

## Dipolo elemental

---

Un dipolo elemental es un elemento de corriente de longitud  $h$ , recorrido por una corriente uniforme, cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda.

La mayor parte de las antenas a frecuencias inferiores a 1 MHz se comportan como dipolos elementales, dado que a esa frecuencia la longitud de onda es de 300 m.

## Cargas y corrientes

La distribución de cargas en un dipolo se pueden obtener a partir de la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega\rho = 0$$

La ecuación de continuidad en forma integral, aplicando el teorema de la divergencia es

$$\iint_{s'} \vec{J} d\vec{s}' + j\omega \iiint_{v'} \rho(\vec{r}') dv' = 0$$

Aplicando dicha ecuación a un elemento de corriente se observa que para cualquier punto del dipolo la corriente que entra en un volumen infinitesimal es igual a la corriente que sale, por lo tanto la carga acumulada es cero, a excepción de los extremos superior e inferior, donde vale.

$$I + j\omega Q = 0$$

$$Q = -\frac{I}{j\omega} = j\frac{I}{\omega}$$

Las cargas varían sinusoidalmente, estando desfasadas 90 grados con respecto a la corriente. En la antena se producen oscilaciones de corrientes positivas y negativas, con acumulación de carga en los extremos. Para que se pueda producir dicha acumulación es necesario que exista algún elemento capacitivo (esfera, placa metálica, etc). Hertz utilizó en sus primeros experimentos un dipolo con placas cuadradas en los extremos.

## Potencial vector

El potencial vector de un hilo de corriente se puede calcular de forma exacta como

$$\vec{A} = \mu \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dV'$$

$$\vec{A} = \hat{z} \mu \int_{z'} I(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz'$$

Si se cumple que la distancia  $R$  es mucho mayor que las dimensiones del dipolo  $R \gg h$ , se pueden utilizar las aproximaciones a grandes distancias

$$\hat{R} \simeq \hat{r}$$

$$R \simeq r - \hat{r} \cdot \vec{z}' = r - z' \cos \theta$$

El potencial vector es paralelo a la dirección de las corrientes y se puede escribir como el producto de una onda esférica por el vector de radiación del dipolo elemental

$$A_z = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{z'} I(z') e^{jk_z z'} dz'$$

$$A_z = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} I h = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} N_z$$

Para un dipolo elemental de dimensiones muy pequeñas comparadas con la longitud de onda, los desfases son prácticamente despreciables, y el vector de radiación es el producto de la corriente por la dimensión

$$\vec{N} = \hat{z} I h$$

## Campos del dipolo elemental

Para el cálculo de los campos radiados es conveniente obtener previamente las componentes del vector de radiación.

$$\begin{aligned}N_r &= \vec{N} \cdot \hat{r} = N_z \cos \theta \\N_\theta &= \vec{N} \cdot \hat{\theta} = -N_z \sin \theta \\N_\phi &= \vec{N} \cdot \hat{\phi} = 0\end{aligned}$$

El potencial vector se puede expresar en coordenadas esféricas como

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} (N_r \hat{r} + N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi})$$

Los campos magnéticos del dipolo elemental, válidos a distancia  $r \gg h$  se pueden calcular a partir de la definición del potencial vector.

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$$

Realizando los cálculos en coordenadas esféricas, teniendo en cuenta la simetría de revolución del problema, se obtiene el campo magnético, que tiene tan sólo una componente.

$$H_\phi = Ih \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta$$

Para calcular el campo eléctrico se puede utilizar la Ley de Ampère en el espacio libre, donde las corrientes son cero.

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \vec{H} - \vec{J})$$

Los campos eléctricos del dipolo elemental tienen dos componentes

$$\begin{aligned}E_r &= Ih \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{2\eta}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon r^3} \right) \cos \theta \\E_\theta &= Ih \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{j\omega\mu}{r} + \frac{\eta}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right) \sin \theta\end{aligned}$$

## Campos inducidos por el dipolo elemental

Los campos magnéticos inducidos son los que tienen una variación inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

$$H_{\phi}^i = Ih \frac{e^{-jkr}}{4\pi r^2} \sin \theta$$

La anterior expresión se puede identificar con la Ley de Biot y Savart para un elemento de corriente  $I$  de longitud  $h$ , con un término de desfase adicional

Los campos eléctricos inducidos son los mismos que los producidos por un dipolo eléctrico de carga  $Q$  y momento dipolar  $Qh$ . Al variar las cargas con el tiempo aparece un término de desfase.

$$E_r^i = \frac{Ih}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{j\omega\epsilon r^3} e^{-jkr} = Qh \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon r^3} e^{-jkr}$$

$$E_{\theta}^i = \frac{Ih}{4\pi} \frac{\sin \theta}{j\omega\epsilon r^3} e^{-jkr} = Qh \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon r^3} e^{-jkr}$$

## Campos radiados

Los campos radiados por el dipolo elemental son los que decrecen proporcionalmente a la distancia, como  $r^{-1}$ .

$$E_{\theta} = j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} Ih \sin \theta$$

$$H_{\phi} = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} Ih \sin \theta$$

Las expresiones completas de los campos incluyen términos que varían como  $1/r$ ,  $1/r^2$ ,  $1/r^3$ .

Los términos que varían como  $1/r^2$  hay que tenerlos en cuenta en la región de transición entre los campos inducidos y los campos radiados.

Los campos radiados se hubieran podido obtener de una forma mucho más simple utilizando las expresiones aproximadas.

El potencial vector se obtendría de forma similar

$$A_z = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} I h$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta$$

Los campos radiados se obtienen a partir

$$E_\theta = -j\omega A_\theta$$

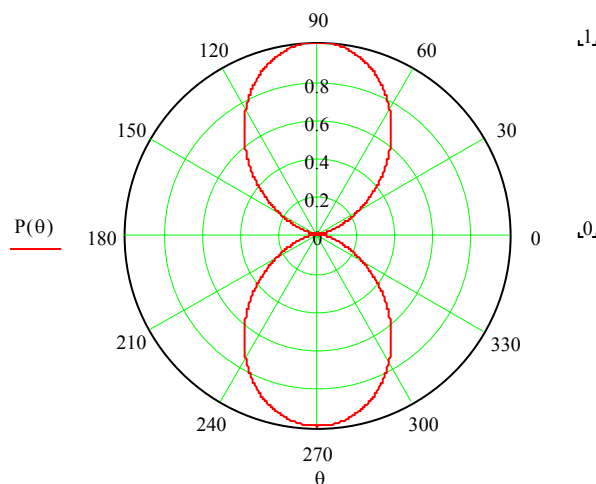
$$H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}$$

## Densidad de potencia radiada

La densidad de potencia radiada se calcula a partir de los campos eléctricos y magnéticos radiados.

$$P = \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \hat{r} \left( \frac{I h}{4\pi r} \right)^2 \omega \mu k \sin^2 \theta$$

El diagrama de radiación es proporcional a

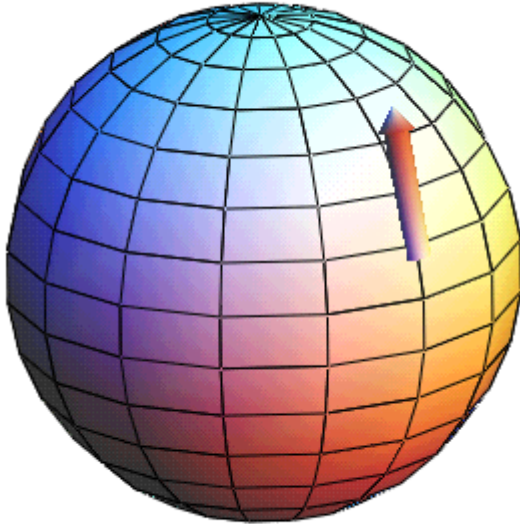


$$P = P_0 \sin^2 \theta$$

El diagrama es omnidireccional en el plano XY, y tiene un nulo en la dirección del eje z,

## Diagramas de campo

El campo eléctrico radiado está polarizado linealmente, la orientación del vector es según  $\hat{\theta}$ , si encerramos al dipolo en una esfera, suponiendo orientación, z el campo seguiría los meridianos.



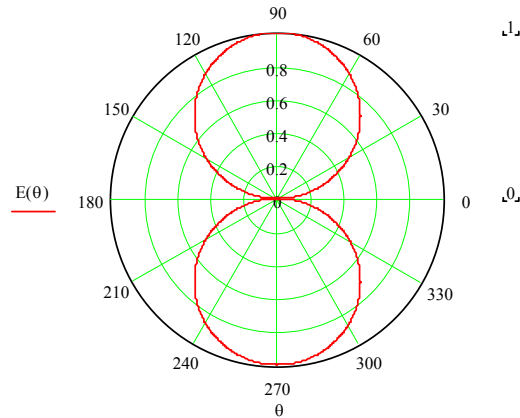
El plano E es el definido por la dirección de máxima radiación y el campo eléctrico en dicha dirección. La normal a dicho plano es

$$\hat{\theta} \times \hat{r}$$

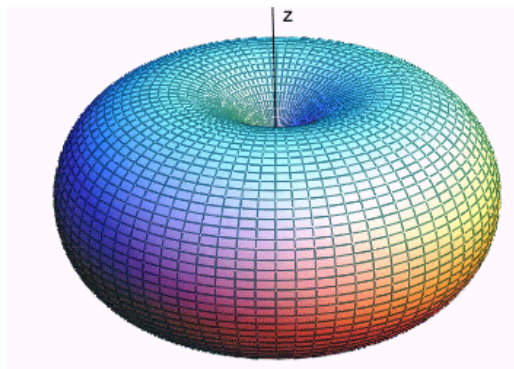
Por lo tanto el plano E es cualquier plano que contiene al eje z, por ejemplo el XZ o el YZ. En éste caso la definición del plano E no es única, ya que el problema tiene simetría de revolución. Cualquier corte  $\phi = cte$  se podría definir como plano E. Los cortes en la esfera serían planos que incluyesen a los dos polos.

El plano H es el definido por la dirección de máxima radiación y el campo magnético en dicha dirección. Para el dipolo elemental es el plano XY. En la esfera sería el plano ecuatorial.

El diagrama de campo es similar al de potencia, pero la variación es proporcional a



$$E = E_0 \sin \theta$$



La potencia total radiada por el dipolo se puede obtener integrando la densidad de potencia radiada en una superficie que encierre al dipolo elemental.

$$W_t = \iint_{S'} \vec{P} \cdot \vec{ds}' = \omega \mu k \left( \frac{Ih}{4\pi r} \right)^2 r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$W_t = I^2 \pi \frac{\eta}{2} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = I^2 \pi \frac{\eta}{2} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{4}{3}$$

## Resistencia de radiación

La resistencia de radiación se puede calcular a partir de la potencia total radiada y la corriente en la entrada

$$R_r = \frac{W_t}{I^2} = 80\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \Omega$$

Un hilo de corriente uniforme de 1 m de longitud tendría una resistencia de radiación de  $7,89 \Omega$  a 30 MHz y  $789 \Omega$  a 300 MHz.

Los valores obtenidos justifican la necesidad de trabajar con cables coaxiales a partir de unos pocos MHz.

## Directividad

La directividad se calcula como la relación entre la densidad de potencia radiada en la dirección del máximo y la densidad de potencia que radiaría una antena isotrópica con la misma potencia total radiada.

$$D = \frac{\frac{P_{\max}}{W_t}}{\frac{4\pi r^2}{\iint_{s'} \frac{P}{P_{\max}} d\Omega}} = \frac{4\pi}{\iint_{s'} \frac{P}{P_{\max}} d\Omega} = \frac{4\pi}{\iint_{s'} \sin^3 \theta d\theta d\phi} = 1.5$$

## Longitud efectiva

La longitud efectiva de un dipolo elemental se define la corriente que tendría un hilo uniforme, perpendicular a la dirección de propagación de las ondas, que cumpliera la condición

$$\vec{l} = \frac{1}{I} (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{N})) = \frac{1}{I} (\vec{N} - (\vec{N} \cdot \hat{r}) \hat{r})$$

En general, la expresión es:

$$\vec{l} = \frac{1}{I} (N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}) = -(h \sin \theta) \hat{\theta}$$

La longitud efectiva máxima es

$$\vec{l}_m = - \left( h \sin \frac{\pi}{2} \right) \hat{\theta} = h \hat{z}$$



## Espira elemental

---

Se denomina espira elemental a un conductor de forma arbitraria que se cierra sobre sí mismo y por el que circula una corriente uniforme. Las dimensiones deben ser pequeñas en términos de la longitud de onda.

### Vector de radiación

El vector de radiación de una espira elemental circular, situada en el plano  $XY$ , por el que circula una corriente uniforme  $I$ , se puede calcular a partir de la expresión.

$$\vec{N} = \int_0^{2\pi} I \hat{\phi}' e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} a d\phi'$$

El desfase con respecto al origen de coordenadas se puede calcular a partir de las expresiones de los dos vectores en coordenadas cartesianas, particularizadas en  $\theta = \pi/2$  y  $r = a$

$$\hat{r} \cdot \vec{r}' = a \sin \theta \cos(\phi - \phi')$$

Los campos radiados se pueden obtener a partir de las componentes del vector de radiación en coordenadas esféricas.

$$N_\theta = \vec{N} \cdot \hat{\theta}$$

$$N_\phi = \vec{N} \cdot \hat{\phi}$$

Realizando los productos vectoriales indicados, se obtienen las expresiones integrales siguientes

$$N_\theta = aI \cos \theta \int_0^{2\pi} e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \sin(\phi - \phi') d\phi'$$

$$N_\phi = aI \int_0^{2\pi} e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \cos(\phi - \phi') d\phi'$$

Si la espira es pequeña, las integrales se pueden simplificar, desarrollando el exponente en serie, como

$$e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi')} = 1 + jka \sin \theta \cos(\phi - \phi')$$

La contribución del primer término del desarrollo en serie a las integrales es nula. Calculando las integrales resulta

$$N_\theta = 0$$

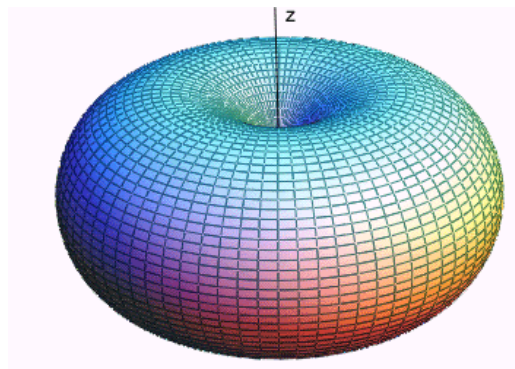
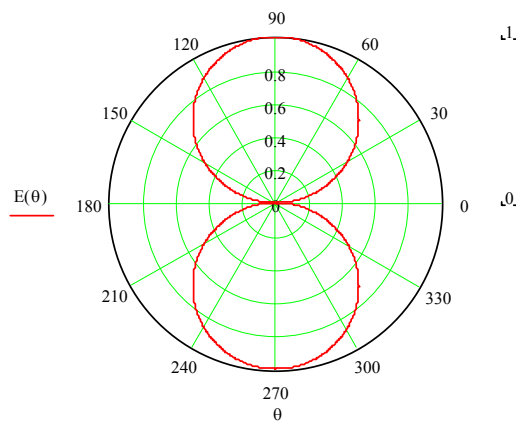
$$N_\phi = jka^2 I \sin \theta \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi - \phi') d\phi' = jk\pi a^2 I \sin \theta$$

### Campos radiados por una espira elemental

Los campos se calculan a partir de las expresiones aproximadas

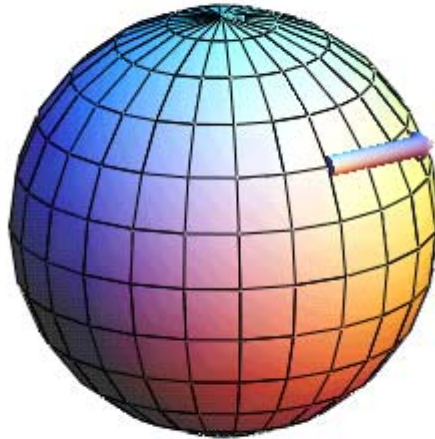
$$E_\theta = -j\omega A_\theta = 0$$

$$E_\phi = -j\omega A_\phi = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} jkI\pi a^2 \sin \theta$$



Los campos radiados tienen una componente, por lo que la polarización es lineal.

El diagrama es similar al del dipolo elemental, pero la polarización es ortogonal. Situando la espira en el plano ecuatorial de una esfera, el campo eléctrico está orientado en la dirección de los paralelos.



Se produce un nulo de radiación en la dirección perpendicular a la espira y el máximo está en el plano de la misma.

Para una espira situada en el plano XY, el plano E es el mismo, y el plano H es cualquier plano que contenga al eje z.

### Diagrama de radiación

El diagrama de radiación de potencia es proporcional a

$$P = P_0 \sin^2 \theta$$

La potencia radiada se obtiene integrando la densidad de potencia en una superficie que encierre a la antena.

$$W_t = \iint_s \frac{(E_\phi)^2}{\eta} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\pi\eta}{6} (ka)^4 I^2$$

### Resistencia de radiación

La resistencia de radiación resulta ser proporcional a la cuarta potencia de las dimensiones de la espira.

$$R_r = \frac{W_t}{I^2} = 20\pi^2 (ka)^4 \Omega$$

La espira es un radiador muy poco eficiente comparado con el dipolo, ya que éste último tiene una resistencia de radiación que es proporcional al cuadrado de sus dimensiones.

Esta diferencia es debida a que en las espiras tienen forma de contorno cerrado y para cada elemento de corriente existe otro en sentido contrario. La radiación se debe a las diferencias de fase de las ondas producidas por elementos de corriente opuestos.

### Directividad

La directividad coincide con la del dipolo elemental, ya que el diagrama de radiación es idéntico.

$$D = \frac{4\pi}{\iint_{\Omega} \sin^3 \theta d\theta d\phi} = 1.5$$

### Área efectiva

El área efectiva de una espira se puede calcular a partir de la relación con la Directividad

$$A_e = D \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{3\lambda^2}{8}$$

### Longitud efectiva

Aplicando la definición

$$\vec{l} = \frac{1}{I} (N_{\theta} \hat{\theta} + N_{\phi} \hat{\phi}) = (jk\pi a^2 \sin \theta) \hat{\phi}$$

## Dipolos y espiras elementales de formas arbitrarias

Los campos de un dipolo de forma arbitraria puede analizarse a partir del potencial vector

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}$$

$$\vec{N} = \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv'$$

En el caso de dipolos y espiras elementales, sus dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda y el término de fase de la integral se puede aproximar por

$$e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} \approx 1 + jk\hat{r} \cdot \vec{r}'$$

$$\vec{N} \approx \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}') (1 + jk\hat{r} \cdot \vec{r}') dv'$$

En los dipolos elementales es suficiente con considerar el primer término de la serie, y el vector de radiación es directamente la suma de las corrientes. En el caso de formas arbitrarias esto equivale a una corriente que una los extremos de la antena.

$$\vec{N} \approx \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}') dv'$$

En el caso de las espiras, al tratarse de formas cerradas la suma de las corrientes es cero y hay que tener en cuenta el siguiente término de la serie

$$\vec{N} \approx \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}') (1 + jk\hat{r} \cdot \vec{r}') dv' = \iiint_{v'} \vec{J}(\vec{r}') jk\hat{r} \cdot \vec{r}' dv'$$

Se puede demostrar que dicha expresión es equivalente, en el caso de espiras planas a una expresión en función del momento dipolar magnético.

$$\vec{N} = jk\vec{m} \times \hat{r}$$

$$\vec{m} = \iint_{s'} Id\hat{s}'$$

## Espiras con núcleo de ferrita

---

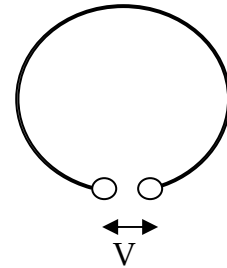
Para calcular la tensión en circuito abierto en una espira se puede utilizar la Ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

En forma integral

$$\iint_s \nabla \times \vec{E} d\vec{s} = -j\omega\mu \iint_s \vec{H} d\vec{s}$$

$$\oint_s \vec{E} d\vec{l} = -j\omega\mu \iint_s \vec{H} d\vec{s}$$



Calculando la circulación del campo eléctrico a lo largo de la espira se obtiene la tensión en circuito abierto, para una espira situada en el espacio libre

$$V = -j\omega\mu_0 HA$$

Si la espira tiene N vueltas, el área equivalente también se multiplica por N

$$V = (-j\omega\mu_0 HA) N$$

Si además se incluye un núcleo de ferrita

$$V = -j\omega\mu_0\mu_f HNA$$

La longitud efectiva de una espira con núcleo de ferrita se multiplica por un factor  $\mu_f N$  y la resistencia de Radiación por  $(\mu_f N)^2$

La Directividad y Área efectiva no cambian con respecto a la espira de una vuelta.

La eficiencia a 1MHz toma valores típicos de  $10^{-5}$  a  $10^{-6}$