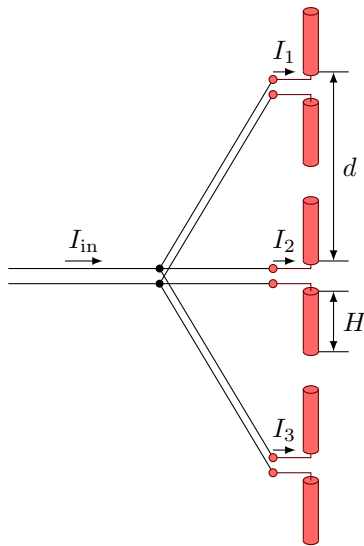


## Problema 1

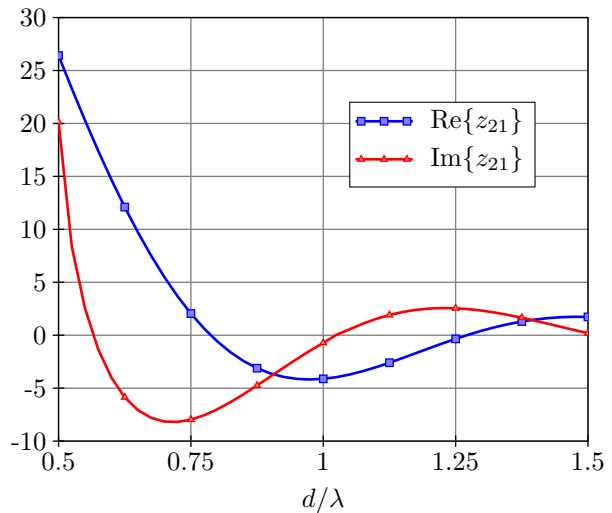
Una agrupación está formada por tres dipolos de brazo  $H = \lambda/4$  colineales alimentados en paralelo, tal y como se muestra en la figura. La distancia de separación entre los dipolos es  $d = 0,75 \lambda$ . La impedancia de entrada de cada dipolo aislado es de  $75 + j43 \Omega$ .

Suponga de momento que los dipolos están desacoplados y que la corriente a la entrada de todos ellos es la misma ( $I_1 = I_2 = I_3$ ).

- Calcule el campo radiado por la antena. (2 puntos)
- Represente los cortes en plano E y en plano H del diagrama de radiación de la antena. (2 puntos)
- Calcule la directividad de la antena. (2 puntos)



Impedancia mutua entre dipolos colineales  $H = \lambda/4$



Considere ahora el acoplo entre los dipolos, valiéndose de la gráfica de la impedancia mutua de dos dipolos colineales con  $H = \lambda/4$ .

- Calcule el cociente  $I_2/I_1$  e  $I_3/I_1$ . (2 puntos)
- Obtenga una expresión para el nuevo factor de agrupación y comente brevemente cómo cree que se modificará el diagrama de radiación con respecto al caso en que no había acoplo entre los dipolos. (2 puntos)

## Problema 2

Considere un diagrama de campo de tipo omnidireccional en un plano y sectorial en cualquier plano ortogonal al omnidireccional. Tal diagrama se expresa como

$$d(\theta) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_c}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_c}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- Obtenga la expresión de la directividad en función de  $\Delta\theta_c$ . Aproxime la expresión obtenida por otra más sencilla válida para  $\Delta\theta_c$  pequeños (2 puntos)
- Se desea sintetizar un diagrama sectorial parecido al anterior y para ello se utiliza un hilo de corriente de longitud  $L$ . La distribución de corriente por el hilo es de la forma  $I(z) = 1 + e^{j\frac{2\pi}{L}z} + e^{-j\frac{2\pi}{L}z}$ . Obtenga las transformadas  $F(u)$  de cada uno de los tres términos de la distribución de corriente por separado. Representélos gráficamente en función de  $u$ . NOTA: No tome módulo al hacer dicha representación. (2 puntos)
- Obtenga la transformada suma de las tres anteriores. Representéla gráficamente de forma aproximada en función de  $u$ . No tome módulo. Obtenga una expresión para el  $\Delta\theta_c$  del diagrama sintetizado en función de  $L$ . (2 puntos)
- Obtenga el ancho de haz  $\Delta\theta_c$  cuando  $L = 20\lambda$ . Dibuje el diagrama de radiación. Determine la directividad aproximadamente. (2 puntos)
- Calcule la longitud efectiva máxima de la distribución de corriente asumiendo que el punto de alimentación del hilo está en el centro del hilo,  $z = 0$ . (2 puntos)

## Solución al Problema 1

- a) El campo radiado por la antena será el producto del campo radiado por un dipolo de brazo  $H = \lambda/4$  por el factor de agrupación de una agrupación uniforme broadside:

$$\vec{E} = \vec{E}_{H=\lambda/4} \cdot FA$$

Tomaremos como referencia la corriente de la antena central ( $I_2$ ), supondremos que los dipolos están alineados con el eje  $z$ , y que la antena central está en el origen de coordenadas. De esta forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{H=\lambda/4} &= j60 \frac{I_2}{r} e^{-jkr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta} \\ FA(\Psi_z) &= \frac{\sin\left(\frac{3\Psi_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_z}{2}\right)} \\ \Psi_z &= k_z d = \frac{2\pi}{\lambda} 0,75\lambda \cos\theta = 1,5\pi \cos\theta \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{E} = j60 \frac{I_2}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \frac{\sin\left(\frac{9\pi}{4} \cos\theta\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} \cos\theta\right)} e^{-jkr} \hat{\theta}$$

- b) Suponiendo que los dipolos están alineados en el eje  $z$ , tanto el diagrama del dipolo como el de la agrupación son omnidireccionales en el plano  $XY$ , y el campo eléctrico en ese plano está polarizado según  $\hat{z}$ . Por tanto el plano  $E$  es cualquier plano en el que  $\varphi$  sea constante (por ejemplo el plano  $XZ$  o el  $YZ$ ), y el plano  $H$  es el plano  $XY$ .

Primero obtendremos el diagrama de la agrupación, sabiendo que se trata de una agrupación uniforme de  $N = 3$  elementos con  $\alpha = 0$  y  $d = 0,75\lambda$ . Es decir, que  $\Psi_z = 1,5\pi \cos\theta$ . En la figura 1 se muestra la obtención de dicho diagrama mediante el método gráfico.

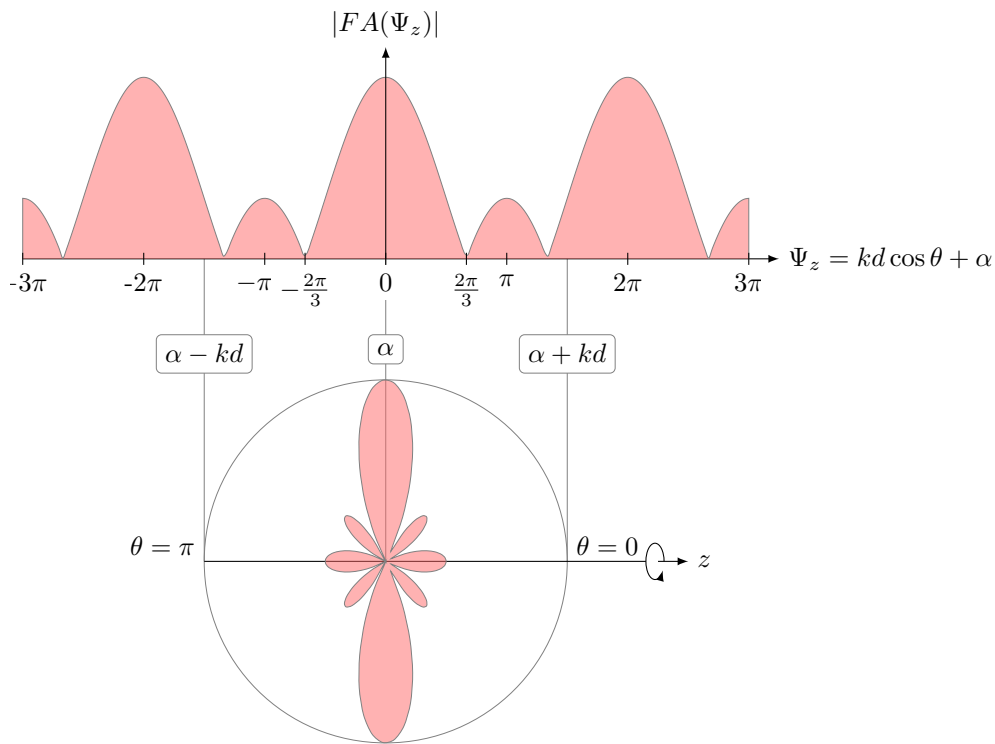


Figura 1: Obtención del diagrama de la agrupación mediante el método gráfico

El diagrama total será el producto de los diagramas del dipolo y el de la agrupación, como se muestra en la figura 1.

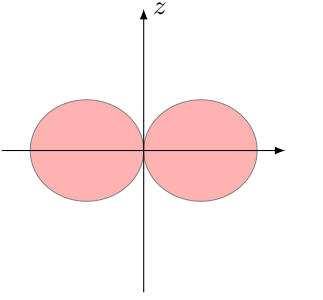
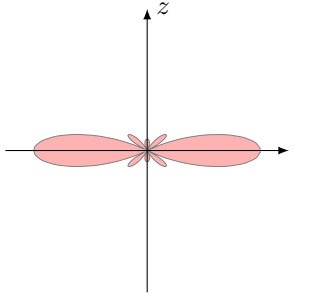
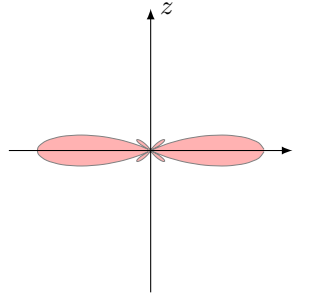
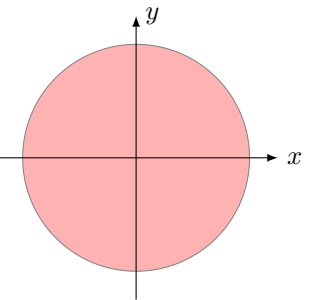
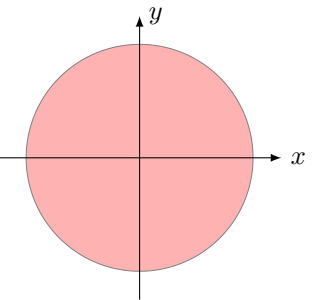
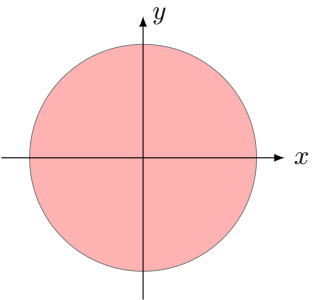
	Dipolo $H = \lambda/4$	Agrupación	Producto
Plano E			
Plano H			

Tabla 1: Cortes plano E y plano H del diagrama de la antena

c)

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2}{\eta} \frac{4\pi r^2}{W_r}$$

$$|\vec{E}|_{max} = |\vec{E}|_{\lambda/4, max} \cdot |FA|_{max} = 60 \frac{|I_2|}{r} 3$$

$$W_r = \sum_{n=0}^2 \text{Re}\{Z_{in}\} |I_{in}|^2 = 3 \cdot 73 \cdot |I_2|^2$$

$$D = \frac{60^2 |I_2|^2 3^2}{r^2} \frac{1}{120\pi} \frac{4\pi r^2}{3 \cdot 73 |I_2|^2} = 4,9 = 6,9 \text{ dB}$$

d) La relación entre tensiones y corrientes en los tres dipolos la proporcionan los parámetros de impedancias, de tal forma que podemos escribir:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3$$

$$V_3 = Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3$$

Como los tres dipolos están en alimentados en paralelo, las tensiones de alimentación son iguales ( $V_1 = V_2 = V_3$ ). Por otro lado los tres dipolos son idénticos y por tanto su autoimpedancia es la misma ( $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33}$ ). Además la influencia mútua entre el primer y el segundo dipolo es la misma que entre el segundo y el tercero, ya que están separados la misma distancia ( $Z_{12} = Z_{23}$ ). Finalmente, sabemos por el teorema de reciprocidad que  $Z_{21} = Z_{12}$  y  $Z_{31} = Z_{13}$ . Con todos estos datos podemos reescribir el sistema de ecuaciones anterior de la siguiente forma:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 \quad (1)$$

$$V_1 = Z_{12} I_1 + Z_{11} I_2 + Z_{12} I_3 = Z_{12} (I_1 + I_3) + Z_{11} I_2 \quad (2)$$

$$V_1 = Z_{13} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{11} I_3 \quad (3)$$

Igualando los dos valores de  $V_1$  de las ecuaciones (1) y (3) obtenemos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 = Z_{13} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{11} I_3 \\
Z_{11} I_1 + Z_{13} I_3 &= Z_{13} I_1 + Z_{11} I_3 \\
(Z_{11} - Z_{13}) I_1 &= (Z_{11} - Z_{13}) I_3 \\
I_3 &= I_1 \rightarrow \frac{I_3}{I_1} = 1
\end{aligned}$$

Igualando ahora los dos valores de  $V_1$  en las ecuaciones (1) y (2) y sustituyendo  $I_3 = I_1$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
V_1 &= (Z_{11} + Z_{13}) I_1 + Z_{12} I_2 = 2 Z_{12} I_1 + Z_{11} I_2 \\
(Z_{12} - Z_{11}) I_2 &= (2 Z_{12} - Z_{11} - Z_{13}) I_1 \\
\frac{I_2}{I_1} &= \frac{2 Z_{12} - Z_{11} - Z_{13}}{Z_{12} - Z_{11}}
\end{aligned}$$

Mirando en la gráfica de las impedancias mutuas de dipolos colineales de  $H = \lambda/4$  para separaciones de  $d/\lambda = 0,75$  y  $d/\lambda = 1,5$  podemos determinar el valor de  $Z_{12}$  y  $Z_{13}$  respectivamente:

$$\begin{aligned}
Z_{12} &= 2 - j8 \Omega \\
Z_{13} &= 2 \Omega
\end{aligned}$$

Por otro lado sabemos que  $Z_{11} = 73 + j43 \Omega$ . Con todo ello:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2 Z_{12} - Z_{11} - Z_{13}}{Z_{12} - Z_{11}} = \frac{71 + j59}{71 + j51} = 1,06 e^{j0,07}$$

e) Antes el factor de agrupación era:

$$FA(\Psi_z) = \frac{\sin\left(\frac{3\Psi_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_z}{2}\right)}$$

O también:

$$FA(\Psi_z) = e^{-j\Psi_z} + 1 + e^{j\Psi_z} = 1 + 2 \cos(\Psi_z)$$

dado que todas las corrientes eran iguales. Ahora el nuevo factor de agrupación será (recordemos que hemos tomado  $I_2$  como corriente de referencia):

$$\begin{aligned}
FA(\Psi_z) &= \frac{I_1}{I_2} e^{-j\Psi_z} + \frac{I_2}{I_2} + \frac{I_3}{I_2} e^{j\Psi_z} \\
FA(\Psi_z) &= \frac{1}{1,06 e^{j0,07}} e^{-j\Psi_z} + 1 + \frac{1}{1,06 e^{j0,07}} e^{j\Psi_z} \\
FA(\Psi_z) &= 0,94 e^{-j0,07} e^{-j\Psi_z} + 1 + 0,94 e^{-j0,07} e^{j\Psi_z} \\
FA(\Psi_z) &= 0,94 e^{-j0,07} + 2 \cos(\Psi_z)
\end{aligned}$$

donde  $\Psi_z = 1,5\pi \cos \theta$ .

El efecto del acoplo sobre el diagrama de radiación será muy débil ya que la nueva distribución es casi idéntica a la anterior. No obstante se aprecia que la distribución ya no es totalmente uniforme (lo cuál ensanchará ligeramente el lóbulo principal y disminuirá ligeramente el NLPS), y por otro lado aparece un ligero error de fase no lineal que al igual que en el caso de las bocinas producirá relleno de nulos, ensanchamiento del lóbulo principal y disminución del NLPS, pero todo en un grado muy ligero.

Solución al problema 2

a) La directividad de un diagrama dado se puede calcular mediante

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} t(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} . \text{ En el caso particular que se plantea la expresión queda como}$$

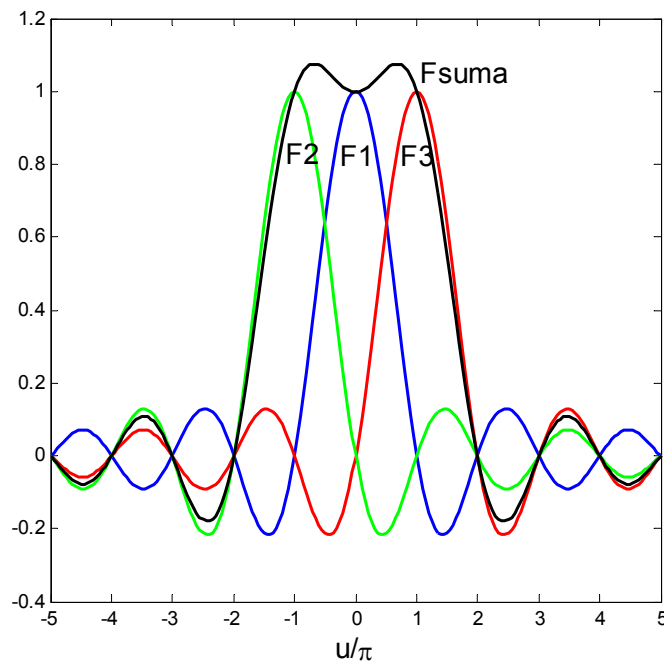
$$D_{\max} = \frac{4\pi}{2\pi \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_c}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_c}{2}} \sin \theta d\theta} = \frac{1}{\sin \frac{\Delta\theta_c}{2}} \approx \frac{2}{\Delta\theta_c}$$

b) Las transformadas de cada uno de los términos que componen la corriente son

para  $I_1(z) = 1$ ,  $F_1(u) = L \frac{\text{sen } u}{u}$ , siendo  $u = k_z \frac{L}{2}$

para  $I_2(z) = e^{j\frac{2\pi}{L}z}$ ,  $F_2(u) = L \frac{\text{sen}(u+u')}{u+u'}$ , siendo  $u' = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{2} = \pi$

para  $I_3(z) = e^{-j\frac{2\pi}{L}z}$ ,  $F_3(u) = L \frac{\text{sen}(u-u')}{u-u'}$



c) La figura anterior muestra la transformada suma de las tres calculadas en el apartado anterior. Como se puede ver, el lóbulo principal está entre  $-2\pi$  y  $2\pi$ .

Para obtener una expresión del ancho de haz entre ceros observamos que

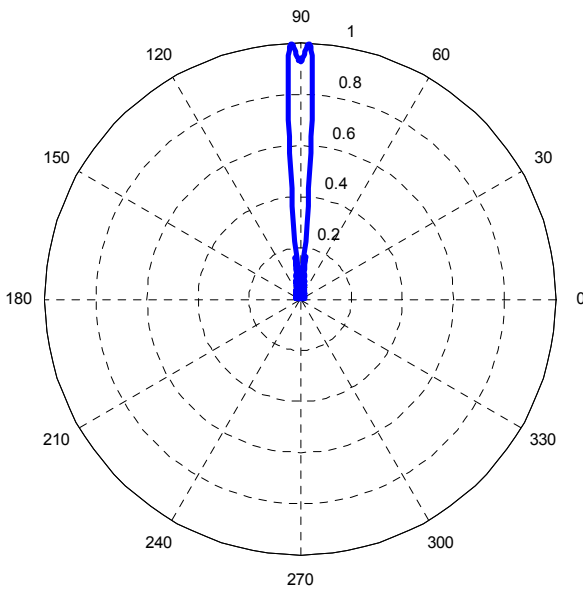
$u = 2\pi = k \frac{L}{2} \cos \theta_c$ . Despejando  $\theta_c$ ,  $\theta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2\lambda}{L} \right)$ . El ancho de haz entre ceros es

$$\Delta\theta_c = 2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_c \right)$$

d) El diagrama de radiación es  $F_{suma}(u(\theta)) \cdot \sin \theta$ . Sin embargo, despreciaremos el término  $\sin \theta$  por tratarse de un diagrama muy directivo. La contribución de la transformada se obtiene a partir de  $F_{suma}(u)$  usando el método gráfico. El margen visible, MV, es:

$$\left[ -k \frac{L}{2}, k \frac{L}{2} \right] = [-20\pi, 20\pi]$$

La gráfica muestra el diagrama polar normalizado.



Con la expresión obtenida en el apartado anterior obtenemos el ancho de haz entre ceros  $\Delta\theta_c = 11.5^\circ$ .

La directividad se puede obtener de forma aproximada a partir de la expresión deducida en a):

$$D_{\max} = \frac{2}{\Delta\theta_c} = 10 \quad (10 \text{ dB})$$

e) La longitud efectiva máxima se calcula de forma sencilla mediante

$$l_{ef \text{ máx}} = \frac{1}{I(0)} \int_{-L/2}^{L/2} I(z) dz = \frac{1}{3} \int_{-L/2}^{L/2} 1 + 2 \cos \left( \frac{2\pi}{L} z \right) dz = \frac{L}{3}$$