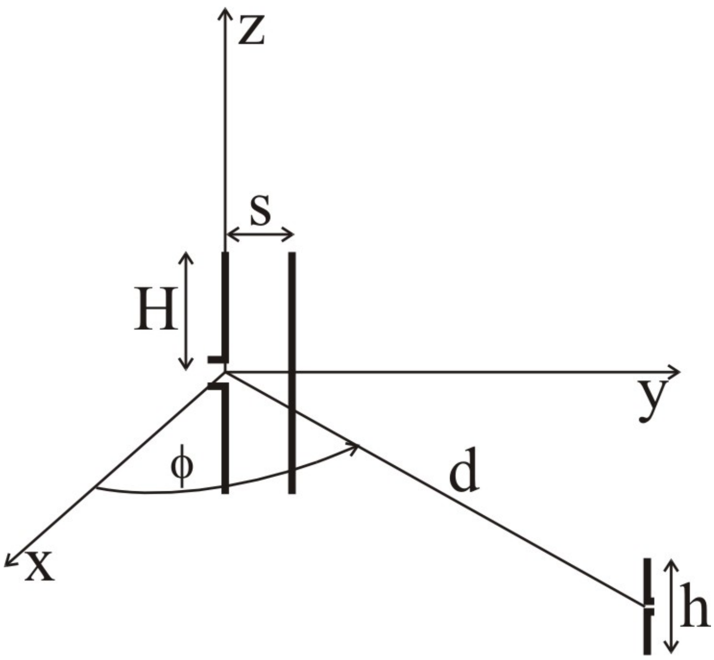
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

**ANTENAS**

- Duración : 2 horas 6 de abril de 2005

## PROBLEMA 1

Considere el radioenlace de la figura formado por dos antenas. En un extremo se sitúa una antena Yagi, formada por un elemento activo y un parásito, ambos de la misma longitud, $H=\lambda/4$. En el otro extremo, un dipolo corto de longitud total *h*. Puede suponer que las antenas se encuentran en campo lejano una de la otra.




a) Escriba la matriz de impedancias asociada al sistema formado por el dipolo activo, el elemento parásito y el dipolo corto. (1 punto)

b) Obtenga una expresión para las impedancias mutuas entre el dipolo activo y el corto, y entre el dipolo parásito y el corto. (2 puntos)

c) Obtenga la impedancia de entrada de la antena Yagi cuando actúa como transmisora. Suponga que el dipolo corto está en circuito abierto. (2 puntos)

d) Obtenga una expresión para la tensión recibida en circuito abierto en bornes del dipolo corto, $V_3(\phi)$, cuando la antena Yagi se alimenta con una corriente $I_1 = 1$ A. Considere como datos d, s, h y las impedancias mutuas entre los elementos de la Yagi. (2 puntos)

e) Obtenga la impedancia de entrada de la antena Yagi cuando ésta actúa como receptora. Considere que la corriente a la entrada del dipolo corto es $I_3 = 1$ A. (3 puntos)

SOLUCIÓN PROBLEMA 1:

a)

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3$$
$$0 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3$$
$$V_3 = Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3$$

b) La impedancias mutuas pedidas son por definición $Z_{31} = \left.\frac{V_3}{I_1}\right|_{I_2, I_3=0}$ y $Z_{32} = \left.\frac{V_3}{I_2}\right|_{I_1, I_3=0}$

Dado que el dipolo corto se encuentra en campo lejano, $V_3 = -\vec{E}_{31}\left(I_1\right)\cdot\vec{l}_3$ para el dipolo activo y $V_3 = -\vec{E}_{32}\left(I_2\right)\cdot\vec{l}_3$ para el dipolo parásito. En ambos casos $\vec{l}_3 = \frac{h}{2}\hat{z}$. En cuanto al campo radiado, se trata en ambos casos del campo de un dipolo de media onda. Particularizando para la posición del dipolo corto en la posición $d(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi, 0)$:

$$\vec{E}_{31} = -j60\frac{e^{-jkd}}{d}I_1\hat{z} \text{ y } \vec{E}_{32}\left(\phi\right) = -j60e^{jks\operatorname{sen}\phi}\frac{e^{-jkd}}{d}I_2\hat{z}$$

Por lo tanto, las impedancias pedidas son

$$Z_{31} = -j30\frac{e^{-jkd}}{d}h \text{ y } Z_{32}\left(\phi\right) = -j30e^{jks\operatorname{sen}\phi}\frac{e^{-jkd}}{d}h$$

c) La impedancia de entrada de la antena Yagi se obtiene como $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$. Teniendo en cuenta que $V_2$=0 y que $I_3$=0 por estar el dipolo corto en circuito abierto, podemos despejar la relación entre la tensión $V_1$ y la corriente $I_1$ del sistema del apartado a), obteniendo

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

d) En el sistema del apartado a) es fácil observar que $V_3\left(\phi\right) = Z_{31}I_1 + Z_{32}\left(\phi\right)I_2$. Particularizando las impedancias mutuas, la relación entre las corrientes $I_1$ e $I_2$, y sabiendo que $I_1$=1,

$$V_3\left(\phi\right) = -j30\frac{e^{-jkd}}{d}h\left[1 - \frac{Z_{12}}{Z_{22}}e^{jks\operatorname{sen}\phi}\right]$$

e) Para obtener la impedancia de entrada de la antena Yagi en recepción debemos calcular el cociente $Z_{in} = -\frac{V_{ca}}{I_{cc}}$

En primer lugar calculamos $V_{ca}$, lo que implica que $I_1$=0:

Teniendo en cuenta que $I_3$=1,

$$\begin{aligned} V_{ca} = V_1 &= Z_{12}I_2 + Z_{13} \\ 0 &= Z_{22}I_2 + Z_{23} \end{aligned}$$

Despejando, $V_{ca} = -\dfrac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{22}} + Z_{13}$

A continuación calculamos la corriente en cortocircuito $I_{cc}$=-$I_1$. Ahora $V_1$=0

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13} \\ 0 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23} \end{aligned}$$

Despejando, $I_{cc} = -I_1 = \dfrac{Z_{13}Z_{22} - Z_{12}Z_{23}}{Z_{21}Z_{12} - Z_{11}Z_{22}}$

La impedancia resultante del cociente de ambas cantidades es $Z_{in} = -\dfrac{V_{ca}}{I_{cc}} = Z_{11} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$

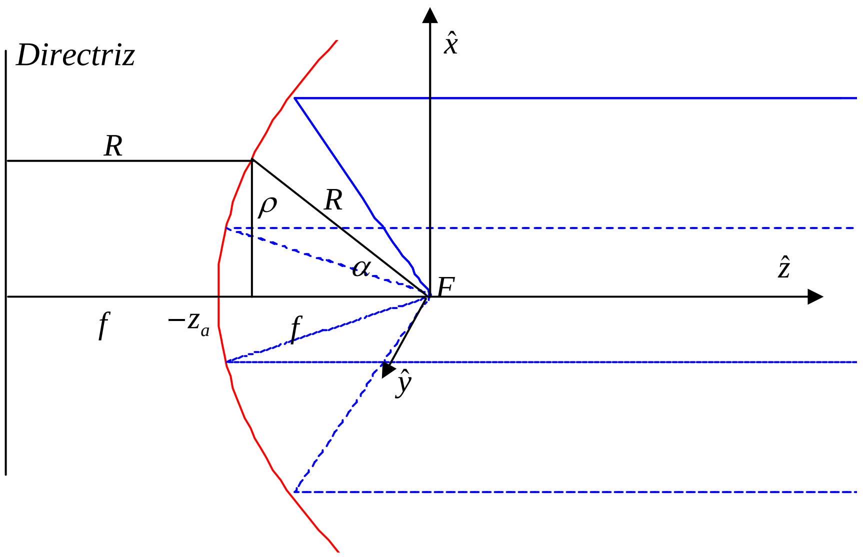
**PROBLEMA 2**

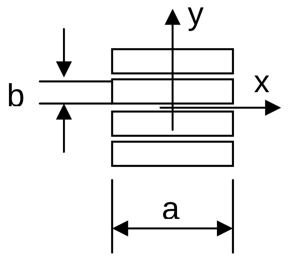
Un reflector parabólico con simetría de revolución tiene una distancia focal f=30λ y diámetro D. El reflector se alimenta en su foco con una agrupación de 4 guías de onda que propagan el modo fundamental $TE_{10}$.

Las dimensiones de las guías son a=2λ, b=λ/2. El espaciado de las guías es λ/2. El polinomio de la agrupación es:

$$p(z) = 1 + 2z + 2z^2 + z^3$$

a) Obtenga los ceros del polinomio de la agrupación de las 4 guías de onda. Represente gráficamente dicho factor de array a partir de la situación de los ceros (2 puntos).
b) Obtenga una expresión para el factor de array tomando como origen de coordenadas el centro de la agrupación. Represente el diagrama de radiación de la agrupación, calculando el ancho de haz entre ceros. (2 puntos)
c) Obtenga una expresión para los campos radiados por la agrupación de 4 guías en todo el espacio (sin reflector). (2 puntos)
d) Calcule el ancho de haz entre ceros de la agrupación de guías en el plano E y en el plano H. (2 puntos)
e) Calcule el diámetro que debe tener el reflector para que el cero de radiación del diagrama en el plano H coincida con el borde del reflector. (2 puntos)




$$R = \frac{f}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$(z + z_a) = f \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\rho = 2f \tan \frac{\alpha}{2}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

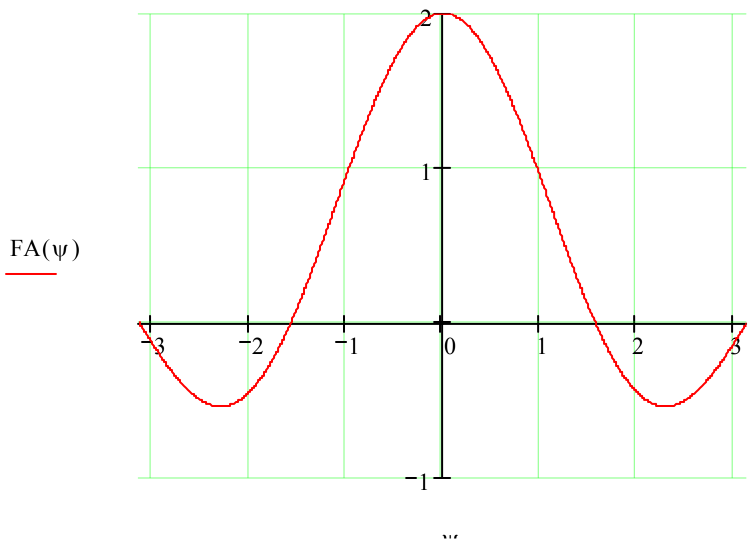
## Ceros del polinomio

El polinomio se puede descomponer como el producto de dos polinomios unifomes. Tendrá 3 ceros situados sobre el círculo unidad en 120º,180º y 240º

$$p(z) = \left(1+2z+2z^2+z^3\right) = (1+z)\left(1+z+z^2\right) = (z-e^{j\pi})\left(z-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\left(z-e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)$$

## Representación gráfica del factor de la agrupación

El Factor de la agrupación se puede representar gráficamente a partir de los ceros del polinomio.




## Factor de array

Tomando como referencia el centro de la agrupación, el polinomio es

$$p(z) = \left(z^{-\frac{3}{2}} + 2z^{-\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right) = 2\left(z^{-\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}\right) + \left(z^{-\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right) =$$

El factor de la agrupación se puede calcular como

$$FA(\psi_y) = 4\cos\left(\frac{\psi_y}{2}\right) + 2\cos\left(3\frac{\psi_y}{2}\right)$$

También es válida la siguiente solución

$$p(z) = \left(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{-1} + 1 + z\right)$$

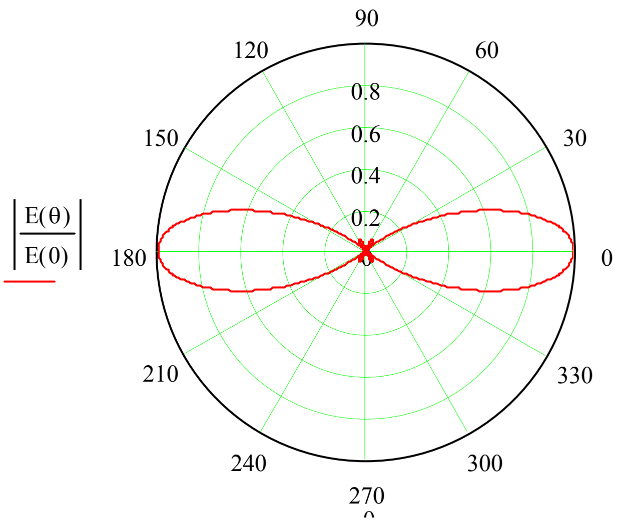
$$FA(\psi_y) = \cos\left(\frac{\psi_y}{2}\right)\left(1 + 2\cos\psi_y\right)$$

$$\psi_y = k_y \frac{\lambda}{2} = \pi \sin\theta \sin\phi$$

**Diagrama de radiación de la agrupación de 5 antenas.**

Los ceros del factor de array están situados en 120º y -120º,180º.

Los ceros corresponden a un ángulo en el espacio real, en el plano YZ
$\theta = 41.81^{\circ}$ . El ancho de haz es el doble 83.621º




**Campos radiados por una guía**

Una guía equivale a una apertura con polarización vertical y distribución coseno en el eje x y uniforme en el y

$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_0}$$

$$Z_0 = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

Los campos radiados por una apertura con polarización vertical  son

$$E_\theta = j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\sin\phi\left(\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta+1\right)\iint_{s'} E(x',y')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}dx'dy'$$

$$E_\phi = j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\cos\phi\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\iint_{s'} E(x',y')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}dx'dy'$$

La transformada de fourier bidimensional se puede calcular como el producto de dos transformadas unidimensionales. En el eje y hay que incluir el factor de array.

$$\iint_{s'} E(x',y')e^{jk_x x'}e^{jk_y y'}dx'dy' = E_0\int_{x'} f(x')e^{jk_x x'}dx'\int_{y'} g(y')e^{jk_y y'}dy'$$

$$F(k_x,a) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x')e^{jk_x x'}dx' = \frac{\pi}{2}a\frac{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2}$$

$$G(k_y,b) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g(y')e^{jk_y y'}dy' = b\frac{\sin\left(\frac{k_y b}{2}\right)}{\left(\frac{k_y b}{2}\right)}FA\left(k_y\frac{\lambda}{2}\right)$$

**Anchos de haz**

En el **plano E** el ancho de haz entre ceros será el calculado para el diagrama del array, dado que la transformada de la función uniforme no tiene ningún cero en el margen visible ya que el argumento nunca llega a valer $\pi$.

$$\frac{\sin\left(\frac{k_y b}{2}\right)}{\left(\frac{k_y b}{2}\right)}$$

$$\frac{k_y b}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\frac{\lambda}{2}\sin\theta\sin\phi = \frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi$$

Por lo tanto el ancho de haz es el calculado previamente 83.621º

**En el plano H** el primer cero de la transformada se tiene para

$$\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) = 0 \qquad \frac{k_x a}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\cos\phi\frac{2\lambda}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) = 48.59^\circ$$

El ancho de haz es el doble: 97.181º

**Diámetro del reflector**

La relación entre el diámetro y la distancia focal es

$$\frac{D}{2} = 2f\tan\frac{\beta}{2}$$

Dicho ángulo debe coincidir con el nulo de radiación en el plano H.

$$\beta = 48.59º$$

D=54.17 λ