

Problema 1

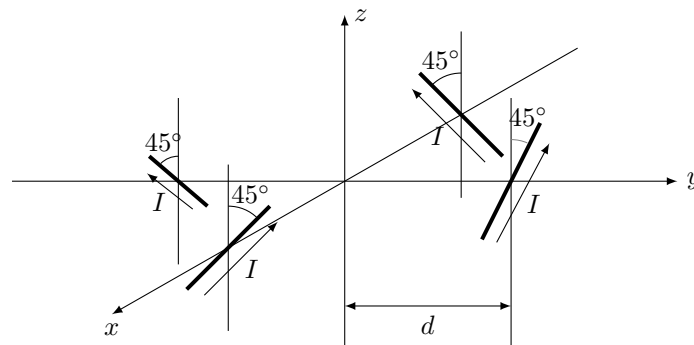


Figura 1: Antena Lindenblad sencilla

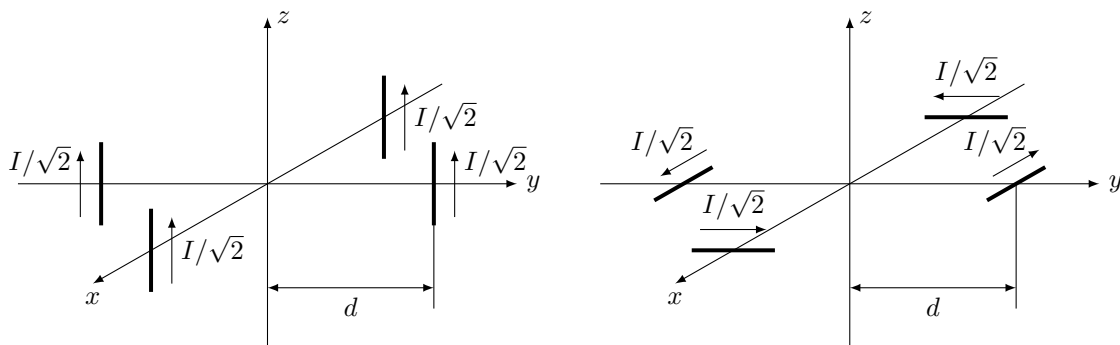


Figura 2: Descomposición en dos subproblemas más sencillos

La Figura 1 muestra una antena Lindenblad sencilla formada por cuatro dipolos elementales. Los cuatro dipolos son de longitud $l \ll \lambda$ y por ellos circula una corriente I . Todos los dipolos están a una distancia d del origen de coordenadas. Dos de ellos están situados sobre el eje x y orientados de manera que forman un ángulo de 90° entre sí. Y los otros dos están situados sobre el eje y y también forman un ángulo de 90° entre sí. La principal propiedad de la antena Lindenblad es la de proporcionar un diagrama de radiación prácticamente omnidireccional con polarización circular en el plano XY .

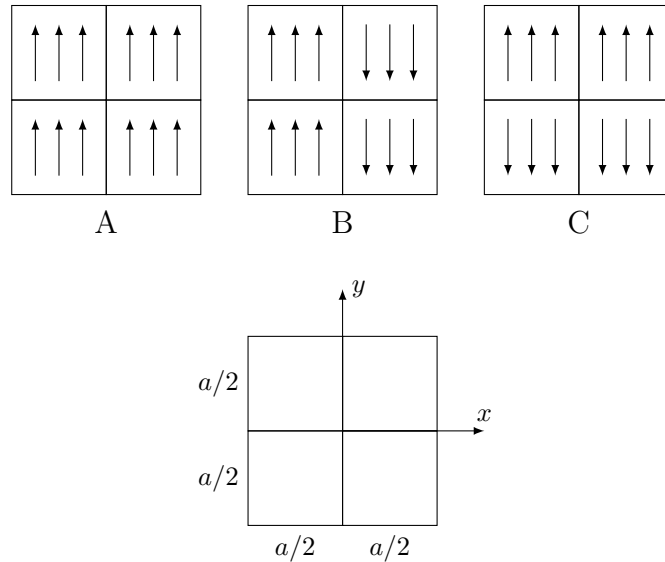
Para analizar esta antena se propone descomponerla en dos subproblemas más sencillos y luego aplicar superposición. Estos subproblemas se muestran en la Figura 2. En uno hay cuatro dipolos orientados según z de longitud $l \ll \lambda$ y corriente $I/\sqrt{2}$, y en el otro hay cuatro dipolos situados en el plano XY de longitud $l \ll \lambda$ y corriente $I/\sqrt{2}$.

Para la antena Lindenblad de la Figura 1, obtenga:

- El vector de radiación en función de d (3 puntos).
- El campo radiado en los ejes x , y y z en función de d (3 puntos).
- Valor mínimo de d ($d > 0$) para que la polarización en los ejes x e y sea circular (2 puntos).
- Tipo, signo y relación axial de la polarización del campo radiado en la dirección ($\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/4$) (utilice el valor de d obtenido en el apartado anterior) (2 puntos).

Problema 2

Una apertura rectangular está formada por cuatro subaperturas uniformes, alimentadas como se indica en la figura. La polarización en la apertura es vertical. La antena A es equivalente a una apertura uniforme de dimensiones $a \times a$, y las antenas B y C son equivalentes a un array de dos aperturas de dimensiones $a/2 \times a$ y $a \times a/2$ respectivamente, espaciadas $a/2$.



Sabiendo que $a = 4\lambda$,

- Obtener el diagrama de radiación de la antena A en el plano E. Representarlo gráficamente, indicando la posición del primer cero y el nivel del primer lóbulo secundario (3 puntos).
- Obtener el diagrama de radiación de la antena B en el plano XZ. Representarlo gráficamente. Calcular la posición de todos los nulos de radiación en el semiespacio $z > 0$ (2,5 puntos).
- Calcular la posición del máximo de la antena C en el plano YZ (2,5 puntos).
- Cuál es la relación en dB entre los máximos de los casos A y B? (2 puntos)

Solución al Problema 1

- a) Aplicando superposición, el vector de radiación será la suma del vector de radiación de los dipolos orientados según \hat{z} (\vec{N}_1) más el vector de radiación de los dipolos contenidos en el plano XY (\vec{N}_2):

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$$

El vector de radiación de los dipolos orientados según \hat{x} es:

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 &= \frac{I}{\sqrt{2}} l \hat{z} [e^{jk_x d} + e^{-jk_x d} + e^{jk_y d} + e^{-jk_y d}] \\ \vec{N}_1 &= \frac{I}{\sqrt{2}} l \hat{z} [2 \cos(k_x d) + 2 \cos(k_y d)] = \sqrt{2} I l \hat{z} [\cos(k_x d) + \cos(k_y d)]\end{aligned}$$

Y los situados en el plano XY :

$$\begin{aligned}\vec{N}_2 &= \frac{I}{\sqrt{2}} l \hat{y} [e^{jk_x d} - e^{-jk_x d}] + \frac{I}{\sqrt{2}} l \hat{x} [-e^{jk_y d} + e^{-jk_y d}] \\ \vec{N}_2 &= \sqrt{2} j I l \hat{y} \sin(k_x d) - \sqrt{2} j I l \hat{x} \sin(k_y d)\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \sqrt{2} I l (\hat{z} [\cos(k_x d) + \cos(k_y d)] + j \hat{y} \sin(k_x d) - j \hat{x} \sin(k_y d))$$

- b) El campo radiado es:

$$\vec{E} = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}_\perp$$

donde \vec{N}_\perp son las componentes del vector de radiación perpendiculares a la dirección de propagación.

En el eje x :

$$\begin{aligned}\vec{N}_\perp &= N_y \hat{y} + N_z \hat{z} \\ k_x &= k \\ k_y &= 0 \\ k_z &= 0 \\ r &= x\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\vec{E}(\text{eje } x) = -j\omega\mu \frac{e^{-jkx}}{4\pi x} \sqrt{2} I l (\hat{z} [\cos(kd) + 1] + j \hat{y} \sin(kd))$$

En el eje y :

$$\begin{aligned}\vec{N}_\perp &= N_x \hat{x} + N_z \hat{z} \\ k_x &= 0 \\ k_y &= k \\ k_z &= 0 \\ r &= y\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\vec{E}(\text{eje } y) = -j\omega\mu \frac{e^{-jky}}{4\pi y} \sqrt{2} I l (\hat{z} [1 + \cos(kd)] - j \hat{x} \sin(kd))$$

Y en el eje z :

$$\begin{aligned}\vec{N}_\perp &= N_x \hat{x} + N_y \hat{y} \\ k_x &= 0 \\ k_y &= 0 \\ k_z &= k \\ r &= z\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\vec{E}(\text{eje } z) = -j\omega\mu \frac{e^{-jkz}}{4\pi z} \sqrt{2} I l (j \hat{y} \sin(0) - j \hat{x} \sin(0)) = 0$$

c) En el eje x la parte real e imaginaria de la amplitud del campo son:

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= [1 + \cos(kd)] \hat{z} \\ \vec{E}_i &= \sin(kd) \hat{y}\end{aligned}$$

Y en el eje y :

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= [1 + \cos(kd)] \hat{z} \\ \vec{E}_i &= -\sin(kd) \hat{x}\end{aligned}$$

Tanto en el eje x como en el eje y se cumple que \vec{E}_r y \vec{E}_i son perpendiculares. Para que la polarización sea circular deben ser además del mismo módulo. Por tanto se debe cumplir tanto para el eje x como para el eje y :

$$|1 + \cos(kd)| = |\sin(kd)|$$

Esto se cumple si:

$$kd = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

Es decir si:

$$d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}$$

El valor mínimo positivo de d es:

$$d = \frac{\lambda}{4}$$

d) En la dirección ($\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/4$), y teniendo en cuenta que $d = \lambda/4$:

$$\begin{aligned}k_x &= k \sin(\pi/2) \cos(\pi/4) = \frac{k}{\sqrt{2}} \\ k_y &= k \sin(\pi/2) \sin(\pi/4) = \frac{k}{\sqrt{2}} \\ k_z &= k \cos(\pi/2) = 0 \\ \vec{N} &= \sqrt{2} I l \left(\hat{z} \left[\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}d\right) + \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}d\right) \right] + j \hat{y} \sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}d\right) - j \hat{x} \sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}d\right) \right) \\ &= \sqrt{2} I l \left(2 \hat{z} \cos\left(\frac{2\pi d}{\sqrt{2} \lambda}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi d}{\sqrt{2} \lambda}\right) (\hat{y} - \hat{x}) \right) \\ &= \sqrt{2} I l \left(2 \hat{z} \cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2} 4}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2} 4}\right) (\hat{y} - \hat{x}) \right) \\ &= I l (1, 256 \hat{z} + j 1, 267 (\hat{y} - \hat{x})) \\ \hat{\theta} &= \cos(\pi/2) \cos(\pi/4) \hat{x} + \cos(\pi/2) \sin(\pi/4) \hat{y} - \sin(\pi/2) \hat{z} = -\hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\sin(\pi/4) \hat{x} + \cos(\pi/4) \hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{x} + \hat{y})\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\hat{x} \cdot \hat{\theta} &= 0 \\ \hat{x} \cdot \hat{\phi} &= -1/\sqrt{2} \\ \hat{y} \cdot \hat{\theta} &= 0 \\ \hat{y} \cdot \hat{\phi} &= 1/\sqrt{2} \\ \hat{z} \cdot \hat{\theta} &= -1 \\ \hat{z} \cdot \hat{\phi} &= 0\end{aligned}$$

El campo radiado en la dirección ($\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/4$) será:

$$\vec{E} = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}_\perp = E_0 \vec{N}_\perp$$

donde:

$$\begin{aligned}\vec{N}_{\perp} &= N_{\theta}\hat{\theta} + N_{\phi}\hat{\phi} \\ N_{\theta} &= \vec{N} \cdot \hat{\theta} = N_x(\hat{x} \cdot \hat{\theta}) + N_y(\hat{y} \cdot \hat{\theta}) + N_z(\hat{z} \cdot \hat{\theta}) = -N_z = -1,256 \text{ Il} \\ N_{\phi} &= \vec{N} \cdot \hat{\phi} = N_x(\hat{x} \cdot \hat{\phi}) + N_y(\hat{y} \cdot \hat{\phi}) + N_z(\hat{z} \cdot \hat{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N_x + N_y) = j 1,792 \text{ Il}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\vec{E} = E_0 \text{Il} \left(-1,256 \hat{\theta} + j 1,792 \hat{\phi} \right)$$

Separando la amplitud del campo eléctrico en parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= -1,256 \hat{\theta} \\ \vec{E}_i &= 1,792 \hat{\phi}\end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que \vec{E}_r y \vec{E}_i son perpendiculares pero con distinto módulo. Por tanto la polarización es elíptica. Por otro lado:

$$(\vec{E}_i \times \vec{E}_r) \cdot \hat{r} = 1,792 \cdot 1,256 > 0$$

Por tanto la polarización es dextrógira. Como \vec{E}_r y \vec{E}_i son perpendiculares, son los ejes de la elipse de polarización. Y como el módulo de \vec{E}_i es mayor, \vec{E}_i es el eje mayor de la elipse y \vec{E}_r el eje menor. De manera que la relación axial es:

$$\text{R.A.} = \frac{|\vec{E}_i|}{|\vec{E}_r|} = \frac{1,792}{1,256} = 1,427$$

Solución al Problema 2

a) El campo en la apertura \vec{E}_a es uniforme con polarización vertical. Por tanto: :

$$\vec{E}_a(x', y') = \begin{cases} E_0 \hat{y} & \text{dentro} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$\vec{E}_a(x', y') = E_0 \text{rect}\left(\frac{x'}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{a}\right) \hat{y}$$

$$\vec{E}_a(x', y') = E_0 f(x') g(y') \hat{y}$$

$$f(x') = \text{rect}\left(\frac{x'}{a}\right)$$

$$g(y') = \text{rect}\left(\frac{y'}{b}\right)$$

Y el campo radiado (amplitud) será (suponiendo que $Z_0 = \eta$):

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) I(k_x, k_y)$$

donde $I(k_x, k_y)$ es la transformada de Fourier 2-D del campo en la apertura::

$$I(k_x, k_y) = E_0 F(k_x, a) G(k_y, a)$$

$$F(k_x, a) = \mathcal{TF}\{f(x')\} = a \text{sinc}(u_x) \quad u_x = \frac{k_x}{2\pi} a$$

$$G(k_y, b_g) = \mathcal{TF}\{g(y')\} = a \text{sinc}(u_y), \quad u_y = \frac{k_y}{2\pi} a$$

El máximo de campo radiado se produce en la dirección perpendicular a la apertura (eje z). Por otro lado, como el campo eléctrico en la apertura está polarizado según \hat{y} , el campo radiado en la dirección del eje z está también polarizado según \hat{y} . De manera que el plano E será el formado por la dirección de máxima radiación (\hat{z}) y la polarización del campo radiado en esa dirección (\hat{y}). Es decir, el plano E es el plano YZ . Y el plano H es el plano XZ .

En el plano E (YZ), se cumple que $\phi = \pi/2$. Por tanto:

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi = 0$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \phi = k \sin \theta$$

$$u_x = \frac{k_x}{2\pi} a = 0$$

$$u_y = \frac{k_y}{2\pi} a = \frac{k \sin \theta}{2\pi} a = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\sin \theta}{2\pi} 4\lambda = 4 \sin \theta$$

Por tanto el campo radiado en ese plano será:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) I(k_x = 0, k_y = k \sin \theta)$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 a^2 \text{sinc}(4 \sin \theta)$$

El diagrama de radiación de campo es:

$$d(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}|_{max}}$$

En el plano E será:

$$d(\theta, \phi = \pi/2) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) |\text{sinc}(4 \sin \theta)|$$

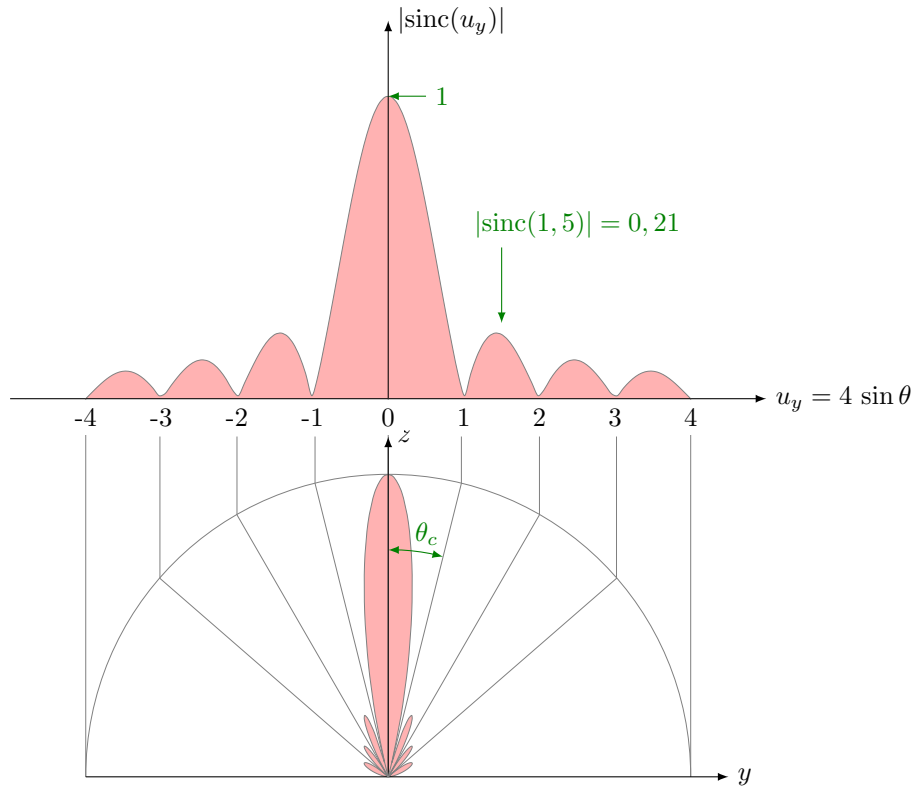


Figura 3: Diagrama de la TF de la distribución uniforme obtenido mediante el método gráfico

Apertura elemental	TF de la distrib. uniforme	Producto (Diagrama Plano E)

Tabla 1: Diagrama Plano E de la bocina

El diagrama $\text{sinc}(4 \sin \theta)$ se ha dibujado utilizando el método gráfico (ver figura 3). En la Tabla 1 se muestra el diagrama total de la apertura en el plano E. Hay que tener en cuenta que puesto que se ha aplicado el teorema de equivalencia el diagrama es válido sólo hacia fuera de la bocina ($z > 0$). Se puede apreciar que el diagrama de la apertura elemental apenas influye en el diagrama total.

El nivel de lóbulo principal a secundario será:

$$\text{NLPS} = \frac{d(\theta = \theta_{LP})}{d(\theta = \theta_{LS})}$$

donde $\theta_{LP} = 0$ y:

$$4 \sin \theta_{LS} = 1,5 \rightarrow \theta_{LS} = 22^\circ$$

Por tanto:

$$\text{NLPS} = \frac{d(\theta = 0)}{d(\theta = 22^\circ)} = \frac{1}{\left(\frac{1 + \cos(22^\circ)}{2}\right) |\text{sinc}(1, 5)|} = 4,89 = 13,6 \text{ dB}$$

En cuanto a la posición del primer cero (θ_c en la Figura 3):

$$4 \sin \theta_c = 1 \rightarrow \theta_c = 14,5^\circ$$

b) La antena B se puede ver como una agrupación de dos aperturas de tamaño $a/2 \times a$ con amplitudes de campo opuestas y separadas $\pm a/4$ del origen. El campo radiado por una apertura de tamaño $a/2 \times a$ será:

$$|\vec{E}_1| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 \left| \frac{a}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{k_x a}{2\pi} \right) a \operatorname{sinc} \left(\frac{k_y a}{2\pi} \right) \right|$$

Y el factor de agrupación:

$$FA = -e^{jk_x \frac{a}{4}} + e^{jk_x \frac{a}{4}} = -2j \sin \left(k_x \frac{a}{4} \right)$$

En el plano XZ se cumple que $\phi = 0$. Por tanto:

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta \cos \phi = k \sin \theta \\ k_y &= k \sin \theta \sin \phi = 0 \end{aligned}$$

Por tanto el campo radiado por la apertura B en el plano XZ es:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| \cdot |FA| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 \frac{a^2}{2} \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{k \sin \theta a}{2\pi} \right) \right| \cdot \left| -2j \sin \left(k \sin \theta \frac{a}{4} \right) \right|$$

Teniendo en cuenta que $a = 4\lambda$:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 a^2 |\operatorname{sinc}(2 \sin \theta)| \cdot |\sin(2\pi \sin \theta)|$$

Si llamamos u a $2 \sin \theta$, el diagrama que tenemos que representar es $|\operatorname{sinc}(u) \cdot \sin(\pi u)|$. En la Figura 4 se ha utilizado el método gráfico para representar dicho diagrama.

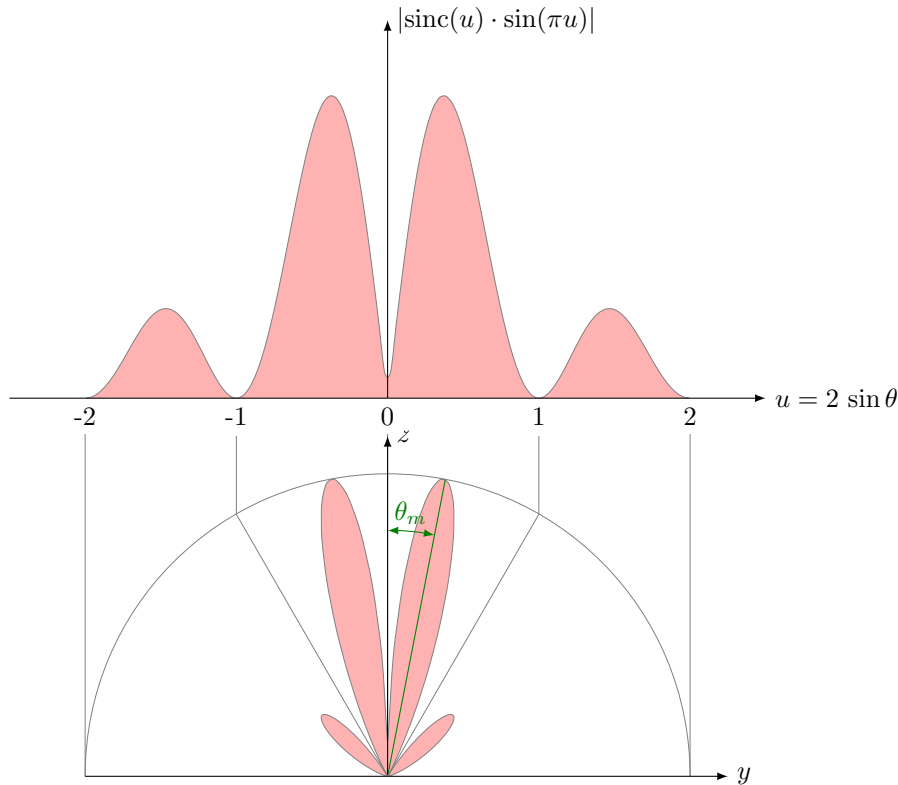


Figura 4: Diagrama $|\operatorname{sinc}(u) \cdot \sin(\pi u)|$ obtenido mediante el método gráfico

En la Tabla 2 se muestra el producto del diagrama de la apertura elemental por el diagrama $|\operatorname{sinc}(u) \cdot \sin(\pi u)|$. Se puede observar que el diagrama de la apertura elemental apenas si afecta. Tan sólo disminuye ligeramente los lóbulos secundarios.

Los nulos de radiación están en:

$$2 \sin \theta_c = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \theta_c = \{-90^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ\}$$

Apertura elemental	$ \text{sinc}(u) \cdot \sin(\pi u) $	Producto (Diagrama Plano E)

Tabla 2: Diagrama Plano E de la bocina

c) La antena C se puede ver como una agrupación de dos aperturas de tamaño $a \times a/2$ con amplitudes de campo opuestas y separadas $\pm a/4$ del origen. El campo radiado por una apertura de tamaño $a \times a/2$ será:

$$|\vec{E}_1| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 \left| a \text{sinc} \left(\frac{k_x}{2\pi} a \right) \frac{a}{2} \text{sinc} \left(\frac{k_y}{2\pi} \frac{a}{2} \right) \right|$$

Y el factor de agrupación:

$$FA = e^{jk_y \frac{a}{4}} - e^{-jk_y \frac{a}{4}} = 2j \sin \left(k_y \frac{a}{4} \right)$$

En el plano YZ se cumple que $\phi = \pi/2$. Por tanto:

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta \cos \phi = 0 \\ k_y &= k \sin \theta \sin \phi = k \sin \theta \end{aligned}$$

Por tanto el campo radiado por la apertura C en el plano YZ es:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| \cdot |FA| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 \frac{a^2}{2} \left| \text{sinc} \left(\frac{k \sin \theta}{2\pi} \frac{a}{2} \right) \right| \cdot \left| 2j \sin \left(k \sin \theta \frac{a}{4} \right) \right|$$

Teniendo en cuenta que $a = 4\lambda$:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 a^2 |\text{sinc}(2 \sin \theta)| \cdot |\sin(2\pi \sin \theta)|$$

Es decir, el diagrama de radiación de la antena C en el plano YZ es exactamente el mismo que el de la antena B en el plano XZ, lo cual es de esperar dada la simetría de ambos problemas.

En cuanto al máximo del diagrama, si despreciamos el diagrama de la apertura elemental, éste se producirá cuando la función $f(u) = \text{sinc}(u) \cdot \sin(\pi u)$, con $u = 2 \sin \theta$, sea máxima. Si nos fijamos en la Figura 4, podemos ver que ese máximo se produce de forma aproximada cuando $u \simeq 0,5$. Por tanto la posición del máximo es aproximadamente:

$$2 \sin \theta_m \simeq 0,5 \rightarrow \theta_m \simeq 14,5^\circ$$

Con este resultado es suficiente para que el problema se de por bien contestado. De todas formas, si se quiere obtener la posición del máximo de forma más exacta, se puede derivar la función $f(u)$ e igualar a 0:

$$\begin{aligned} f(u) &= \text{sinc}(u) \cdot \sin(\pi u) = \frac{\sin^2(\pi u)}{\pi u} \\ f'(u) &= \frac{2 \sin(\pi u) \cos(\pi u) \pi^2 u - \sin^2(\pi u) \pi}{(\pi u)^2} = 0 \rightarrow \tan(\pi u) = 2\pi u \end{aligned}$$

Probamos con varios valores de u hasta encontrar uno que satisfaga aproximadamente que $\tan(\pi u) - 2\pi u \simeq 0$. Mirando la gráfica 4 sabemos que el máximo está entre $u = 0$ y $u = 1$, un poco más cerca de 0 que de 1. Así que empezamos probando con $u = 0,4$.

u	$\tan(\pi u) - 2\pi u$
0,4	0,564
0,3	-0,508
0,35	-0,237
0,36	-0,137
0,37	-0,014
0,371	-0,00013

A la vista de la tabla anterior podemos afirmar que el diagrama se hace máximo aproximadamente para $u = 0,371$. Por tanto la posición del máximo calculada de forma más exacta es:

$$2 \sin \theta_m = 0,371 \rightarrow \theta_m = 10,7^\circ$$

d) En el caso A el campo radiado era:

$$|\vec{E}|^A = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 a^2 \operatorname{sinc}(4 \sin \theta)$$

Y era máximo para $\theta = 0$. Por tanto:

$$|\vec{E}|_{max}^A = \frac{1}{\lambda r} E_0 a^2$$

En el caso de la antena B, el campo radiado era:

$$|\vec{E}|^B = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E_0 a^2 |\operatorname{sinc}(2 \sin \theta)| \cdot |\sin(2\pi \sin \theta)|$$

Y este diagrama, al igual que el de la antena C, es máximo para θ_m . Por tanto:

$$|\vec{E}|_{max}^B = \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{1 + \cos \theta_m}{2} \right) E_0 a^2 |\operatorname{sinc}(2 \sin \theta_m)| \cdot |\sin(2\pi \sin \theta_m)|$$

$$|\vec{E}|_{max}^B = \begin{cases} \frac{1}{\lambda r} E_0 a^2 0,718 & \text{si } \theta_m = 14,5^\circ \\ \frac{1}{\lambda r} E_0 a^2 0,635 & \text{si } \theta_m = 10,7^\circ \end{cases}$$

La relación en dB entre ambos máximos es:

$$20 \log_{10} \left(\frac{|\vec{E}|_{max}^A}{|\vec{E}|_{max}^B} \right) = \begin{cases} 20 \log_{10} \left(\frac{1}{0,635} \right) = 4 \text{ dB} & \text{si } \theta_m = 14,5^\circ \\ 20 \log_{10} \left(\frac{1}{0,718} \right) = 2,87 \text{ dB} & \text{si } \theta_m = 10,7^\circ \end{cases}$$