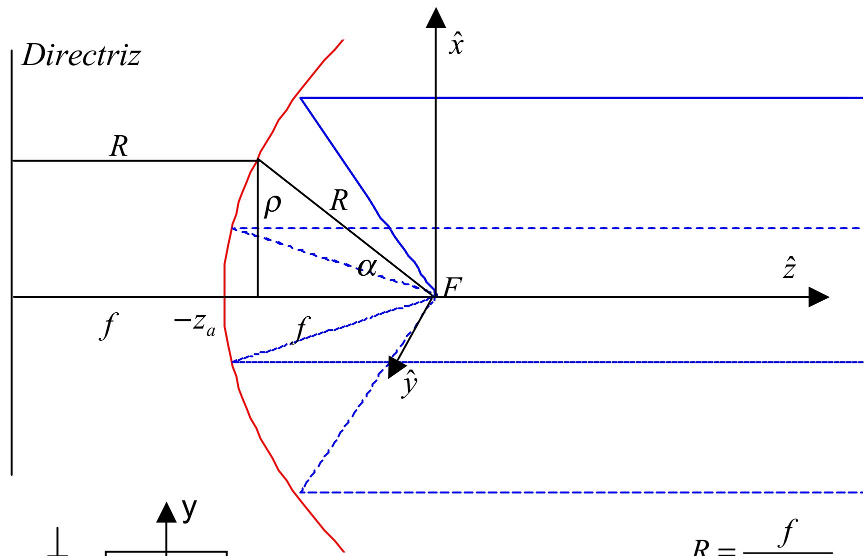
Problema 2

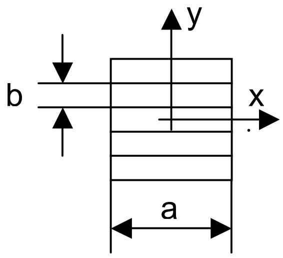
Un reflector parabólico con simetría de revolución tiene una distancia focal f=30λ y diámetro D=40λ se alimenta en su foco con una agrupación de 5 guías de onda que propagan el modo fundamental TE10.

Las dimensiones de las guías son a=2.5λ,b=0.5λ. Los coeficientes del polinomio de la agrupación se han obtenido muestreando una función coseno.

$$p(z)=1+2.618z+3.236z^2+2.618z^3+z^4=(1+z)^2\left(1+0.618z+z^2\right)$$

a) Obtenga el factor de la agrupación de las 5 guías de onda. Represente gráficamente dicho factor de array.
b) Obtenga una expresión para el factor de la agrupación. Calcule el ancho de haz entre ceros del diagrama de radiación de una agrupación de elementos isotrópicos.
c) Obtenga una expresión para los campos radiados por la agrupación de 5 guías en todo el espacio (sin reflector).
d) Calcule el ancho de haz entre ceros de la agrupación de guías en el plano E y en el plano H. ¿Qué relación existe entre ambos anchos de haz?
e) ¿Qué distribución de campos se tendrá en la apertura equivalente del reflector a lo largo del eje y (calcular en y=0,D/4,D/2)





$$R=\frac{f}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$(z+z_a)=f\tan^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\rho=2f\tan\frac{\alpha}{2}$$

Solución

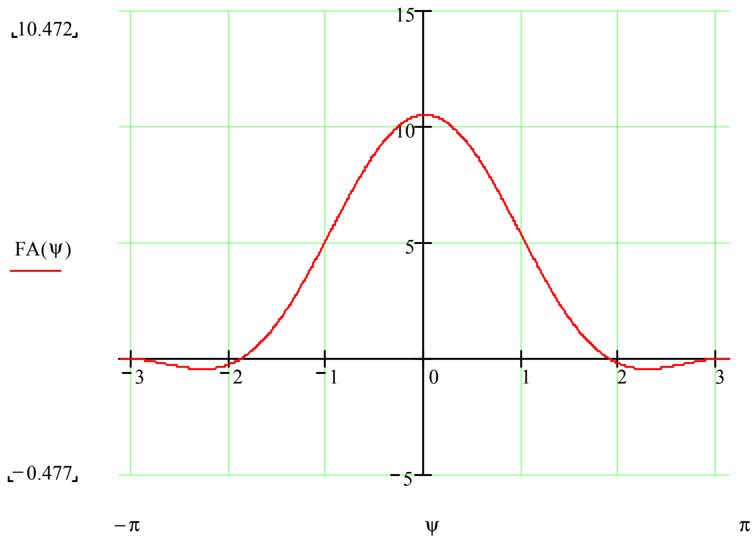
Ceros del polinomio

El polinomio tendrá un cero doble en z=-1 y dos ceros complejos conjugados, que se pueden obtener a partir de las raíces del polinomio de grado 2.

$$p(z)=(1+z)^2(1+0.618z+z^2)=(1+z)^2\left(z-e^{-j\frac{3\pi}{5}}\right)\left(z-e^{j\frac{3\pi}{5}}\right)$$

Representación gráfica del factor de la agrupación

El Factor de la agrupación se puede representar gráficamente a partir de los ceros del polinomio.



Factor de array

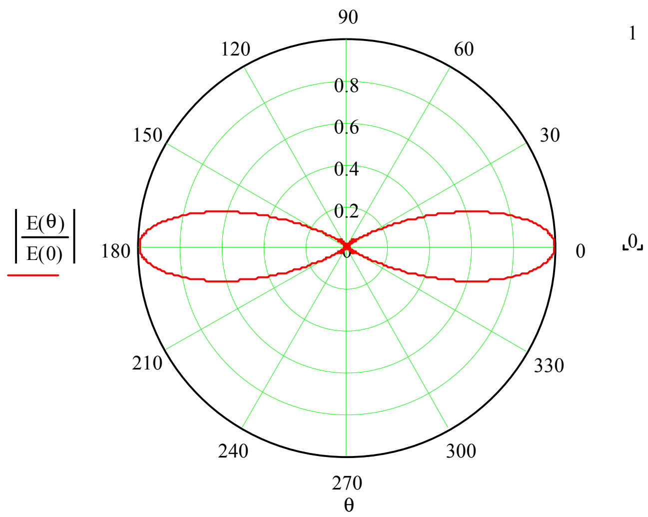
Para la agrupación de guías es necesario incluir el efecto del factor de array,

$$FA(\psi_y)=3.236+2\cdot 2.618\cos(\psi_y)+2\cos(2\psi_y)$$
$$\psi_y=k_y\frac{\lambda}{2}=\pi\sin\theta\sin\phi$$

El primer cero del array se tiene para $\psi=\dfrac{3\pi}{5}$

Diagrama de radiación de la agrupación de 5 antenas.

Los ceros corresponden a un ángulo en el espacio real, en el plano YZ $\theta = 36.9^{\circ}$. El ancho de haz es el doble 73.8º.



Campos radiados por una guía

Una guía equivale a una apertura con polarización vertical y distribución coseno en el eje x y uniforme en el y

$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_0}$$

$$Z_0 = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

Los campos radiados por una apertura con polarización circular son

$$E_\theta = j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\sin\phi\left(\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta + 1\right)\iint_{s'} E(x',y')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}dx'dy'$$

$$E_\phi = j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\cos\phi\left(\frac{\eta}{Z_0} + \cos\theta\right)\iint_{s'} E(x',y')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}dx'dy'$$

La transformada de fourier bidimensional se puede calcular como el producto de dos transformadas unidimensionales. En el eje y hay que incluir el factor de array.

$$\iint_{s'} E(x',y')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}dx'dy' = E_0\int_{x'} f(x')e^{jk_x x'}dx'\int_{y'} g(y')e^{jk_y y'}dy'$$

$$F(k_x,a) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x')e^{jk_x x'}dx' = \frac{\pi}{2}a\frac{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2}$$

$$G(k_y,b) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g(y')e^{jk_y y'}dy' = b\frac{\sin\left(\frac{k_y b}{2}\right)}{\left(\frac{k_y b}{2}\right)}FA\left(k_y\frac{\lambda}{2}\right)$$

Anchos de haz

En el plano E el ancho de haz entre ceros será el calculado para el diagrama del array, dado que la transformada de la función uniforme no tiene ningún cero en el margen visible dado que el argumento nunca llega a valer π .

$$\frac{\sin\left(\frac{k_y b}{2}\right)}{\left(\frac{k_y b}{2}\right)}$$

$$\frac{k_y b}{2} = \frac{2\pi}{\lambda 2}\frac{\lambda}{2}\sin\theta\sin\phi = \frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi$$

En el plano H el primer cero de la transformada se tiene para

$$\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) = 0 \quad \frac{k_x a}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\cos\phi\frac{5\lambda}{2} = 3\pi$$

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 36.9^{\circ}$$

Ambos anchos de haz entre ceros son idénticos, dado que las distribuciones son similares.

Distribución de campos en el reflector

El ángulo con el que se ve el reflector desde la antena es β

$$\frac{D}{2} = 2f\tan\frac{\beta}{2}$$

$$\beta = 2\arctan\left(\frac{D}{4f}\right) = 2\arctan\left(\frac{40}{120}\right) = 36.9^{o}$$

Coincide con el ancho de haz en el plano E y en el plano H. En dicho ángulo el campo será cero.

En el punto intermedio del reflector

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{D}{8f}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{6}\right) = 18.9^{o}$$

La caída debida a la propagación y al diagrama será, para dicho ángulo, sustituyendo en la expresión del Factor de Array

$$\tau_c = 40\log\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right) = -0.24dB$$

$$\tau_d = 20\log\left(\frac{FA(\psi = \pi\sin\alpha)}{FA(\psi = 0)}\right) = -6.26dB$$