calcule el ancho de haz entre ceros de la apertura teniendo en cuenta las dimensiones y el valor de α obtenido. Si es necesario interpole la solución a partir de las gráficas. (1 punto)
f) Obtenga una aproximación del haz principal en forma de función parabólica a partir del cruce del diagrama con el nivel de -20 dB. Compruebe si la aproximación es válida para el ancho de haz a -3 dB para α=0.33. (1punto).
g) Determine, mediante interpolaciones a los valores más cercanos, el valor de α necesario para que la antena tenga una relación de lóbulo principal a secundario de 20 dB. (2 puntos)

NOTA: $\iint E(\rho')e^{jk\hat{r}\cdot\rho'}dS' = \hat{x}\frac{\alpha+1}{2}E_0\pi a^2\left(\alpha\left(2\frac{J_1(u)}{u}\right)+(1-\alpha)\left(8\frac{J_2(u)}{u^2}\right)\right) = C\,F(u,\alpha)$ $\quad u = ka\sin\theta$

la representación de la función, normaliza al máximo en dB para valores de α=0,0.33,0.66 y 1



SOLUCIÓN

a)
f=15 cm
r=R=30 cm

La atenuación será proporcional a $\tau_c = 20\log\left(\frac{f}{R}\right) = -6dB$

b) El ángulo máximo se puede calcular a partir de la ecuación de la lente

$$r = \frac{(n-1)f}{n\cos\theta - 1}$$

$$n\cos\theta - 1 = \frac{(n-1)f}{R} = \frac{1}{2} \qquad \cos\theta = \frac{3}{4} \qquad \theta = 0.723rad = 41.41^{\circ}$$

Por lo tanto, para la apertura elemental

$$\tau_d = 10\log\left(\frac{D(\theta',\phi')}{D_0}\right) = 10\log\left(\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -1.16dB$$

c) La expresión de los campos en la apertura es

$$E(\rho') = E_0\left(1 + (\alpha - 1)\left(\frac{\rho'}{a}\right)^2\right) = E_0\left(1 + (\alpha - 1)s^2\right)x$$

el parámetro el parámetro α se puede obtener particularizando el campo en el centro de la apertura, que es Eo y en el extremo que es α Eo

$$\tau = \tau_c + \tau_d = -6 - 1.16 = -7.16dB \rightarrow \alpha = 0.439$$

d) La eficiencia de iluminación de una apertura circular es

$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi a^2} \frac{\left(\iint_{s'} E_a(x',y')\rho d\rho d\phi'\right)^2}{\iint_{s'} \left|E_a(x',y')\right|^2 \rho d\rho d\phi'}$$

El problema planteado tiene simetría de revolución

$$\eta_{il} = \frac{2\pi}{\pi a^2} \frac{\left(\int_0^a E_0 \left(1 + (\alpha - 1) \left(\frac{\rho'}{a} \right)^2 \right) \rho' d\rho' \right)^2}{\int_0^a \left| E_0 \left(1 + (\alpha - 1) \left(\frac{\rho'}{a} \right)^2 \right) \right|^2 \rho' d\rho'} = \frac{2\pi}{\pi a^2} \frac{a^4}{a^2} \frac{\left(\int_0^1 E_0 \left(1 + (\alpha - 1) s^2 \right) s ds \right)^2}{\int_0^1 \left| E_0 \left(1 + (\alpha - 1) s^2 \right) \right|^2 s ds}$$

$$\eta_{il} = 2 \frac{\left(\int_0^1 \left(1 + (\alpha - 1) s^2 \right) s ds \right)^2}{\int_0^1 \left| \left(1 + (\alpha - 1) s^2 \right) \right|^2 s ds} = 2 \frac{\left(\frac{\alpha + 1}{4} \right)^2}{\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{6}}$$

Para α=1 la distribución es uniforme, la eficiencia que se obtiene es 1.
Para α=0 la distribución es parabólica, la eficiencia es 0.75

e)

$a = R \sin\theta$
a= 20.88 cm
$u = ka \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta = 43.72 \sin\theta$
El valor de u para el cero es:

α=0.66 u_c=4.2
α=0.33 u_c=4.5

Para el valor α=0.44 se puede tomar un promedio ponderado entre los dos valores anteriores, planteando la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos

$$(u - u_1) = \frac{u_2 - u_1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha - \alpha_1)$$

La interpolación lineal da como resultado aproximado

α=0.44
u=4.4

Para este valor
$4.4 = 43.72 \sin\theta$

El ángulo es 5.77º y el ancho de haz entre ceros será el doble, 11.55º

f) Para α=0.33 el cruce a -20 dB se tiene para u=4

La aproximación parabólica se puede realizar directamente en la variable u, o bien en función del ángulo.

En el primer caso la aproximación sería una parábola que pasara por el origen de coordenadas y por el punto (4,-20)

$$t(u) = -20\left(\frac{u}{4}\right)^2 dB$$

El valor que se obtendría para -3 dB sería

$$-3dB = -20\left(\frac{u_{-3}}{4}\right)^2 dB \quad u_{-3} = 1.55$$

Que es aproximadamente el valor que se podría obtener a partir de la gráfica

Y el ancho de haz en grados sería

$$1.55 = 43.72\sin\theta$$

El ancho de haz a -3dB sería 7.09º

g) El NLPS que se puede determinar a partir de las gráficas es

α=1	NLPS=17 dB
α=0.66	NLPS=21 dB

Nuevamente se puede interpolar mediante una recta.

$$(u - n_1) = \frac{n_2 - n_1}{\alpha_2 - \alpha_1}(\alpha - \alpha_1)$$

El valor que se obtiene es
α=0.75