

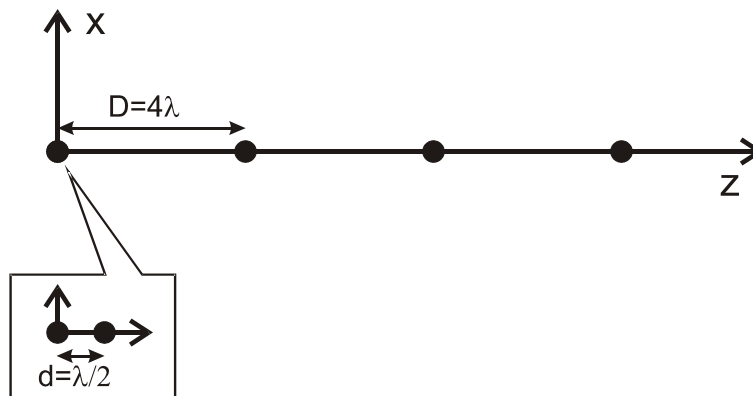
## Problema 1

Considere la agrupación de la figura formada por 4 radiadores isotropos alimentados de forma uniforme. El array es de tipo broadside y el espaciado es  $D = 4\lambda$ .

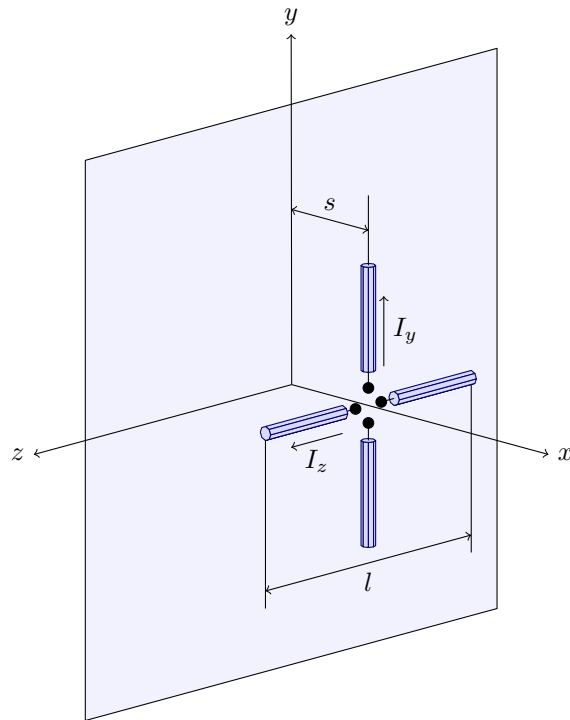
- a) Obtenga su factor de array,  $FA_1$ , y dibuje el diagrama de radiación empleando el método gráfico. (1 punto)

Considere a continuación que los elementos del array anterior son a su vez subarrays uniformes de 2 radiadores. El subarray es también de tipo broadside y el espaciado es  $d = \lambda/2$ .

- b) Obtenga el factor de array del subarray,  $FA_2$ , y dibuje su diagrama de radiación por el método gráfico. (1 punto).
- c) Obtenga el factor de array de la antena completa formada por los 8 radiadores,  $FA_{total}$  y el diagrama de radiación. (2 puntos)
- d) Calcule la directividad del array completo. No se aceptarán resultados obtenidos mediante programación o sin la debida explicación. (2 punto)
- e) Calcule la NLPS entre el lóbulo principal y el secundario más importante. No se aceptarán resultados obtenidos mediante programación o sin la debida explicación. (2 punto)
- f) Se desea ahora que el array apunte en la dirección endfire. Indique la fase  $\alpha_n$  de cada uno de los 8 radiadores. (2 puntos)



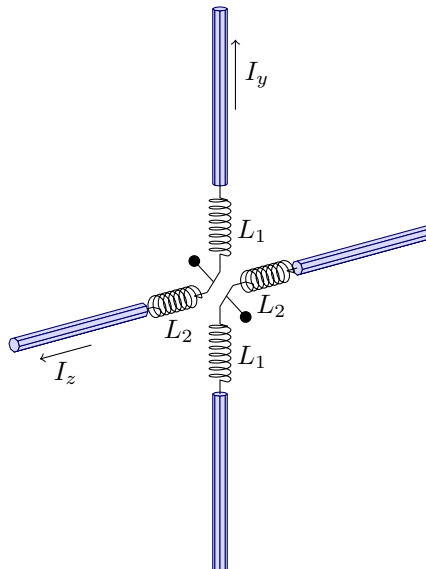
## Problema 2



Considere la antena de la figura, formada por dos dipolos elementales de longitud  $l = 0,1 \lambda$ , uno orientado según el eje  $y$  y el otro según el eje  $z$ , tal y como se muestra en la figura. Las corrientes de alimentación de los dipolos,  $I_y$  e  $I_z$ , son de igual amplitud y desfasadas  $90^\circ$  entre ellas ( $I_z = j I_y$ ).

Los dos dipolos se encuentran situados frente a un plano de masa infinito que se extiende a lo largo del plano  $YZ$ . La distancia de separación entre los dipolos y el plano de masa es  $s = \lambda/4$ .

- Obtenga una expresión para el vector de radiación en todas las direcciones del espacio. (2 puntos).
- Obtenga una expresión para el campo eléctrico radiado en todas las direcciones del espacio. (2 puntos)
- Calcule el tipo y signo de la polarización, así como la relación axial de la elipse de polarización en las direcciones  $(\theta = \pi/2, \varphi = 0)$ ,  $(\theta = \pi/4, \varphi = 0)$ , y  $(\theta = \pi/2, \varphi = \pi/4)$ . (2 puntos)
- Dibuje de forma aproximada los cortes del diagrama de radiación en los planos  $\theta = \pi/2$  y  $\varphi = 0$ . (2 puntos)
- Para conseguir que  $I_z = j I_y$ , se deben colocar en la base de los dipolos bobinas de valores  $L_1$  y  $L_2$ . Si la impedancia de entrada de cada dipolo por separado (sin bobinas) es de  $8 - j70 \Omega$ ,  $L_1 = 2,07 \text{ nH}$ , y la frecuencia de trabajo es  $3 \text{ GHz}$ , ¿cuánto debe valer  $L_2$  para que  $I_z = j I_y$ ?. (2 puntos)

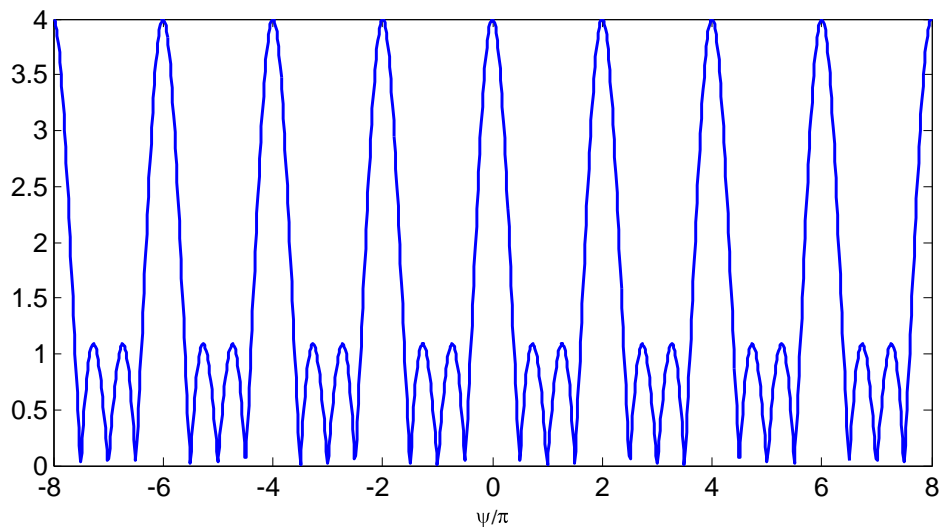


## Solución al problema 1

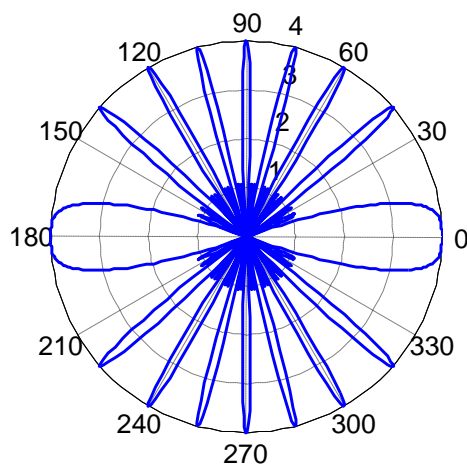
- a) En primer lugar consideramos el array de 4 elementos con distribución uniforme broadside y espaciado D

$$|FA_1 \psi_1| = \left| \frac{\text{sen}\left(4\frac{\psi_1}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi_1}{2}\right)} \right| \quad \text{siendo } \psi_1 = kD \cos \theta$$

Dado que  $D = 4\lambda$  y  $0 \leq \theta \leq \pi$ , el margen visible es  $-8\pi, 8\pi$  y el factor de array se representa como



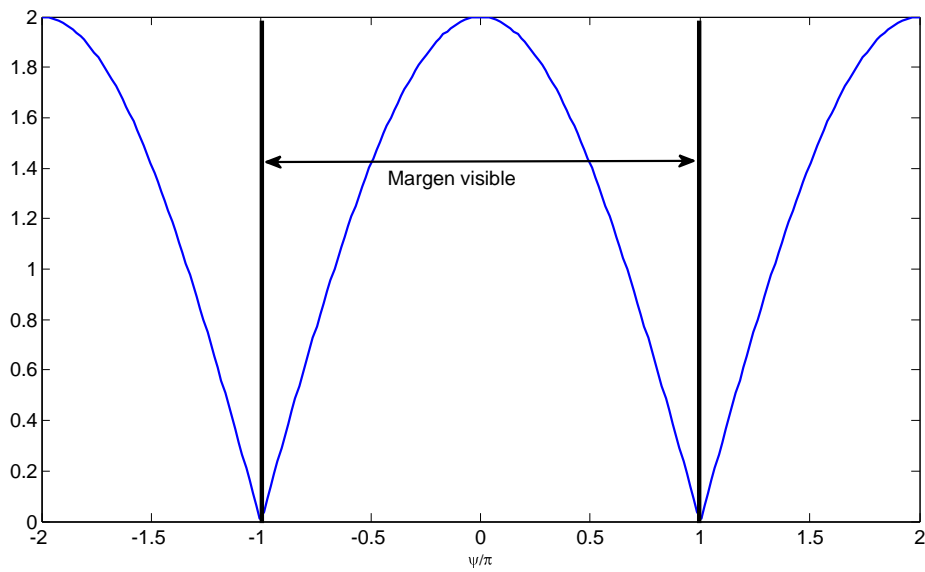
Aplicando el método gráfico se pasa a polares, resultando



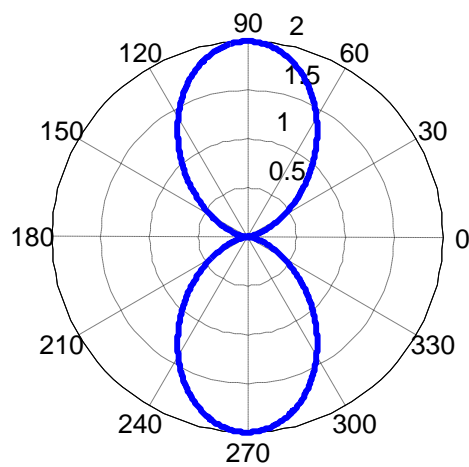
b) El subarray formado por dos elementos tiene por factor de array

$$|FA_2 \psi_2| = \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{2\psi_2}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi_2}{2}\right)} \right| \quad \psi_2 = kd \cos \theta$$

Dado que ahora  $d = \lambda/2$  y  $0 \leq \theta \leq \pi$ , el margen visible es  $-\pi, \pi$  y el factor de array se representa como

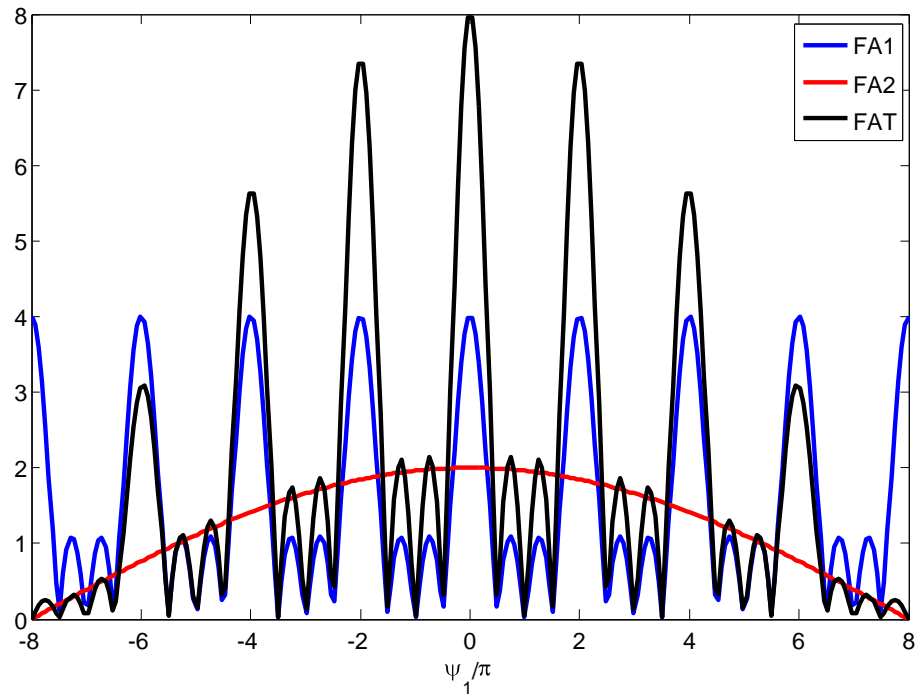


Aplicando el método gráfico pasamos a polares el margen visible quedando

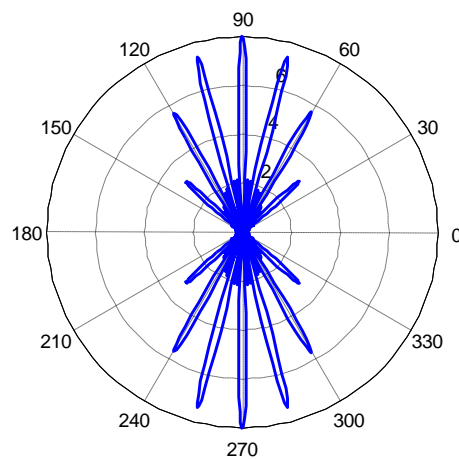


c) Cuando consideramos el array completo tenemos un array de arrays y entonces

$|FA_T(\psi_1, \psi_2)| = |FA_1(\psi_1)| |FA_2(\psi_2)|$ . En este caso, dado que  $D=8d$ , podemos escribir  $\psi_1 = 8\psi_2$  y por tanto podemos representar fácilmente el factor de array como producto de los dos factores de array en la misma variable,  $\psi_1$ :



Y en polares



- d) Para calcular la directividad, una opción es integrar el factor de array en el margen visible, sin embargo se trata de una tarea ardua y probablemente sin solución analítica. En este caso, podemos ver el array completo como si estuviera formado por  $N$  elementos separados  $\lambda/2$  en donde 8 de ellos tienen amplitud unidad y para el resto la amplitud es cero. En este caso podemos aplicar la expresión

$$D_{\max} = \frac{\left( \sum_{n=1}^N a_n \right)^2}{\sum_{n=1}^N |a_n|^2}. \text{ Válida para arrays broadside con espaciado } \lambda/2.$$

Obtenemos así que la directividad es  $D_{\max} = 8$

- e) Observando el resultado del apartado c), vemos que el lóbulo secundario más importante está situado en  $\psi_1 = 2\pi$ , de modo que

$$NLPS = 20 \log \left| \frac{FA_r \text{ } 0}{FA_r \text{ } \psi_1 = 2\pi} \right| = 20 \log \left| \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot FA_2 \left( \psi_2 = \frac{\pi}{4} \right)} \right| = 0.68 \text{ dB}$$

- f) Si queremos que el array apunte en la dirección endfire debemos hacer que  $\alpha_1 = -kD = -8\pi$ . Al mismo tiempo los elementos que forman este array deben tener un diagrama que apunte en la dirección endfire para que todas las contribuciones se sumen en fase, por tanto  $\alpha_2 = -kd = -\pi$ .

Así pues los 4 elementos del array principal deben estar alimentados con fases  $0, \alpha_1, 2\alpha_1$  y  $3\alpha_1$  respectivamente. A su vez los dos elementos que forman cada radiador del array principal deben mostrar una diferencia de fase de valor  $\alpha_2$ .

La fase de cada elemento se muestra en la siguiente tabla:

Fase 1	Fase 1	Fase 1	Fase 1	Fase 1	Fase 1	Fase 1	Fase 1
0	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$2\alpha_1$	$2\alpha_1 + \alpha_2$	$3\alpha_1$	$3\alpha_1 + \alpha_2$

## Solución al Problema 2

a) El vector de radiación, teniendo en cuenta que el efecto del plano de masa se puede modelar con otros dos dipolos imagen situados en  $x = -s$  y con corrientes de sentido opuesto, será:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= I_y l \hat{y} e^{jk_x s} + I_z l \hat{z} e^{jk_x s} - I_y l \hat{y} e^{-jk_x s} - I_z l \hat{z} e^{-jk_x s} \\ \vec{N} &= (I_y l \hat{y} + I_z l \hat{z}) (e^{jk_x s} - e^{-jk_x s})\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $I_z = j I_y$ :

$$\vec{N} = 2j I_y l \sin(k_x s) (\hat{y} + j \hat{z})$$

donde:

$$k_x s = k \sin \theta \cos \varphi s = \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \sin \theta \cos \varphi = \frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi$$

b) El campo eléctrico radiado es:

$$\vec{E} = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (N_\theta \hat{\theta} + N_\varphi \hat{\varphi})$$

donde:

$$\begin{aligned}N_\theta = \vec{N} \cdot \hat{\theta} &= 2j I_y l \sin(k_x s) (\hat{y} + j \hat{z}) \cdot (\cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) \\ &= 2j I_y l \sin(k_x s) (\cos \theta \sin \varphi - j \sin \theta) \\ N_\varphi = \vec{N} \cdot \hat{\varphi} &= 2j I_y l \sin(k_x s) (\hat{y} + j \hat{z}) \cdot (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) \\ &= 2j I_y l \sin(k_x s) \cos \varphi\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{E} = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} 2j I_y l \sin(k_x s) \left[ (\cos \theta \sin \varphi - j \sin \theta) \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi} \right]$$

Si llamamos  $E_0 = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} 2j I_y l$ , y teniendo en cuenta que  $k_x s = \frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi$ :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi\right) \left[ (\cos \theta \sin \varphi - j \sin \theta) \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi} \right]$$

c) Para averiguar la polarización en cada una de las tres direcciones en las que me la piden, particularizaremos la expresión del campo eléctrico radiado en esas tres direcciones:

- $\vec{E}(\theta = \pi/2, \varphi = 0) = E_0 \left[ -j \hat{\theta} + \hat{\varphi} \right]$

Vemos que  $\vec{E}_r = \hat{\varphi}$ ,  $\vec{E}_i = -\hat{\theta}$ , y por tanto se cumple que  $|\vec{E}_r| = |\vec{E}_i|$  y  $\vec{E}_r \cdot \vec{E}_i = 0$ , luego la polarización es circular, y la relación axial es 1. Por otro lado  $(\vec{E}_i \times \vec{E}_r) \cdot \hat{r} = (-\hat{\theta} \times \hat{\varphi}) \cdot \hat{r} = -1 < 0$ , luego la polarización es levógira o a izquierdas.

- $\vec{E}(\theta = \pi/4, \varphi = 0) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) \left[ -j \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta} + \hat{\varphi} \right]$

Vemos que  $\vec{E}_r = \hat{\varphi}$ ,  $\vec{E}_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta}$ , y por tanto se cumple que  $|\vec{E}_r| \neq |\vec{E}_i|$  y  $\vec{E}_r \cdot \vec{E}_i = 0$ , luego la polarización es elíptica. Para calcular la relación axial hay que saber las longitudes de los semiejes de la elipse de polarización. Puesto que  $\vec{E}_r \cdot \vec{E}_i = 0$ , los semiejes son  $\vec{E}_r$  y  $\vec{E}_i$ , de manera que la relación axial es  $RA = |\vec{E}_r|/|\vec{E}_i| = \sqrt{2}$ . Por otro lado  $(\vec{E}_i \times \vec{E}_r) \cdot \hat{r} = (-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta} \times \hat{\varphi}) \cdot \hat{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ , luego la polarización es levógira o a izquierdas.

- $\vec{E}(\theta = \pi/2, \varphi = \pi/4) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) \left[ -j \hat{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\varphi} \right]$

Vemos que  $\vec{E}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\varphi}$ ,  $\vec{E}_i = -\hat{\theta}$ , y por tanto se cumple que  $|\vec{E}_r| \neq |\vec{E}_i|$  y  $\vec{E}_r \cdot \vec{E}_i = 0$ , luego la polarización es elíptica. Para calcular la relación axial hay que saber las longitudes de los semiejes de la elipse de polarización. Puesto que  $\vec{E}_r \cdot \vec{E}_i = 0$ , los semiejes son  $\vec{E}_r$  y  $\vec{E}_i$ , de manera que la relación axial es  $RA = |\vec{E}_i|/|\vec{E}_r| = \sqrt{2}$ . Por otro lado  $(\vec{E}_i \times \vec{E}_r) \cdot \hat{r} = (-\hat{\theta} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\varphi}) \cdot \hat{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ , luego la polarización es levógira o a izquierdas.

d) Para dibujar los cortes del diagrama en los dos planos que piden primero particularizaremos el campo eléctrico radiado en esos planos.

- Plano XY ( $\theta = \pi/2$ ). En este plano el campo es

$$\vec{E}(\theta = \pi/2) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right) \left[-j \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi}\right]$$

Y el diagrama de radiación será:

$$d(\varphi) = \frac{|\vec{E}(\theta = \pi/2)|}{|\vec{E}(\theta = \pi/2)|_{\max}} = \frac{|E_0| \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right)\right| \cdot \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{|E_0| \cdot \sqrt{2}} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right)\right| \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2}}$$

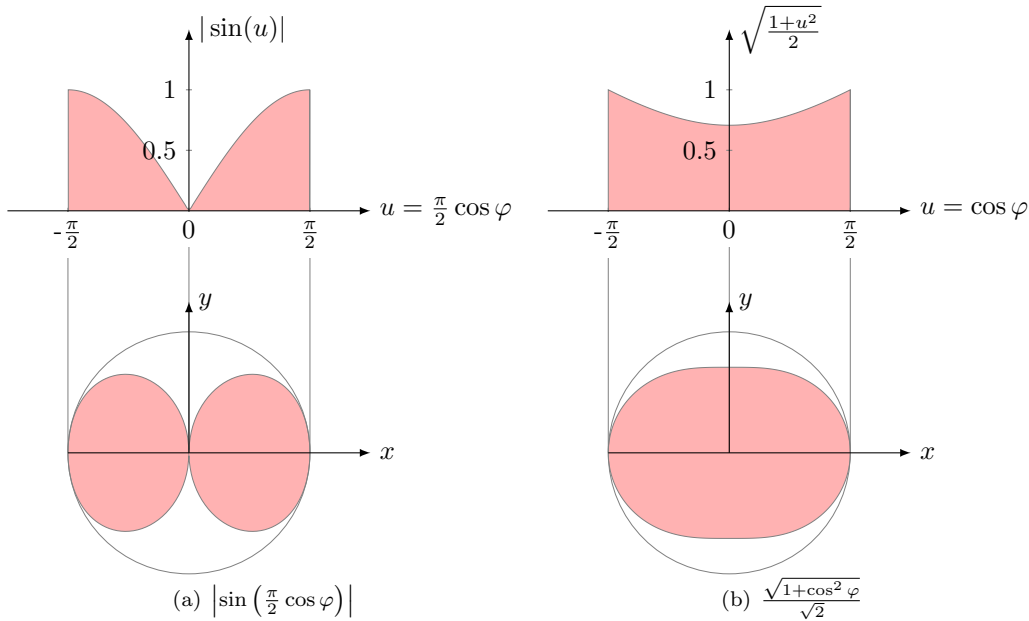


Figura 1: Diagramas  $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right)\right|$  y  $\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2}}$

Utilizando el método gráfico se pueden obtener los diagramas  $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right)\right|$  y  $\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2}}$ , tal y como se muestra en la figura 1.

El diagrama total en el plano  $\theta = \pi/2$  será el producto de ambos diagramas, que se representa en la figura 2.

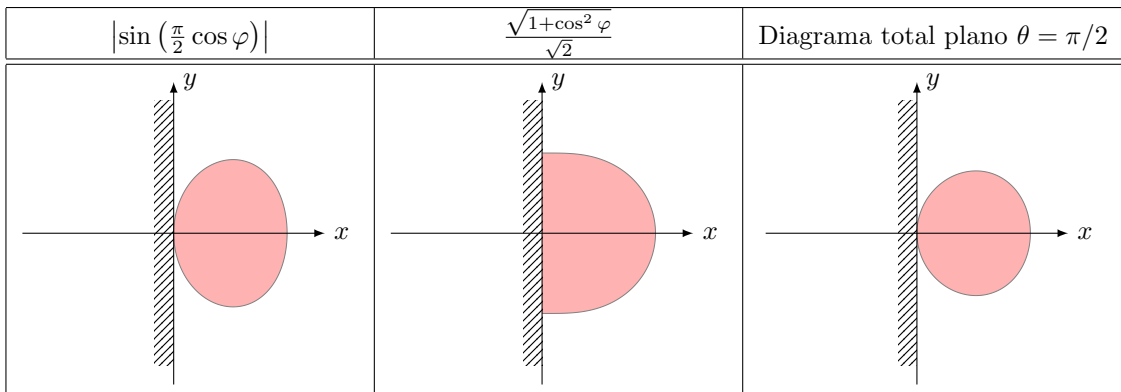


Figura 2: Corte del diagrama en el plano XY ( $\theta = \pi/2$ )

- Plano XZ ( $\varphi = 0$ ). En este plano el campo es

$$\vec{E}(\varphi = 0) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right) \left[-j \sin \theta \hat{\theta} + \hat{\varphi}\right]$$

Y el diagrama de radiación será:

$$d(\theta) = \frac{|\vec{E}(\varphi = 0)|}{|\vec{E}(\varphi = 0)|_{\max}} = \frac{|E_0| \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right) \right| \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \theta}}{|E_0| \cdot \sqrt{2}} = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right) \right| \cdot \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}}{\sqrt{2}}$$

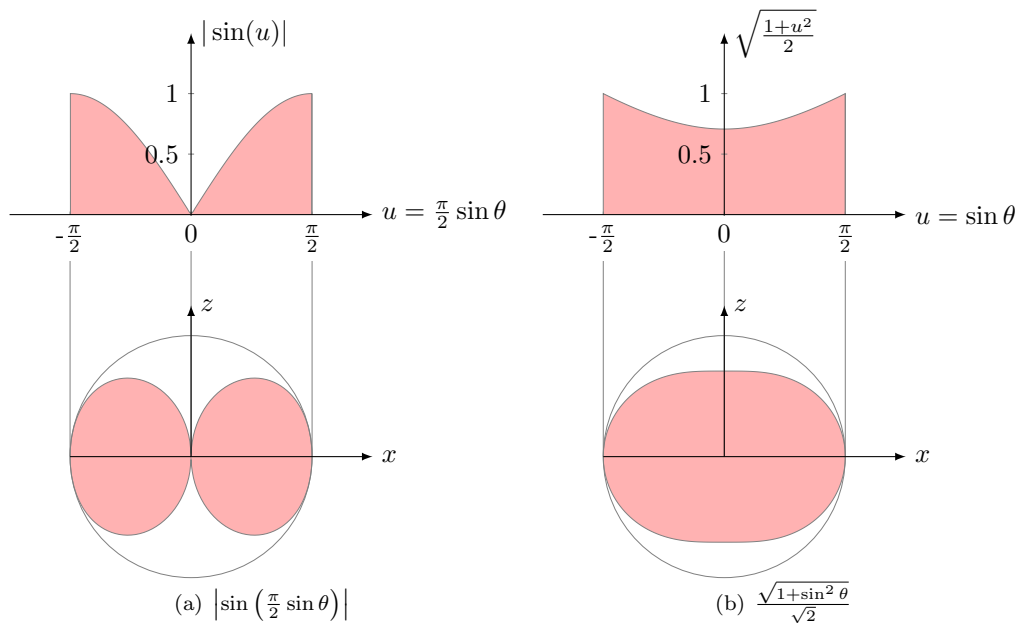


Figura 3: Diagramas  $\left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right) \right|$  y  $\frac{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}}{\sqrt{2}}$

Utilizando el método gráfico se pueden obtener los diagramas  $\left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right) \right|$  y  $\frac{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}}{\sqrt{2}}$ , tal y como se muestra en la figura 3.

El diagrama total en el plano  $\varphi = 0$  será el producto de ambos diagramas, que se representa en la figura 4.

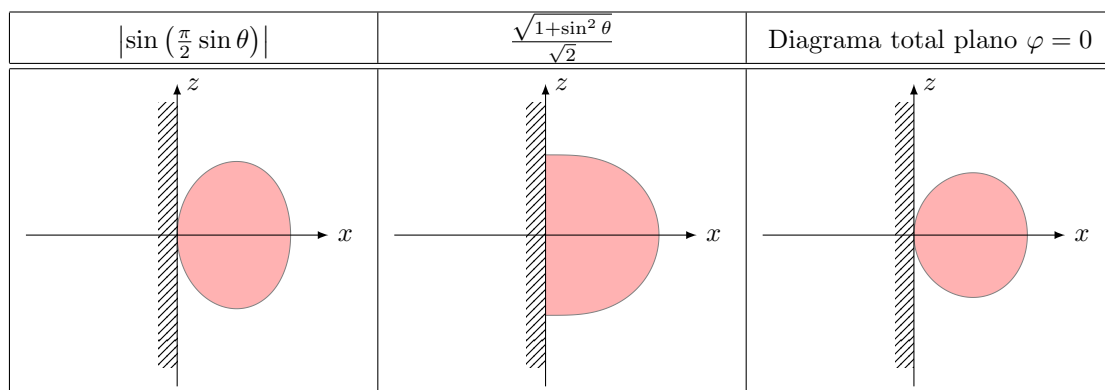
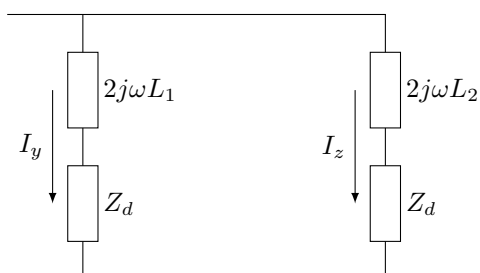


Figura 4: Corte del diagrama en el plano XZ ( $\varphi = 0$ )

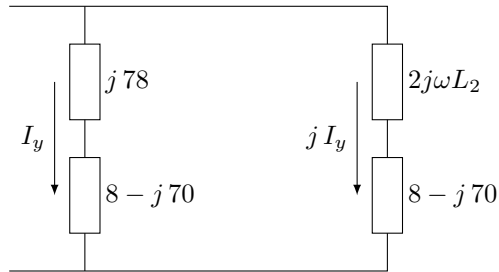
e) Desde el punto de vista de las impedancias, los dos dipolos cruzados tienen el siguiente circuito equivalente:



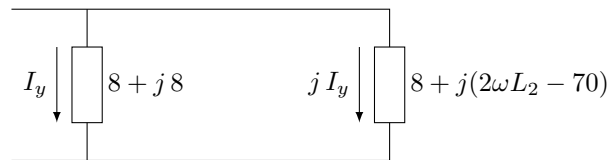
Como  $L_1 = 2,07$  nH:

$$2j\omega L_2 = 2j2\pi 3 \cdot 10^9 \cdot 2,07 \cdot 10^{-9} = j 78 \Omega$$

Y queremos conseguir que  $I_z = jI_y$ , y además sabemos que la impedancia de entrada del dipolo aislado es  $8 - j 70 \Omega$ . Por tanto el circuito equivalente queda de la siguiente manera:



Agrupando las impedancias:



Como en las dos ramas del circuito la diferencia de potencial ha de ser la misma:

$$I_y (8 + j 8) = j I_y (8 + j(2\omega L_2 - 70))$$

$$8 + j 8 = j 8 - 2\omega L_2 + 70$$

$$2\omega L_2 = 62$$

$$L_2 = \frac{62}{2 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9} = 1,64 \text{ nH}$$