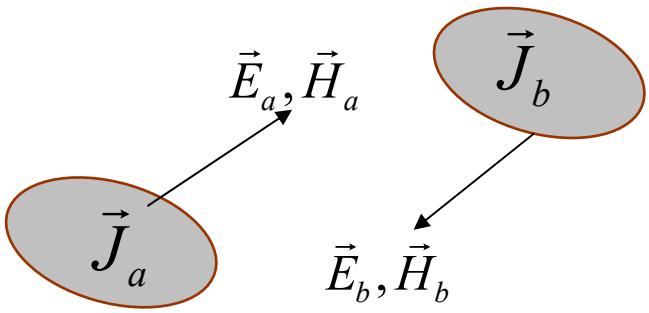
Teorema de reciprocidad

Los parámetros de las antenas (directividad, ancho de haz, impedancia, resistencia de radiación, etc.) son idénticos en transmisión y recepción.

Para poder demostrarlo vamos a utilizar el teorema de reciprocidad. Consideremos dos conjuntos de fuentes eléctricas a y b que crean dos conjuntos de campos eléctricos y magnéticos

$$\vec{J}_a \rightarrow \vec{E}_{a,}\vec{H}_a$$
$$\vec{J}_b \rightarrow \vec{E}_{b,}\vec{H}_b$$



La frecuencia es la misma y el medio es lineal e isotrópico.

El teorema de reciprocidad, que se puede demostrar a partir de las ecuaciones de Maxwell, indica que la reacción de los campos de las fuentes b con las corrientes a es el mismo que la reacción de los campos de las corrientes a con las corrientes b, es decir

$$\iiint_{v''} \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a dv' = \iiint_{v''} \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b dv'$$

Para demostrar esta relación se puede partir de la divergencia los productos de los campos de las fuentes a y b.

$$\nabla \cdot \left(\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a \right) = \left(\vec{H}_a \cdot \nabla \times \vec{E}_b - \vec{E}_b \cdot \nabla \times \vec{H}_a \right) - \left(\vec{H}_b \cdot \nabla \times \vec{E}_a - \vec{E}_a \cdot \nabla \times \vec{H}_b \right) =$$
$$-j\omega\mu \vec{H}_a \cdot \vec{H}_b - \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a - j\omega\varepsilon \vec{E}_b \cdot \vec{E}_a + j\omega\mu \vec{H}_b \cdot \vec{H}_a + \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b + j\omega\varepsilon \vec{E}_a \cdot \vec{E}_b$$

Simplificando los términos idénticos, resulta

$$\nabla \cdot \left(\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a \right) = -\vec{E}_b \cdot \vec{J}_a + \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b$$

Se han tenido en cuenta las ecuaciones de Maxwell

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

Integrando en volumen y aplicando el teorema de la divergencia, resulta

$$\oiint_{s'} \left(\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a \right) \cdot d\vec{s}\,' = \iiint_{v'} \left(\vec{E}_a \cdot \vec{J}_b - \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a \right) dv'$$

Si la superficie que encierra a las fuentes se toma muy lejos de las mismas, en campo lejano, los campos radiados no tendrán componente radial, y los productos vectoriales correspondientes a la integral de superficie son

$$\oiint_{s'} \left(\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a \right) \cdot d\vec{s}\,' =$$
$$= \oiint_{s'} \left(\left(E_{a\theta}\hat{\theta} + E_{a\phi}\hat{\phi} \right) \times \left(H_{b\theta}\hat{\theta} + H_{b\phi}\hat{\phi} \right) - \left(E_{b\theta}\hat{\theta} + E_{b\phi}\hat{\phi} \right) \times \left(H_{a\theta}\hat{\theta} + H_{a\phi}\hat{\phi} \right) \right) \cdot d\vec{s}\,' =$$
$$= \oiint_{s'} \left(\eta H_{a\phi} H_{b\phi} + \eta H_{a\theta} H_{b\theta} - \eta H_{a\phi} H_{b\phi} - \eta H_{a\theta} H_{b\theta} \right) ds' = 0$$

Por lo tanto el teorema de reciprocidad queda como

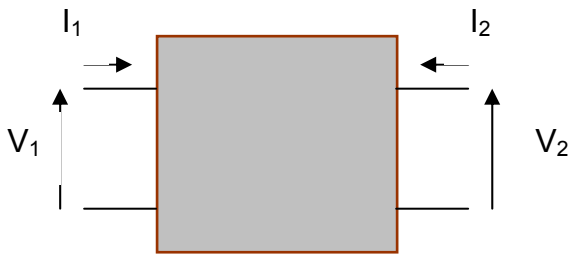
$$\iiint_{v''} \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a dv' = \iiint_{v''} \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b dv'$$

Aplicaciones del teorema de reciprocidad

Igualdad de impedancias mutuas

Supongamos que tenemos dos antenas separadas una cierta distancia, se define la matriz de impedancias asociada a los puertos 1 y 2 como

$$V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$$
$$V_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22}$$



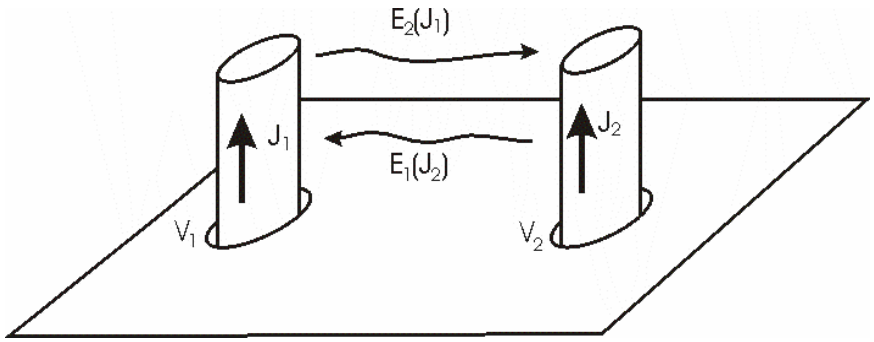
Las impedancias mutuas son

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

Para simplificar la demostración consideraremos dos antenas sencillas. La extensión a problemas más complejos sólo difiere en el cálculo de las integrales involucradas. Sea el problema planteado en la figura, donde dos monopolos están alimentados por su correspondiente cable coaxial.



Antes de aplicar el teorema de reciprocidad a una pareja de antenas primero observamos que el campo eléctrico tangencial a lo largo de ambas antenas debe ser nulo.

$$E_1^{total} = E_1(V_1) + E_1(J_1) + E_1(J_2) = 0$$
$$E_2^{total} = E_2(V_2) + E_1(J_1) + E_1(J_2) = 0$$

Donde V_i es la tensión aplicada al monopolo i, y $J_i = I_i f_i(z)$ es la densidad de corriente a lo largo del monopolo i, La función $f_i(z)$ está normalizada de modo que I_i representa la corriente en el puerto i. Estas igualdades se cumplen en todos los puntos z del monopolo. Sin embargo, con el fin de obtener una relación que involucre únicamente las corrientes y tensiones en los puertos de los monopolos podemos aplicar el producto interno del campo eléctrico en cada monopolo, por la función densidad de corriente en el propio monopolo,

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

$$\left\langle J_i, E_i^{total} \right\rangle = \int_{monopolo\ i} J_i(z) \cdot E_i^{total}(z)\, dz$$

Resultando las ecuaciones

$$\int_1 J_1(z) E_1(V_1)\, dz + \int_1 J_1(z) E_1(J_1)\, dz + \int_1 J_1(z) E_1(J_2)\, dz = 0$$
$$\int_2 J_2(z) E_2(V_2)\, dz + \int_2 J_2(z) E_2(J_1)\, dz + \int_2 J_2(z) E_2(J_2)\, dz = 0$$

Idealmente suponemos que la contribución del generador *i* al campo eléctrico en el cuerpo del monopolo *i*, E_i^{total} ,se concentra en el propio puerto *i*, siendo nulo en el resto del monopolo (suposición bastante realista). En estas condiciones, y suponiendo además el puerto situado en z=0 el campo que produce el generador *i* puede ponerse como

$$E_i(V_i) = -V_i \delta(z)$$

Por lo que podemos escribir que

$$\int_i J_i(z) E_i(z)\, dz = I_i(-V_i)$$

Si lo sustituimos en las ecuaciones anteriores y ponemos de manifiesto la dependencia de *J* con *f*,

$$I_1 \int_1 f_1(z) E_1(f_1)\, dz + I_2 \int_1 f_1(z) E_1(f_2)\, dz = V_1$$
$$I_1 \int_2 f_2(z) E_2(f_1)\, dz + I_2 \int_2 f_2(z) E_2(f_2)\, dz = V_2$$

Es inmediato observar que podemos despejar los cocientes

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_1 J_1(z) E_1(J_2) dz$$

de la primera ecuación, y

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_1 J_2(z) E_2(J_1) dz$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

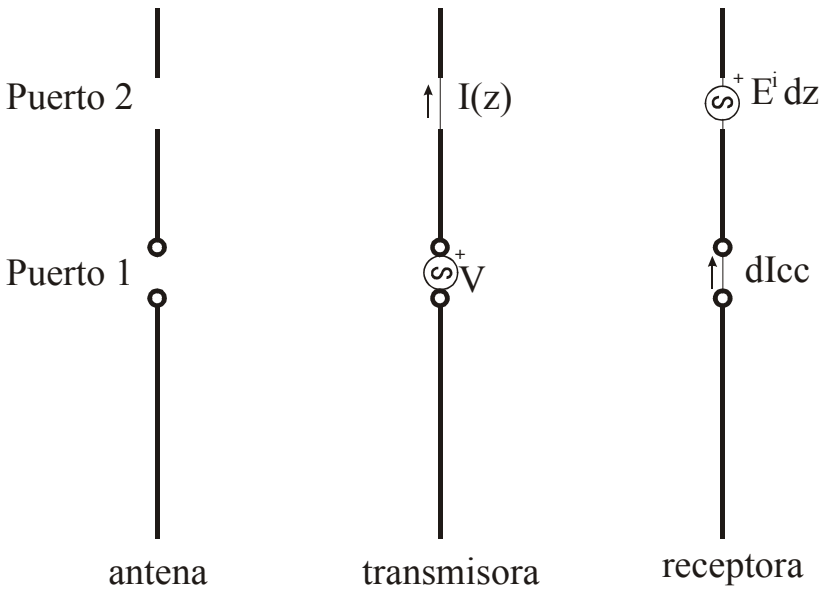
De la segunda. Ahora, dado que el teorema de reciprocidad establece que

$$\int_1 J_1(z)E_1(J_2)dz = \int_2 J_2(z)E_2(J_1)dz$$

Podemos afirmar que las impedancias mutuas definidas con las corrientes y tensiones en los puertos 1, 2, son iguales, $Z_{12} = Z_{21}$.

Cálculo de la tensión recibida

Los parámetros que se suelen emplear para describir a la antena en transmisión son la corriente a la entrada, I(0), la densidad de corriente por la antena J y el campo radiado por esas corrientes. Por el contrario, cuando la antena actúa en recepción resulta más conveniente hablar de la tensión inducida en circuito abierto en bornes de la antena V_{ca} cuando sobre ella incide un campo eléctrico E^i. No obstante, los parámetros en transmisión y en recepción están relacionados y es posible hallar la expresión que los liga empleando el teorema de reciprocidad. Para ello es necesario interpretar la antena como un cuadripolo de dos accesos. Uno de los accesos obviamente está constituido por sus bornes de entrada, mientras que el otro no está físicamente localizado puesto que está distribuido a lo largo del cuerpo de la antena siendo cada elemento diferencial de corriente dJ en la antena, el que "da salida" a un elemento diferencial de campo radiado, o a la inversa, recoge una porción diferencial de campo incidente dE^i. Podemos hacer el análisis tomando como segundo puerto uno de estos puertos diferenciales e integrando posteriormente a toda la antena. La figura muestra la antena con sus dos puertos y la interpretación de la misma en transmisión y recepción, respectivamente



© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Cuando la antena está transmitiendo, aplicamos un generador en el puerto 1, obteniendo en el puerto 2 una corriente I(z) en cortocircuito. Cuando la antena actúa en recepción, el campo incidente induce sobre la antena otro campo igual y opuesto para que se cumpla la condición de campo tangencial nulo sobre el conductor. Este campo funciona como un generador de tensión ideal de valor $E_z^i dz$ que a su vez es responsable de que por el puerto 1 cortocircuitado circule un diferencial de corriente dI_{cc}. Dado que el teorema de reciprocidad establece que $Y_{12} = Y_{21}$, podemos escribir

$$\frac{V}{I(z)} = \frac{E_z^i dz}{dI_{cc}}$$

Despejando el diferencial de corriente en cortocircuito y sumando las contribuciones de los puertos dz distribuidos,

$$dI_{cc} = \frac{1}{V} I(z) E_z^i dz = \frac{1}{V} \vec{I}(z) \cdot \vec{E}_t dz$$

$$I_{cc} = \frac{1}{V} \int_{antena} I(z) E_z^i dz$$

Podemos obtener otra relación para la tensión en bornes de la antena empleando la definición de impedancia de entrada y su relación con el equivalente de Thevenin de la antena

$$Z_{in} = \frac{V}{I(0)} = -\frac{V_{ca}}{I_{cc}}$$

resultando

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \int_{antena} I(z) E_z^i dz$$

La expresión anterior puede generalizarse para una antena cualquiera, quedando de la forma

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \int_{v'} \vec{J} \cdot \vec{E}^i dv'$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Igualdad de diagramas en transmisión y recepción

Si la antena 1 es que actúa como transmisora y la antena 2 como receptora, para medir el diagrama de radiación de la antena 1, se miden los campos radiados en todas las direcciones del espacio, lo cual es equivalente a determinar la impedancia mutua en función del ángulo.

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1}$$

Si la antena 2 es transmisora y la 1 receptora , se estaría midiendo el diagrama de la antena 1 en recepción.

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2}$$

Teniendo en cuenta el teorema de reciprocidad, $z_{12}=z_{21}$, y los dos diagramas serían idénticos.

Igualdad de impedancias en transmisión y recepción

La impedancia de una antena transmisora se define como la relación entre la tensión y la corriente en sus terminales.

$$Z_{in}^{t} = \frac{V_1}{I_1}$$

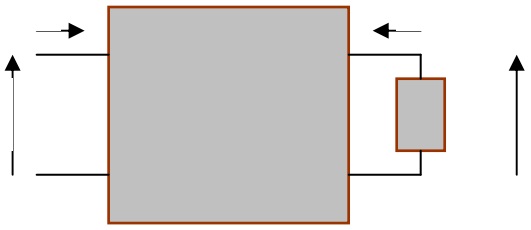
Si se tiene una antena cercana se debe considerar la matriz de impedancias.

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12}$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22}$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Suponiendo que la segunda antena tenga una impedancia de carga, la impedancia de entrada en transmisión se calcularía como

$$\frac{V_1}{I_1} = z_{11} + z_{12}\frac{I_2}{I_1}$$
$$\frac{V_2}{I_2} = z_{21}\frac{I_1}{I_2} + z_{22} = -R_L$$



Despejando se obtiene la impedancia de entrada en transmisión

$$Z_{in}^{t} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{21}}{R_L + z_{22}} z_{12}$$

Si la antena se encuentra aislada en el espacio, la impedancia de entrada coincidiría con z_{11} .

Si la antena 1 actúa como receptora, se define la impedancia de entrada en recepción como la relación entre la tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito. La antena 2 actúa como transmisora, y se supone que la impedancia del generador es R_L.

La tensión en circuito abierto en la puerta 1, se calcula como

$$V_{ca} = V_1\big|_{I_1=0} = z_{12} I_2 = z_{12}\frac{V_g}{R_L + z_{22}}$$

La corriente en cortocircuito se puede calcular de la siguiente forma

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} = 0$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22} = V_g - I_2 R_L$$

Teniendo en cuenta que por definición la corriente en cortocircuito I_{cc} se define entrante en el cuadripolo,

$$I_{cc} = I_1 = -\frac{z_{12}}{z_{11}} I_2$$

Despejando V_g en función de I2 en la segunda ecuación, y sustituyendo en la promera,

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

$$V_g - I_2 R_L = -\frac{z_{12} z_{21}}{z_{11}} I_2 + z_{22} I_2$$

$$I_{cc} = \frac{z_{12}}{z_{11}} \frac{V_g}{z_{22} + R_L - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11}}}$$

Finalmente la impedancia en recepción, se demuestra que tiene el mismo valor que la impedancia en transmisión.

$$Z_{in}^{r} = -\frac{V_{ca}}{I_{cc}} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + R_L}$$

Longitud efectiva

El campo radiado por una antena depende del potencial vector.
$\vec{E} = -j\omega(\vec{A} - \hat{r} \cdot \vec{A}) = j\omega(\hat{r} \times (r \times \vec{A}))$

El potencial vector se puede escribir en función del vector de radiación como

$$\vec{E} = j\omega\left(\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}\right)\right) = j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}\left(\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \vec{N}\right)\right)$$

Se define la longitud efectiva de una antena en transmisión como la relación entre las componentes tangenciales del vector de radiación y la corriente de entrada a la antena.

$$\vec{l}_{ef} = \frac{\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \vec{N}\right)}{I(0)} = \frac{\vec{N} - \vec{N} \cdot \hat{r} - \hat{r}}{I(0)} = \frac{\vec{N}_{rad}}{I(0)} = \frac{N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}}{I(0)}$$

La longitud efectiva corresponde a los campos que radiaría una corriente uniforme de valor I(0)), que estuviera orientada perpendicularmente a la dirección de propagación.

$$\vec{E} = j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}\left(\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \vec{N}\right)\right) = j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} I(0) \vec{l}_{ef}$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Ejemplos de longitud efectiva

Dipolo elemental

La longitud efectiva de un dipolo elemental será

$$\vec{l}_{ef} = \frac{\vec{N}_{rad}}{I(0)} = \frac{N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}}{I(0)} = \frac{1}{I(0)} \iiint_{v'} \vec{J}(\hat{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} dv' = -l \sin(\theta) \hat{\theta}$$

El máximo del vector de radiación se tiene en la dirección perpendicular al dipolo y vale

$$N_{\max} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I dz' = I(0) l$$

La longitud efectiva coincidirá con el valor de la longitud real del dipolo l_{ef}=l

Dipolo corto

Un dipolo corto tiene una distribución de corrientes triangular

$$I(z') = I(0) \left(\frac{\frac{l}{2} - |z'|}{\frac{l}{2}} \right)$$

El vector de radiación se puede calcular como

$$\vec{N} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z') e^{jk_z z'} dz' \hat{z} = I(0) \frac{l}{2} \hat{z}$$

Calculando la componente tangencial del vector de radiación, la longitud efectiva queda como $\vec{l}_{ef} = -\frac{l}{2} \sin\theta \hat{\theta}$

Dipolo resonante

El vector de radiación de un dipolo resonante es

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

$$\vec{N} = -I(0)\frac{\lambda}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{\theta}$$

La longitud efectiva es

$$\vec{l}_{ef} = -\frac{\lambda}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{\theta}$$

El máximo se encuentra en la dirección $\theta = \frac{\pi}{2}$

Dipolo	$\vec{l}_{ef}$	Máximo
Elemental	$-l\sin(\theta)\hat{\theta}$	l
Corto	$-\frac{l}{2}\sin(\theta)\hat{\theta}$	$\frac{l}{2}$
Resonante	$-\frac{\lambda}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{\theta}$	$\frac{\lambda}{\pi}$

Longitud efectiva en recepción

Como vimos, la aplicación del teorema de reciprocidad permite calcular la tensión en circuito abierto en la antena receptora a partir de la distribución de corrientes que tendría como transmisora y el campo incidente.

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)}\iiint_{v'} \vec{J}(\hat{r}')\cdot\vec{E}_i dv'$$

En campo lejano el campo incidente se puede aproximar por una onda plana

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}}$$

Particularizando el campo en los puntos $\vec{r}\,'$ de la antena receptora, la tensión en circuito abierto será

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)}\iiint_{v'} \vec{J}(\hat{r}')\cdot\vec{E}_0 e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv' = -\vec{E}_0\cdot\left(\frac{1}{I(0)}\iiint_{v'} \vec{J}(\hat{r}')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv'\right)$$

Se puede definir una longitud efectiva vectorial en recepción, de forma similar a la definición escalar. La tensión en circuito abierto

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

será proporcional al producto escalar del vector campo incidente por la longitud efectiva.

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)}\vec{E}_0 \cdot \vec{N} = -\frac{1}{I(0)}\vec{E}_0 \cdot \left(\vec{N}_r + \vec{N}_t\right) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{l}_{ef}$$

Para obtener la anterior fórmula se ha tenido en cuenta que la onda plana incidente tan sólo tiene componente tangencial.

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{N}_r = 0$$

La longitud efectiva en recepción coincide con la longitud efectiva en transmisión.

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Coeficiente de desacoplo de polarización

Se define el coeficiente de desacoplo de polarización como la relación entre la potencia recibida y la que se recibiría si hubiera adaptación de polarización.

$$c_p = \frac{W_r}{W_r^a} \leq 1$$

La condición de máxima transferencia de potencia para adaptación de impedancias es

$$W_r = \frac{V_{ca}^2}{4R_a}$$

El coeficiente de desacoplo de polarización será

$$c_p = \frac{W_r}{W_r^a} = \frac{\dfrac{V_{ca}^2}{4R_a}}{\dfrac{\left(V_{ca}^a\right)^2}{4R_a}} = \frac{\left|\vec{E}_o \cdot \vec{l}_{ef}\right|^2}{\left|\vec{E}_0\right|^2 \left|\vec{l}_{ef}\right|^2}$$

El coeficiente de desacoplo puede calcularse a partir de las longitudes efectivas de dos antenas.

$$c_p = \frac{\left|\vec{l}_{ef1} \cdot \vec{l}_{ef2}^{\,*}\right|^2}{\left|\vec{l}_{ef1}\right|^2 \left|\vec{l}_{ef2}\right|^2}$$

Hay que tener en cuenta el convenio de signos para la polarización de las ondas, las longitudes efectivas se refieren a campos transmitidos, mientras que las ondas incidentes se propagan en sentido contrario.

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Ejemplos de coeficientes de desacoplo de polarización

Polarización lineal

$$\vec{l} = \hat{x} + 2\hat{y}$$
$$\vec{E} = (\hat{x} + \hat{y})e^{jkz}$$
$$c_p = \frac{\left|(\hat{x} + 2\hat{y})\cdot(\hat{x} + \hat{y})\right|^2}{\left|\hat{x} + 2\hat{y}\right|^2 \left|\hat{x} + \hat{y}\right|^2} = \frac{(1+2)^2}{\left(\sqrt{5}\sqrt{2}\right)^2} = 0.9$$

El coeficiente de polarización en polarizaciones lineales es $\cos^2\alpha$, siendo el ángulo el que forman los vectores.

$$\cos^2\alpha = \cos^2(63.43 - 45) = 0.9$$

Polarización circular

$$\vec{l} = \hat{x} - j\hat{y}$$
$$\vec{E} = (\hat{x} + j\hat{y})e^{jkz}$$
$$c_p = \frac{\left|(\hat{x} - j\hat{y})\cdot(\hat{x} + j\hat{y})\right|^2}{\left|\hat{x} - j\hat{y}\right|^2 \left|\hat{x} + j\hat{y}\right|^2} = \frac{(2)^2}{\left(\sqrt{2}\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

Polarización elíptica

Polarización transmisora: circular a derechas
Polarización campo incidente: elíptica a derechas

$$\vec{l} = \hat{x} - j\hat{y}$$
$$\vec{E} = (\hat{x} + 2j\hat{y})e^{jkz}$$
$$c_p = \frac{\left|(\hat{x} - j\hat{y})\cdot(\hat{x} + 2j\hat{y})\right|^2}{\left|\hat{x} - j\hat{y}\right|^2 \left|\hat{x} + 2j\hat{y}\right|^2} = \frac{(3)^2}{\left(\sqrt{2}\sqrt{5}\right)^2} = 0.9$$

Polarización transmisora: circular a izquierdas
Polarización campo incidente: elíptica a derechas

$$\vec{l} = \hat{x} + j\hat{y}$$
$$\vec{E} = (\hat{x} + 2j\hat{y})e^{jkz}$$
$$c_p = \frac{\left|(\hat{x} + j\hat{y})\cdot(\hat{x} + 2j\hat{y})\right|^2}{\left|\hat{x} + j\hat{y}\right|^2 \left|\hat{x} + 2j\hat{y}\right|^2} = \frac{(1)^2}{\left(\sqrt{2}\sqrt{5}\right)^2} = 0.1$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Campos próximos de un dipolo

En el capítulo anterior se obtuvieron los campos radiados y el vector de radiación (en campo lejano), de un hilo de corrientes alineado según el eje z, con una distribución sinusoidal de corrientes

$$I(z') = I_m \sin\left(k\left(H - |z'|\right)\right)$$

Para el cálculo de autoimpedancias e impedancias mutuas es necesario calcular los campos próximos del dipolo.

Para ello el potencial vector se calculará de forma exacta como

$$\vec{A} = \hat{z}\int_{-H}^{H} I(z')\frac{\mu e^{-jkR}}{4\pi R}dz'$$

El campo magnético se puede obtener a partir de la definición de los potenciales

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}$$

El rotacional en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla\times\vec{A} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \hat{z}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}rA_\phi - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)$$

Teniendo en cuenta que el problema tiene simetría de revolución, y el potencial vector sólo tiene componente z, en coordenadas cilíndricas el rotacional se reduce a

$$\nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\hat{\phi}$$

El campo magnético será por tanto

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\int_{-H}^{H} I(z')\frac{\mu e^{-jkR}}{4\pi R}dz\right)\hat{\phi}$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Tras una serie de operaciones, se puede llegar a la expresión final para el campo magnético de un hilo de corriente, con distribución de corriente sinuosidal

$$H_\phi = \frac{Ij}{4\pi\rho}\left(e^{-jkR_1} + e^{-jkR_2} - 2\cos(kH)e^{-jkr}\right)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell, en una región libre de fuentes

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

En coordenadas cilíndricas, para el caso del hilo de corrientes.

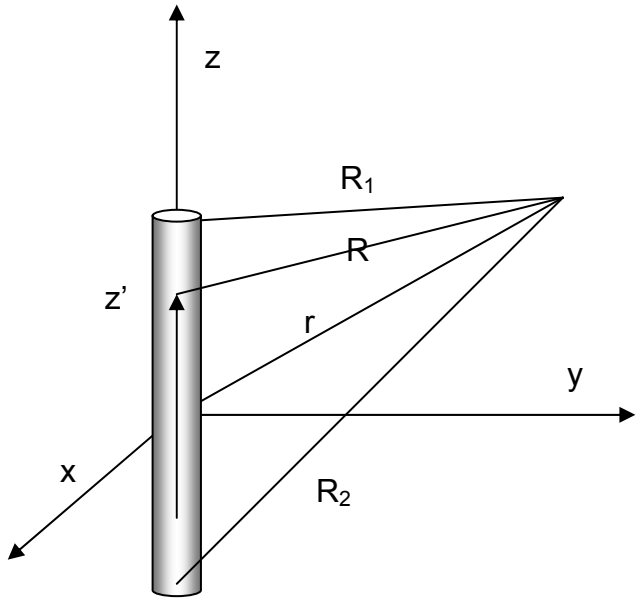
$$E_\rho = -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial H_\phi}{\partial z}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right)$$

Las expresiones finales para el campo eléctrico son

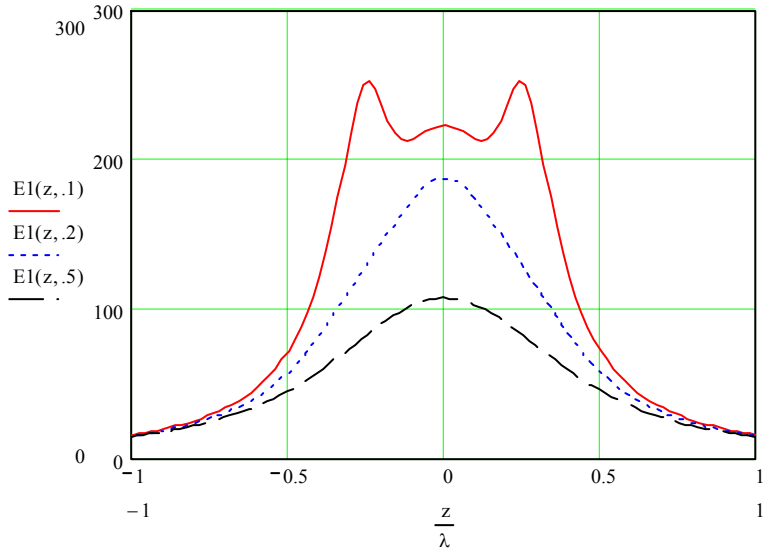
$$E_\rho = j\frac{\eta I}{4\pi\rho}\left((z-H)\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + (z+H)\frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2z\cos(kH)\frac{e^{-jkr}}{r}\right)$$

$$E_z = -j\frac{\eta I}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2z\cos(kH)\frac{e^{-jkr}}{r}\right)$$

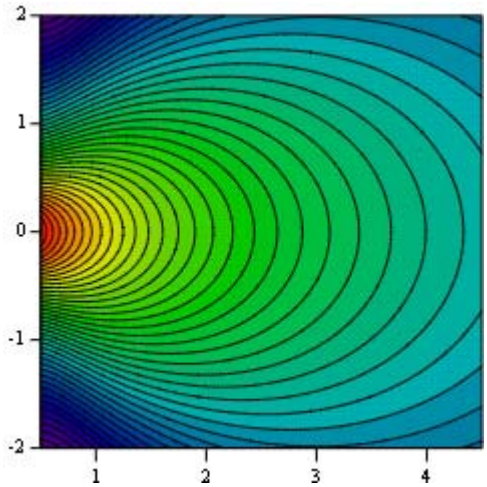


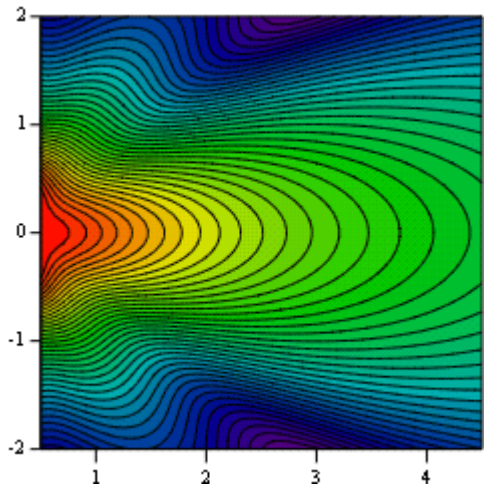
© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Los campos cercanos E_z, de un dipolo de semibrazo H=λ/4, a distancias de 0.1λ, 0.2λ y 0.5λ.



La gráfica en curvas de nivel para dipolos de semibrazos H=λ/4 y H=5λ/8 son

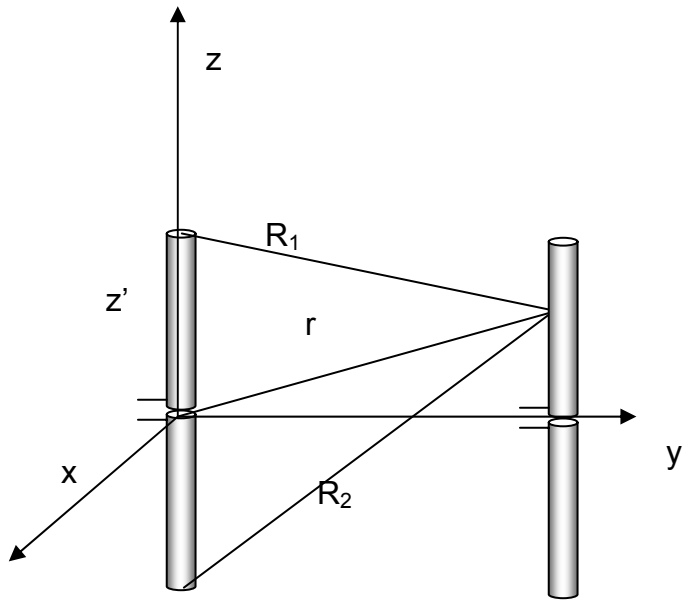




© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Impedancia mutua entre dos dipolos

La aplicación del teorema de reciprocidad permite calcular la tensión en circuito abierto en una antena cuando inciden sobre ella unos campos arbitrarios.



La expresión general es

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,') \cdot E(\vec{r}\,') dv'$$

Si queremos calcular la tensión en circuito abierto en la antena 2, cuando incide un campo creado por la antena 1, las corrientes corresponderán a la antena 2

$$I_2(z') = I_{2m} \sin\left(k\left(H_2 - |z'|\right)\right)$$

El campo eléctrico corresponderá al creado por la antena 1, en la situación de la antena 2

$$E_z = -j\frac{\eta I}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2z\cos(kH)\frac{e^{-jkr}}{r}\right)$$

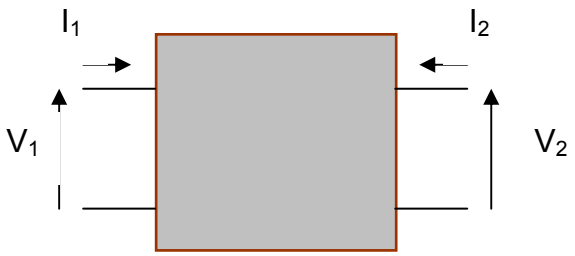
© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

La expresión para la tensión en circuito abierto será por tanto

$$V_2 = -\frac{1}{I_2(0)} \int_{-H_2}^{H_2} I_2(z')E_z dz'$$

Aplicando la definición de impedancia mutua en un cuadripolo

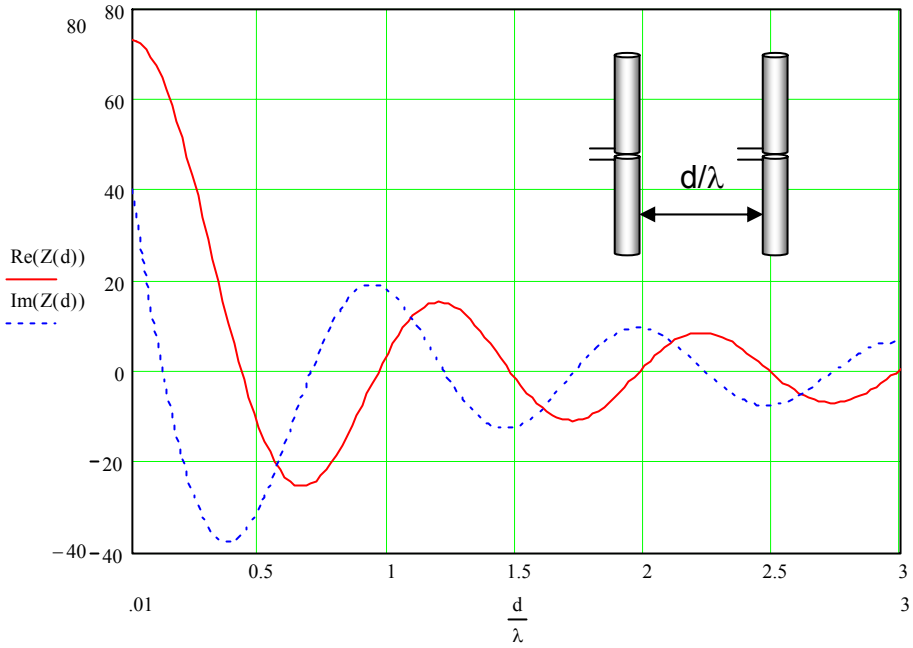
$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$



Se obtiene la expresión para la impedancia mutua de 2 dipolos

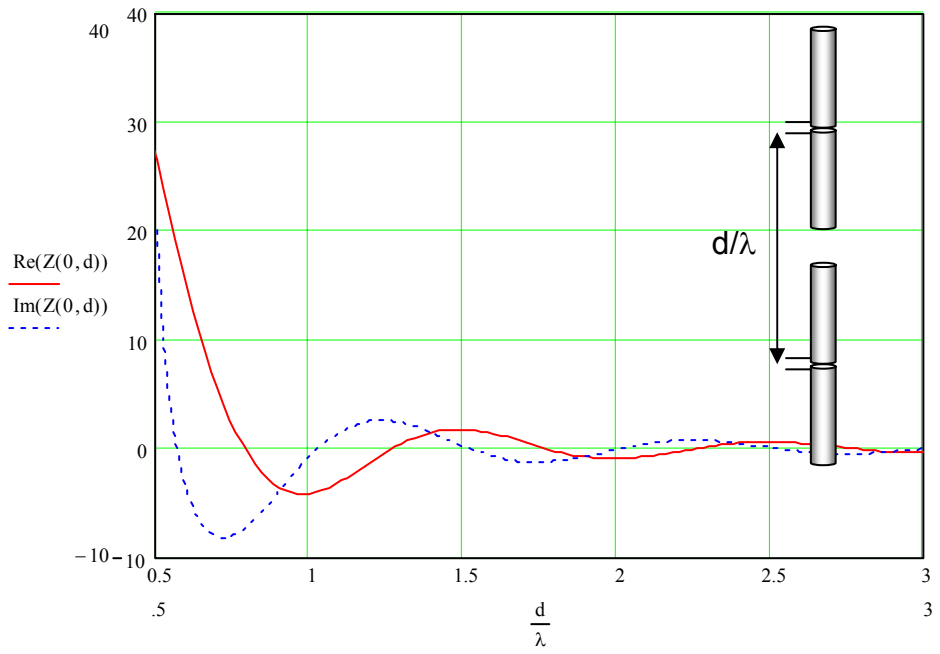
$$z_{21} = -\frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_{-H_2}^{H_2} I_{2m} \sin\left(k\left(H_2 - |z'|\right)\right)\left(-j\frac{\eta I_{1m}}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2z\cos(kH)\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right)dz'$$

La integral se puede evaluar de forma numérica, en diversas configuraciones. La gráfica siguiente corresponde a la impedancia mutua entre dos dipolos de longitudes $H_1=H_2=\lambda/4$, en función de la separación entre ellos.



© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

La siguiente gráfica corresponde a la impedancia mutua de dos dipolos colineales, en función de la distancia de separación entre los centros de los mismos



Impedancia de entrada de un dipolo

La autoimpedancia de entrada de un dipolo se define como

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

La tensión es la creada por el propio dipolo, debido a los campos próximos.

La expresión para la impedancia de entrada es

$$z_{11} = -\frac{1}{\left(I_1(0)\right)^2}\int_{-H_2}^{H_2} I_{1m}\sin\left(k\left(H_1-|z'|\right)\right)\left(-j\frac{\eta I_{1m}}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}+\frac{e^{-jkR_2}}{R_2}-2z\cos\left(kH_1\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right)dz'$$

La integral tiene singularidades cuando se anulan alguno de los denominadores de la expresión. Esto sucede cuando la longitud del

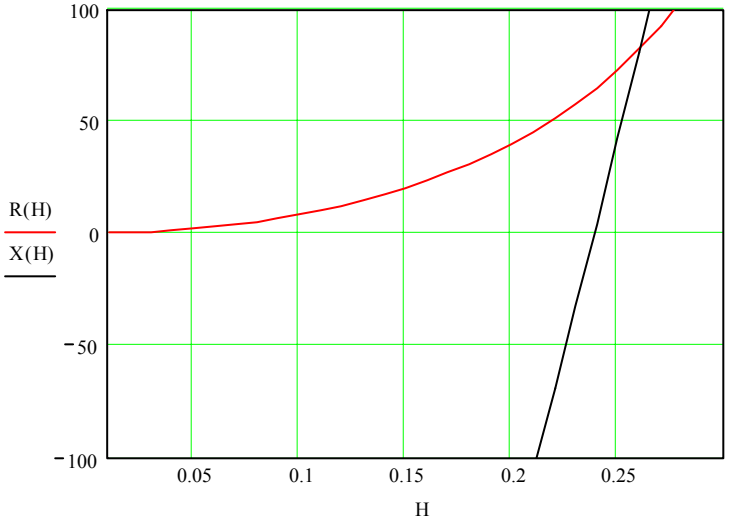
© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

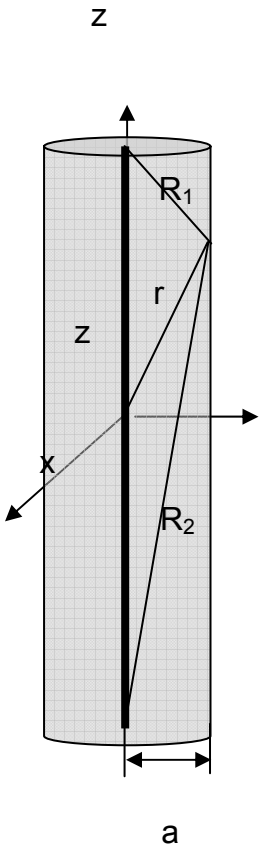
brazo del dipolo es λ/2 o múltiplo entero. También aparecen singularidades cuando las distancias R_1, R_2, r son cero.

Las singularidad en la distribución de corrientes no se puede evitar, dado que la aproximación para la misma es incorrecta, y se debe recurrir a métodos numéricos, como el método de los momentos.

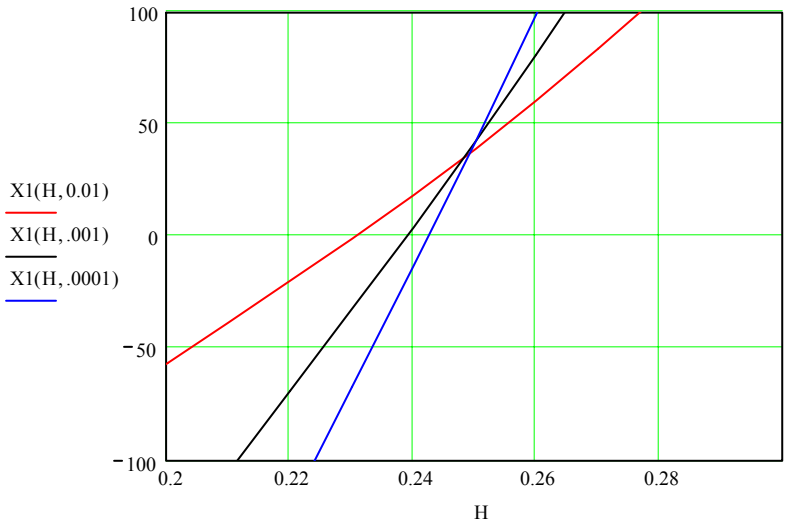
Para evitar la singularidad (evaluar los campos sobre la misma antena, se puede suponer que las corrientes están situadas en un hilo delgado, mientras que los campos se evalúan en la superficie.

La gráfica muestra la resistencia y la reactancia de entrada de un dipolo de radio 0.001λ en función de las dimensiones de H/λ. La resonancia aparece para H=0.238λ





La siguiente gráfica muestra la reactancia de un dipolo, para distintos radios (a), en función de las dimensiones H/λ. Se puede observar que las dimensiones en las que X=0, dependen del grosor de la antena



© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Análisis numérico de la impedancia y las corrientes

La impedancia y las corrientes se pueden calcular de forma numérica, resolviendo las ecuaciones integrales que relacionan el potencial vector con las condiciones de contorno en el conductor para el campo eléctrico. La ecuación integral se puede resolver mediante el método de los momentos.

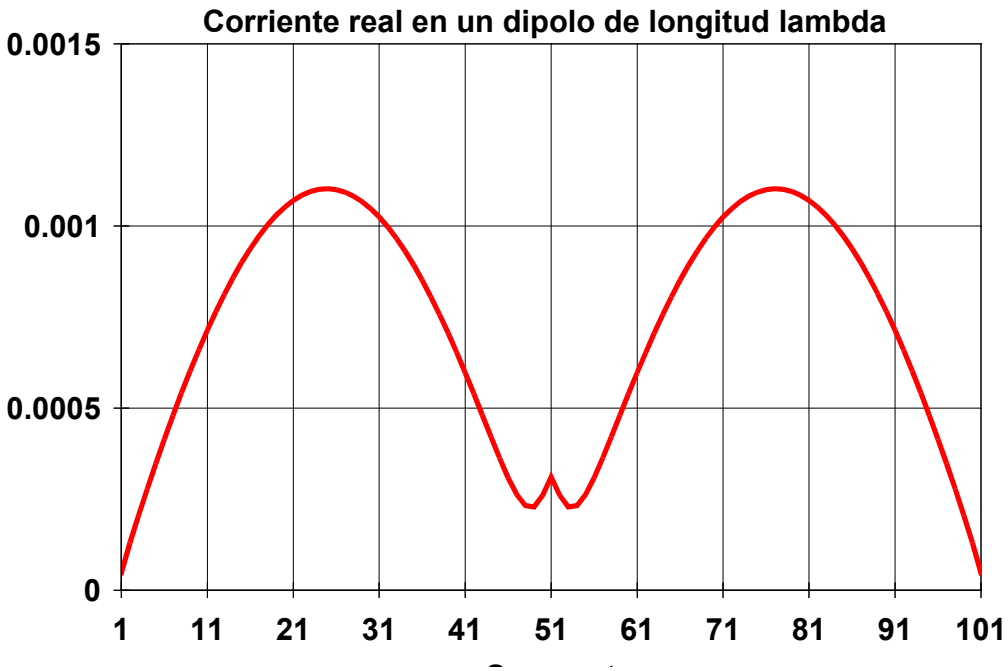
El método de los momentos se basa en la descomposición de la antena en un gran número de dipolos elementales, calculando la impedancia mutua entre todos ellos y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante.

Como ejemplo se muestra la corriente en un dipolo de longitud total $2H=\lambda$, obtenida mediante dicho método.

El caso indicado se ha resuelto a partir de la subdivisión en 101 segmentos (funciones base).

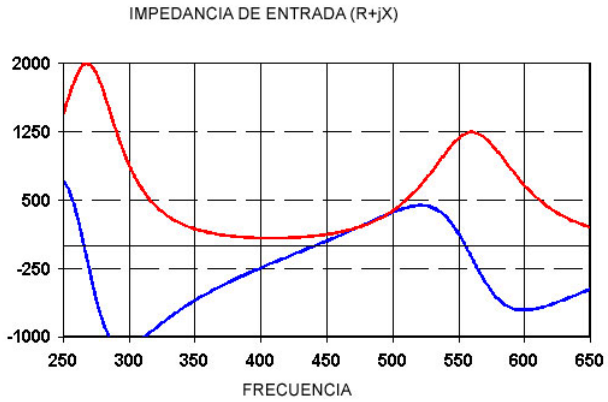
La distribución de corrientes de los dipolos de longitudes múltiplos de una longitud de onda no llega a tener un nulo en la entrada.

La impedancia de entrada obtenida ha sido de $2356+j2194\Omega$, como se puede observar es un valor elevado, pero no infinito.

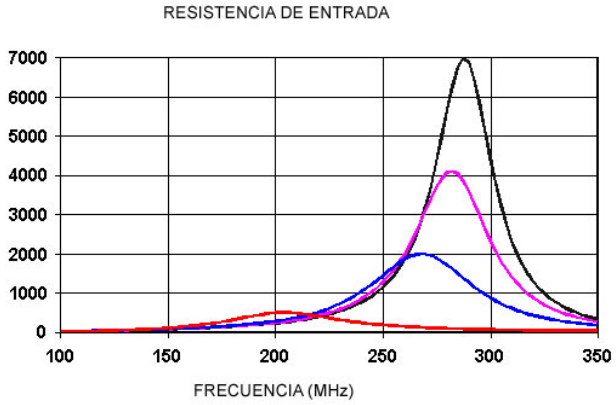


© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

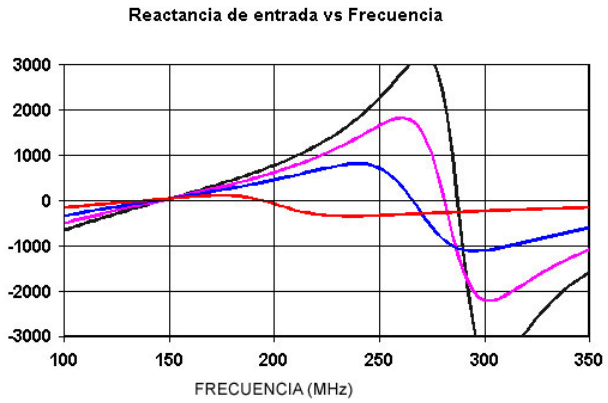
Las curvas correspondientes a las impedancia, se muestran en las siguientes gráficas.



Impedancia de un dipolo de 1 m de longitud y radio a=0.001 m. en función de la frecuencia..



Resistencia de entrada de un dipolo de 1 m de longitud para distintos radios de dipolo a= 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001 m.



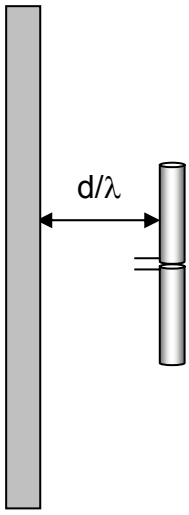
Reactancia de entrada de un dipolo de 1 m de longitud para distintos radios de dipolo a= 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001 m.

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Efecto de los planos de masa en la impedancia

Impedancia de dipolos paralelos al plano de masa

Un dipolo, paralelo a un plano de masa se puede analizar, teniendo en cuenta que la imagen del dipolo tiene corrientes en sentido contrario.



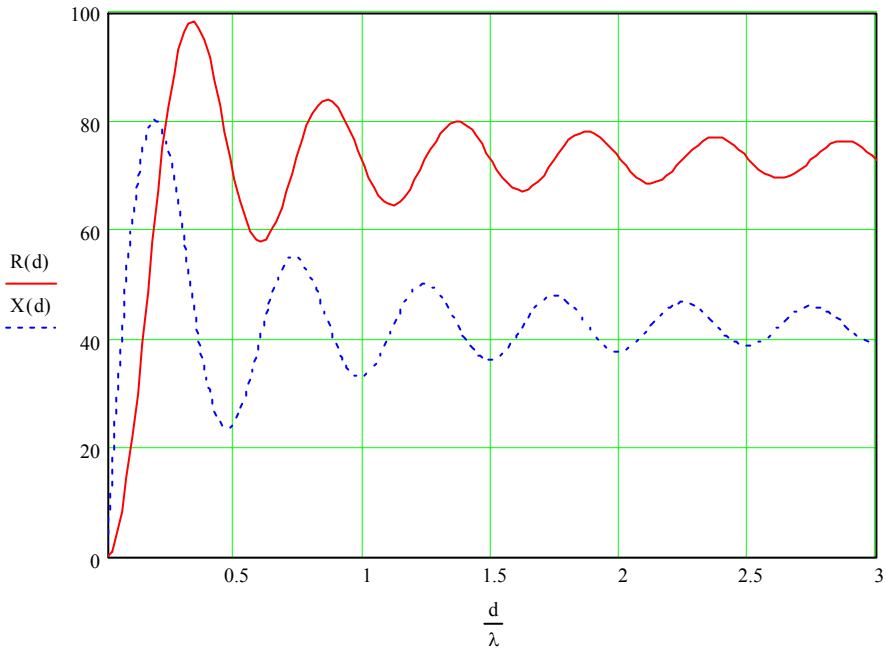
Por lo tanto

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12}$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22}$$

$$I_2 = -I_1$$
$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{21} = I_1 \left(z_{11} - z_{21} \right)$$
$$\frac{V_1}{I_1} = \left(z_{11} - z_{21} \right)$$

La impedancia de entrada del dipolo depende de la separación entre el dipolo y la imagen, que es 2d.

$$Z = \left(z_{11} - z_{21} \left(2d \right) \right)$$

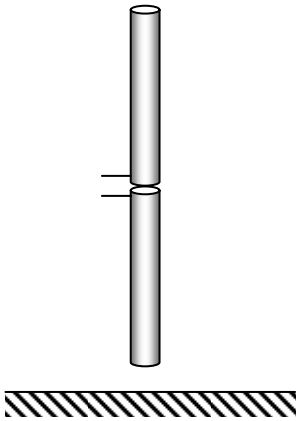


© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Se observa que la impedancia es cero para d=0, la tendencia asintótica es la impedancia del dipolo aislado.

Impedancia de dipolos perpendiculares a un plano de masa

Este caso es similar al anterior, pero con la corriente de la imagen positiva



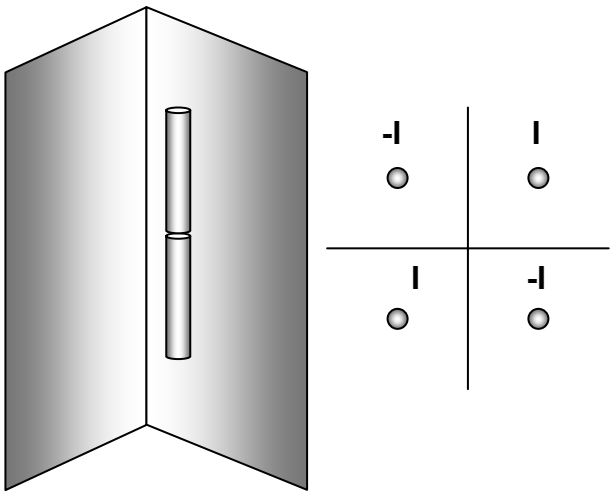
$$I_1 = I_2$$
$$V_1 = (z_{11} + z_{12}) I_1$$
$$Z_i = (z_{11} + z_{12})$$

La influencia del plano de masa es inferior, dado que el acoplo mutuo entre dipolos colineales es menor que para los paralelos.

Impedancia de dipolos en reflectores diédricos

Un dipolo, situado en el interior de un diedro de 90º mejora sus características de radiación. Para analizar la impedancia de entrada deben tenerse en cuenta el efecto de las imágenes. En la figura se muestran el dipolo frente al diedro y las tres imágenes, con corriente positivas y negativas.

La expresión para la impedancia de entrada se puede calcular a partir de la matriz de impedancias de los cuatro dipolos



$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12} + I_3 z_{13} + I_4 z_{14}$$
$$I_4 = I_2 = -I_1 = -I_3$$
$$V_1 = I_1 (z_{11} - z_{12} + z_{13} - z_{14})$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

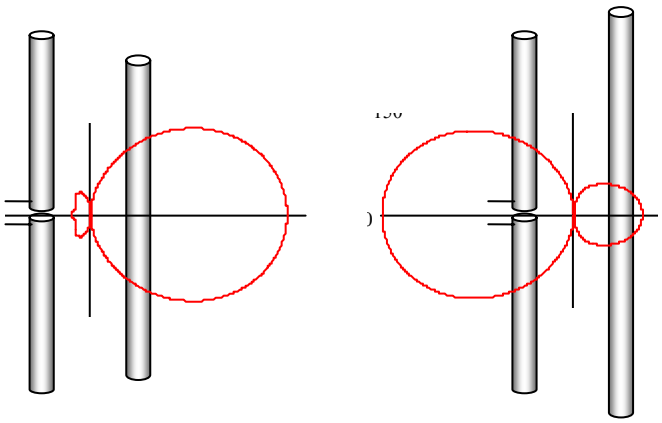
Antenas Yagi

La Antena Yagi debe su nombre a H. Yagi, que publicó los resultados de S. Uda, (Japón, 1926).

Se trata de un diseño muy simple, basado en los efectos de acoplamiento mutuo. En su configuración más simple consta de dos elementos, uno de ellos alimentado y el otro cortocircuitado.

Cuando el elemento parásito es más corto se denomina director, y cuando es más largo reflector. Los diagramas de radiación en el plano E, muestran comportamientos como en la figura.

Se pueden realizar diseños más complejos incluyendo un mayor número de reflectores, o de directores.



El análisis de impedancias se puede realizar a partir de la matriz de parámetros z

$$V_1 = I_1 z_{11} + I_2 z_{12}$$
$$V_2 = I_1 z_{21} + I_2 z_{22}$$

La relación entre las corrientes de los elementos activo y parásitos se puede controlar acortando o alargando el elemento parásito, que equivale a la modificación de z_{22}. La distancia de separación afecta sobre todo al valor de z_{21}

$$V_2 = 0$$
$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}$$
$$Z = z_{11} - z_{12}\frac{z_{21}}{z_{22}}$$

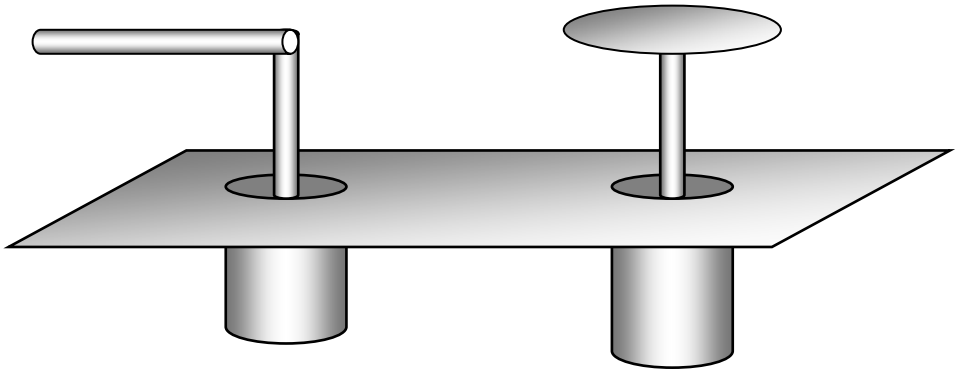
© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Antenas cargadas

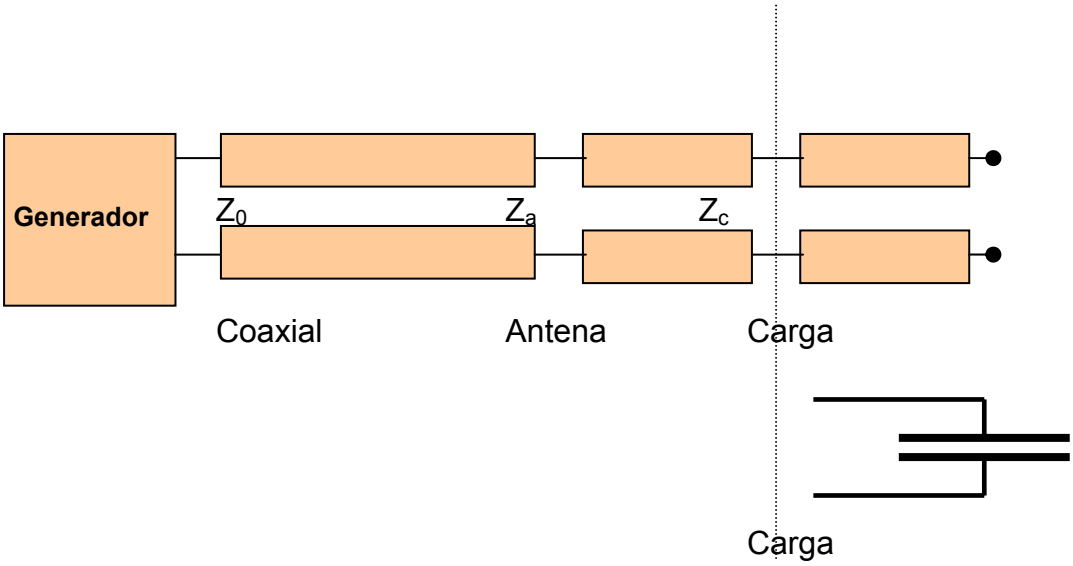
Las antenas tipo monopolo o dipolo se les pueden añadir elementos adicionales que tengan un comportamiento similar a un condensador o una bobina, ya sea en la base de la antena, para mejorar la adaptación o en los propios elementos radiantes, mejorando la forma de la distribución de corrientes o la resistencia de radiación.

Las líneas de transmisión también se utilizan como elementos reactivos. Dichas líneas pueden estar en circuito abierto o cortocircuito. En función de su longitud pueden tener comportamiento inductivo o capacitivo.

En la figura se muestran dos ejemplos de antenas con con carga capacitiva

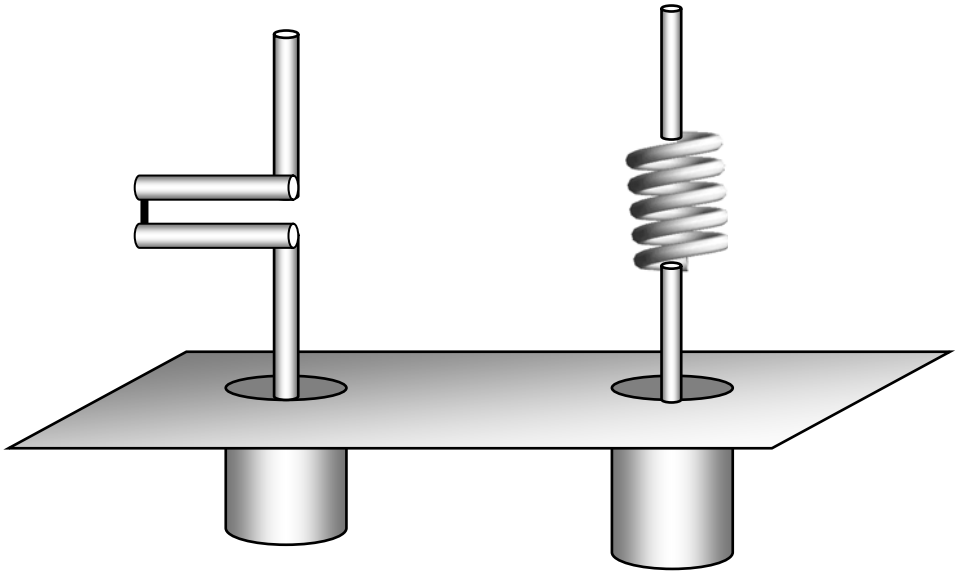


El circuito equivalente para estas antenas es una línea de transmisión, que modela el coaxial, una segunda línea para la antena y una capacidad terminal o una tercera línea de transmisión para el efecto reactivo.

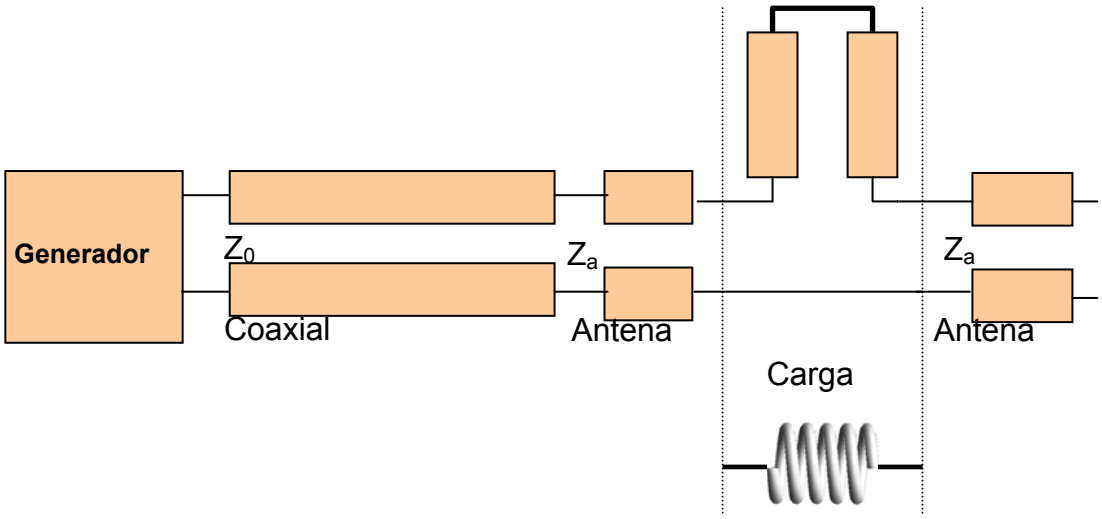


© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia

Las antenas también pueden incorporar cargas inductivas, concentradas o distribuidas. En la figura se muestran varios ejemplos de este tipo de cargas.



El circuito equivalente es



© Miguel Ferrando, Alejandro Valero. Dep. Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia