

Problema 1

Considere un array uniforme ENDFIRE con $N=5$ elementos y espaciado $d = \lambda/4$.

- Obtenga el factor de array, $FA(\Psi)$, y represéntelo gráficamente indicando el margen visible. Dibuje el diagrama de radiación resultante e indique el valor del ancho de haz entre ceros, $\Delta\theta_c$. Calcule la directividad. (3 puntos)
- Obtenga el polinomio del array, $P(z)$, y represente sus ceros en la circunferencia unidad. (1 punto)
- Se desea modificar el diagrama de radiación anterior, de modo que el ancho de haz entre ceros del array pase a ser $\Delta\theta_c = 180^\circ$. Indique cuál es la nueva posición de los ceros del polinomio $P(z)$ y la nueva distribución de corriente. Los ceros han de estar siempre formando pares conjugados. (2 puntos)
- Ahora se desea que el array presente una relación delante-atrás (RDA) de 23 dB, manteniendo el ancho de haz obtenido anteriormente. Indique la nueva posición de los ceros y la distribución de corriente resultante. (2 puntos)
- Si el array sintetizado en el apartado anterior está formado por dipolos cortos paralelos entre sí, obtenga sus diagramas plano E y H. Utilice para ello el método gráfico. (2 puntos)

Problema 2

Un reflector parabólico de 1 m de diámetro se alimenta en el foco por una apertura circular uniforme de radio $0,5\lambda$ que trabaja a una frecuencia de 3 GHz. El campo radiado por dicha apertura se muestra en la Figura 1.

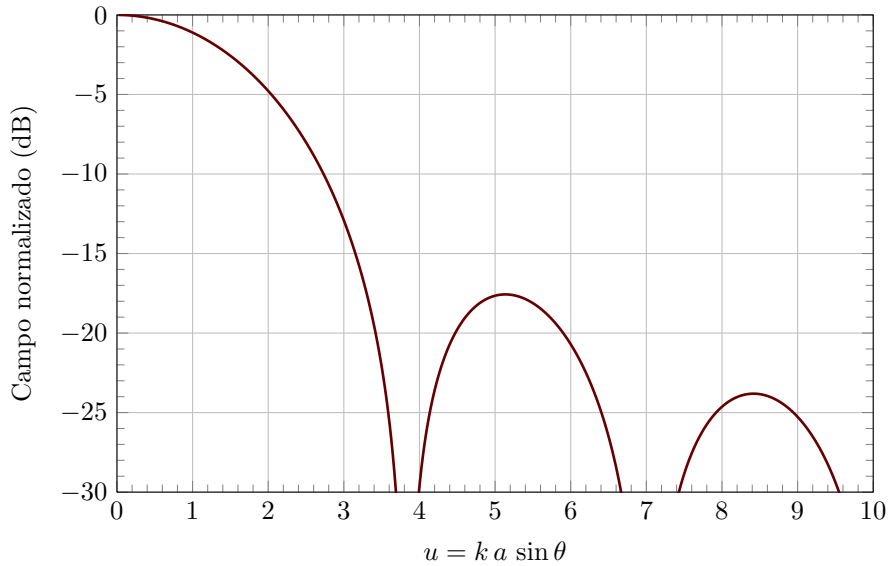


Figura 1: Diagrama de campo normalizado para una apertura circular uniforme

El diagrama de radiación de potencia de la apertura circular se puede aproximar cerca del máximo por un diagrama de la forma $t(\theta) = \cos^n(\theta/2)$. Calcule:

- El valor del exponente n para conseguir que el diagrama de potencia $t(\theta) = \cos^n(\theta/2)$ tenga el mismo ancho de haz a menos 3 dB que el diagrama de la apertura circular (2 puntos).
- El valor de la relación f/D del reflector para conseguir un decaimiento en bordes de -10 dB. Utilice la expresión aproximada del diagrama de la apertura y el valor del exponente n obtenido en el apartado anterior, (2 puntos).
- La directividad máxima del diagrama $t(\theta) = \cos^n(\theta/2)$ (2 puntos).
- Las eficiencias de iluminación y desbordamiento del reflector parabólico utilizando la expresión aproximada para el diagrama de la apertura (2 puntos).
- La directividad máxima del reflector, en decibelios (2 puntos).

Datos:

$$\eta_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\beta D_f(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\eta_t = \cot^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \left(\int_0^\beta \sqrt{D_f(\theta)} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \, d\theta \right)^2$$

PROBLEMA 1

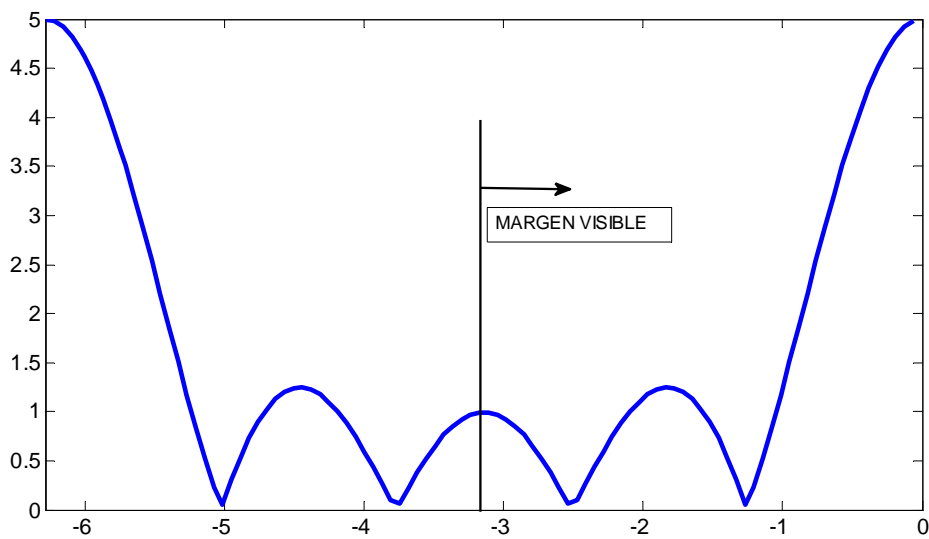
a) al tratarse de una distribución uniforme endfire, la expresión del factor de array es

$$FA = \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right|, \text{ con } \psi = kd \cos \theta + \alpha \text{ y, siendo } \alpha = -kd$$

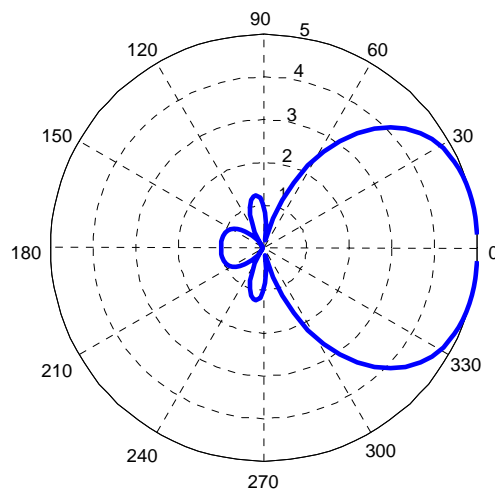
Las expresiones anteriores asumen que el array está situado en el eje z.

La representación del factor de array, se muestra en la figura indicando el margen visible:

$$M.V. \in [-2kd, 0] = [-\pi, 0]$$



Mediante el método gráfico obtenemos el diagrama de radiación:



El ancho de haz entre ceros se calcula fácilmente sabiendo que el primer cero del factor de array se encuentra en $\psi_c = -\frac{2\pi}{5}$, que corresponde a una dirección angular

$\psi_c = kd(\cos\theta_c - 1)$, despejando, $\theta_c = 78.5^\circ$ y el ancho de haz entre ceros resulta $\Delta\theta_c = 157^\circ$

Como es sabido, para un array uniforme endfire con espaciado $\lambda/4$ la directividad es $D=N=5$.

b) El polinomio de la agrupación es $P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ y los ceros son

$$z_c = 1 \Big|_k \frac{2\pi}{5}, \quad k = 1, \dots, 4$$

c) Si ahora queremos imponer que el ancho de haz entre ceros sea de 180° , el primer nulo del diagrama debe estar en $\theta_c = 90^\circ$, lo que corresponde a un valor para $\psi_c = -kd = -\frac{\pi}{2}$.

El nuevo polinomio de la agrupación es ahora

$$P(z) = \left(z - e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \left(z - e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) \left(z - e^{j\frac{4\pi}{5}}\right) \left(z - e^{-j\frac{4\pi}{5}}\right) = (z^2 + 1) \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)z + 1\right)$$

Y desarrollando tenemos

$$P(z) = 1 + az + 2z^2 + az^3 + z^4, \text{ siendo } a = -2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

d) Ahora, modificamos los ceros restantes para conseguir una relación delante-atrás, RDA, de -23 dB.

Esta relación se define como $RDA = 20 \log \left| \frac{FA(0)}{FA(-2kd)} \right|$. También se puede obtener a partir

del polinomio de la agrupación: $RDA = 20 \log \left| \frac{P(z=1)}{P(z=-1)} \right|$

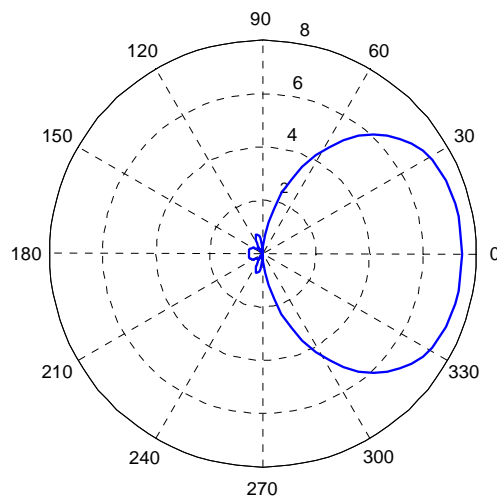
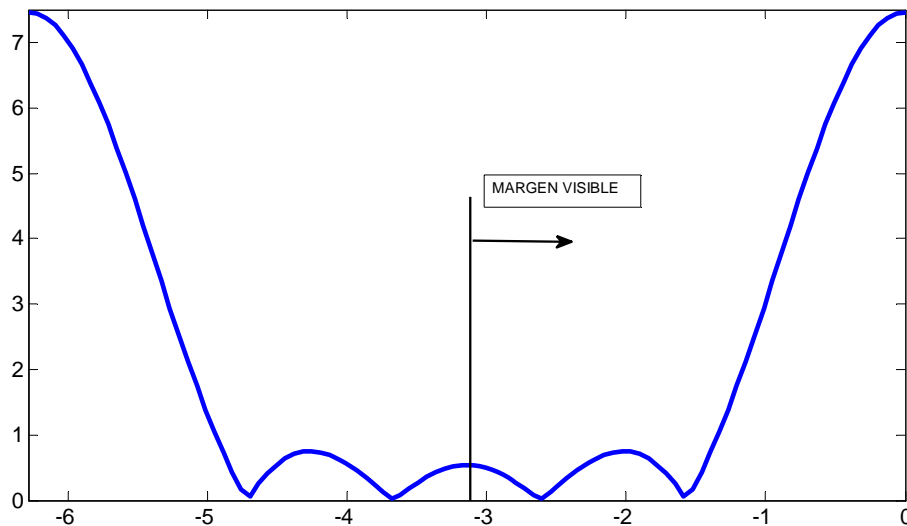
Si pasamos la RDA a escala lineal y particularizamos $P(z)$ en $z=1$ y $z=-1$, dejando como incógnita la posición angular del segundo cero y su conjugado, ψ_{c2}

$$14.12 = \frac{1 - \cos\psi_{c2}}{1 + \cos\psi_{c2}}. \text{ Despejando } \psi_{c2} \text{ tenemos } \psi_{c2} = \frac{5\pi}{6}$$

Y el polinomio del array ahora es

$$P(z) = (z^2 + 1) \left(z^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) z + 1 \right) = 1 + bz + 2z^2 + bz^3 + z^4, \text{ siendo } b = -2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

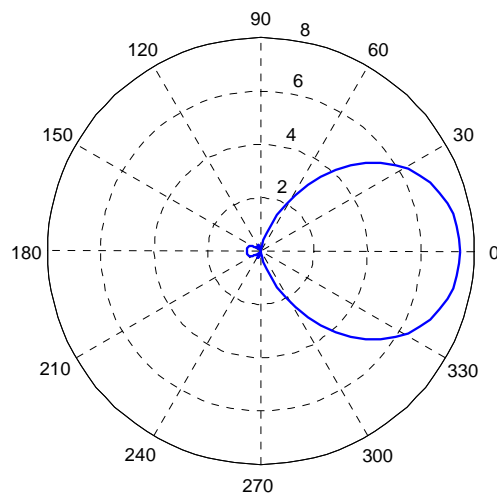
e) Con la nueva posición de los ceros podemos fácilmente dibujar el factor de array y a partir de él obtener el diagrama de radiación por el método gráfico:



El array endfire tiene su máximo en la dirección del eje del array (eje z). En esa dirección la polarización es paralela a los dipolos. Supongamos que los dipolos se orientan paralelos al eje x. El plano E es aquel que contiene al eje del array y a los propios dipolos del array, en este caso el plano XZ. Por su parte el plano H es un plano perpendicular al plano E que además contenga al máximo del array. Dicho plano es por tanto el YZ.

En el plano H el diagrama de la antena es idéntico al del array de elementos isótropos ya que el diagrama del dipolo es omnidireccional en ese plano. Sin embargo, en el plano E, el diagrama del array se multiplica por el diagrama del dipolo corto. Teniendo en cuenta que el dipolo está orientado en x, el diagrama en el plano XZ es $d(\theta) = \cos \theta$ (Recuerde que el vector de radiación de un dipolo orientado en x proporciona las componentes esféricas $N_\theta = N_x \cos \theta \cos \phi$, $N_\phi = -N_x \sin \phi$, y que en el plano XZ $\phi = 0^\circ$).

Multiplicando el factor de array por el diagrama del dipolo corto obtenemos un diagrama ligeramente más directivo en el plano E que en el H.



Solución al Problema 2

a) Leyendo de la gráfica del enunciado vemos que el campo cae 3 dB cuando $u \simeq 1,6$. Por lo tanto la posición angular en la que el diagrama cae 3 dB es (sabiendo que $a = 0,5\lambda$) es:

$$u_{-3} = 1,6 = k a \sin \theta_{-3} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \sin \theta_{-3} = \pi \sin \theta_{-3}$$

$$\theta_{-3} = \arcsin \left(\frac{1,6}{\pi} \right) = 30,6^\circ$$

Tenemos que conseguir que el diagrama aproximado $t(\theta) = \cos^n (\theta/2)$ caiga también -3 dB en la misma posición angular. Por tanto:

$$t(\theta_{-3}) = \cos^n (\theta_{-3}/2) = \frac{1}{2}$$

Despejando:

$$n = \frac{\log(1/2)}{\log(\cos(\theta_{-3}/2))} = \frac{\log(1/2)}{\log(\cos(15,3^\circ))} = 19,21$$

b) El decaimiento en bordes para un reflector parabólico es:

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{D_f(\beta)}{D_f(0)} \right)$$

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 10 \log_{10} (t_f(\beta))$$

$$\tau(\beta) = 40 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + 10 \log_{10} \left(\cos^n \left(\frac{\beta}{2} \right) \right)$$

$$\tau(\beta) = (40 + 10n) \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right)$$

Queremos que el decaimiento sea de -10 dB. Por tanto:

$$\tau(\beta) = 232,1 \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) = -10 \rightarrow \beta = 50,2^\circ$$

Y la relación f/D :

$$f/D = \frac{1}{4 \tan(\beta/2)} = 0,53$$

c) La directividad máxima de la antena en el foco del reflector será:

$$D_f = \frac{4\pi}{\Omega_{\text{eq}}}$$

donde:

$$\Omega_{\text{eq}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t(\theta, \varphi) d\Omega$$

siendo $t(\theta, \varphi)$ el diagrama de radiación de potencia, que en este caso es $t(\theta) = \cos^n(\theta/2)$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{eq}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^n(\theta/2) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \cos^n(\theta/2) \sin\theta \, d\theta \\ \Omega_{\text{eq}} &= 2\pi \int_0^\pi \cos^n(\theta/2) 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \, d\theta = 4\pi \int_0^\pi \cos^{n+1}(\theta/2) \sin(\theta/2) \, d\theta \\ \Omega_{\text{eq}} &= -8\pi \int_0^\pi \cos^{n+1}(\theta/2) \left(-\sin(\theta/2) \frac{1}{2} \right) \, d\theta = -8\pi \frac{\cos^{n+2}(\theta/2)}{n+2} \Big|_0^\pi \\ \Omega_{\text{eq}} &= -\frac{8\pi}{n+2} \{ \cos^{n+2}(\pi/2) - \cos^{n+2}(0) \} = \frac{8\pi}{n+2}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$D_f = \frac{4\pi}{\Omega_{\text{eq}}} = \frac{4\pi}{\frac{8\pi}{n+2}} = \frac{n+2}{2} = 10,6 = 10,25 \text{ dB}$$

d) Calcularemos la eficiencia total y la de desbordamiento, y a partir de éstas obtendremos la de iluminación:

$$\begin{aligned}\eta_s &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\beta D_f t_f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ \eta_s &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\beta D_f \cos^n(\theta/2) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi}{4\pi} D_f \int_0^\beta \cos^n(\theta/2) \sin\theta \, d\theta \\ \eta_s &= \frac{D_f}{2} \int_0^\beta \cos^n(\theta/2) \sin\theta \, d\theta\end{aligned}$$

Esta integral ya se ha resuelto en el apartado anterior. Utilizando ese resultado y poniendo los límites de integración adecuados:

$$\begin{aligned}\eta_s &= \frac{D_f}{2} (-4) \frac{\cos^{n+2}(\theta/2)}{n+2} \Big|_0^\beta \\ \eta_s &= \frac{2D_f}{n+2} \{ \cos^{n+2}(0) - \cos^{n+2}(\beta/2) \} \\ \eta_s &= \{ 1 - \cos^{21,21}(50,2^\circ/2) \} = 0,878\end{aligned}$$

Ahora calcularemos la eficiencia total:

$$\begin{aligned}\eta_t &= \cot^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\int_0^\beta \sqrt{D_f(\theta)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \, d\theta \right)^2 \\ \eta_t &= \cot^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\int_0^\beta \sqrt{D_f \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \, d\theta \right)^2 \\ \eta_t &= \cot^2\left(\frac{\beta}{2}\right) D_f \left(\int_0^\beta \cos^{n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \, d\theta \right)^2 \\ \eta_t &= \cot^2\left(\frac{\beta}{2}\right) D_f \left(\int_0^\beta \cos^{n/2-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \, d\theta \right)^2 \\ \eta_t &= \cot^2\left(\frac{\beta}{2}\right) D_f \left(-2 \frac{\cos^{n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{n/2} \Big|_0^\beta \right)^2\end{aligned}$$

$$\eta_t = 4 \cot^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{D_f}{n^2/4} \left(1 - \cos^{n/2} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right)^2 = 0,79$$

Finalmente la eficiencia de iluminación será:

$$\eta_t = \eta_{il} \eta_s \rightarrow \eta_{il} = \frac{\eta_t}{\eta_s} = \frac{0,79}{0,878} = 0,9$$

e) La directividad del reflector será:

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi a^2 \eta_t = \frac{4\pi}{(0,1)^2} \pi (0,5)^2 0,79 = 779,7 = 28,9 \text{ dB}$$