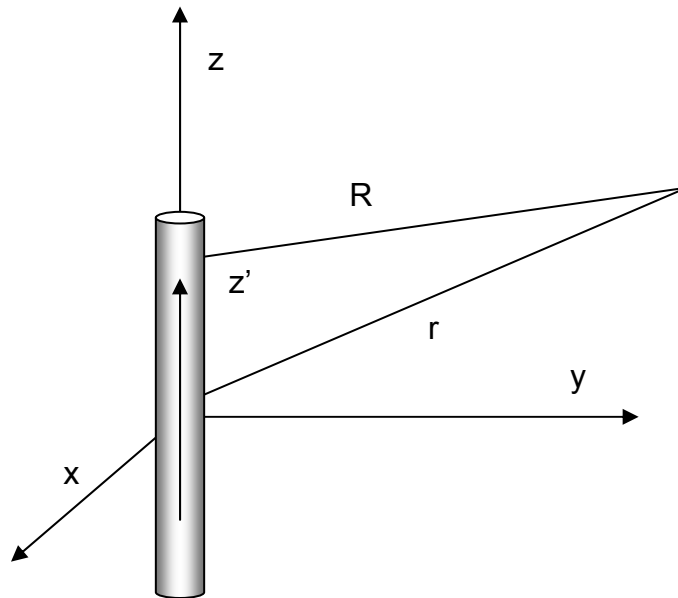


Fuente lineal uniforme

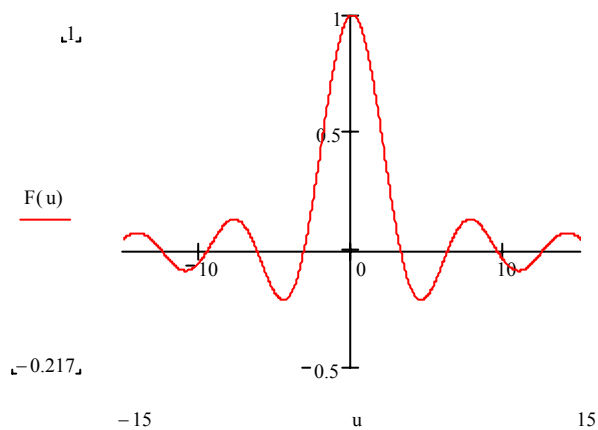


Se entiende por fuente lineal uniforme un hilo metálico, alineado a lo largo del eje z , por el que circulan una corriente constante

Vector de Radiación

Un hilo de corriente uniforme de longitud total h , situado en el eje z , tiene un vector de radiación dado por

$$\vec{N} = \hat{z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} I e^{jk_z z'} dz' = \hat{z} I h \frac{\sin\left(\frac{k_z h}{2}\right)}{\left(\frac{k_z h}{2}\right)} = \hat{z} I h \frac{\sin(u)}{u}$$



Si la corriente tiene una fase progresiva lineal, el vector de radiación tiene la misma forma, pero el máximo se encuentra en una dirección diferente.

$$I(z') = Ie^{-j\beta z'}$$

$$\vec{N} = \hat{z}Ih \frac{\sin u}{u}$$

$$u = \frac{(k_z - \beta)h}{2}$$

El máximo de radiación se tiene para $u=0$. La orientación espacial del máximo del vector de radiación depende de la fase progresiva.

$$\cos \theta_m = \frac{\beta}{k}$$

Campos radiados

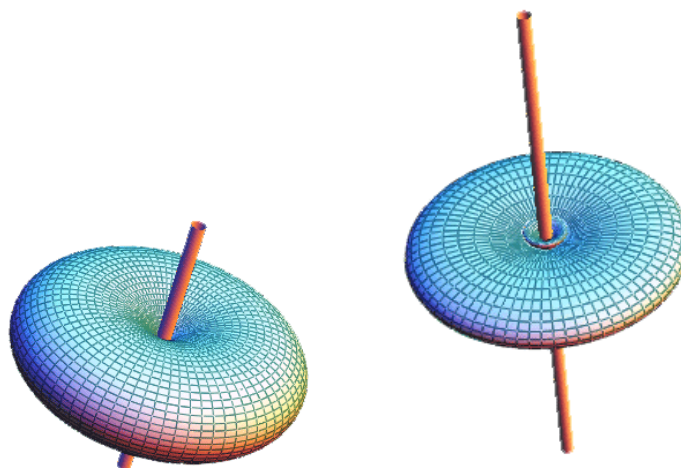
Los campos radiados estarán linealmente polarizados y se obtendrán como el producto del diagrama del dipolo elemental por el vector de radiación del hilo de corriente.

$$E_\theta = -j\omega A_\theta = j\omega A_z \sin \theta = j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} Ih \frac{\sin u}{u} \sin \theta$$

$$u = \frac{(k_z + \beta)h}{2}$$

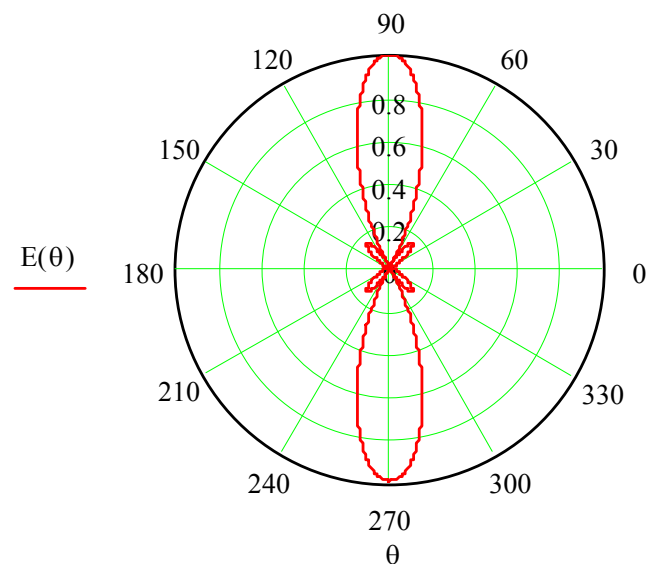
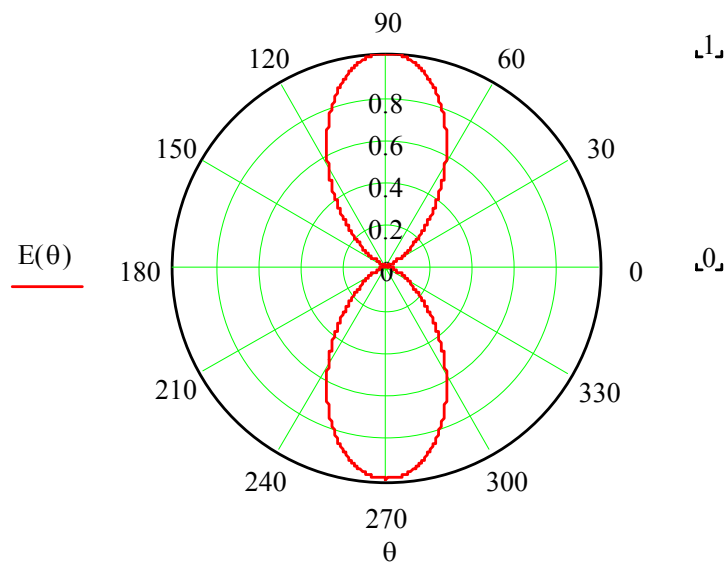
El hilo tiene siempre un nulo de radiación en la dirección del mismo.

Ejemplos de diagramas de radiación para hilos con fase constante son



Diagramas plano E

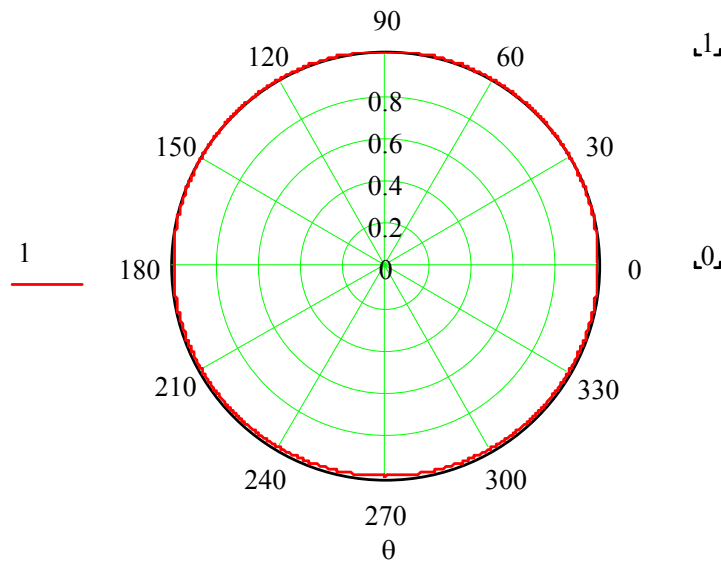
El plano E es el definido por la dirección de máxima radiación ($\theta=\pi/2$), y el campo eléctrico en dicha dirección (vector paralelo al eje z). Por lo tanto el plano E es cualquier plano $\phi=\text{cte}$.



Diagramas de radiación plano E para hilos uniformes de corriente longitudes λ y 2λ .

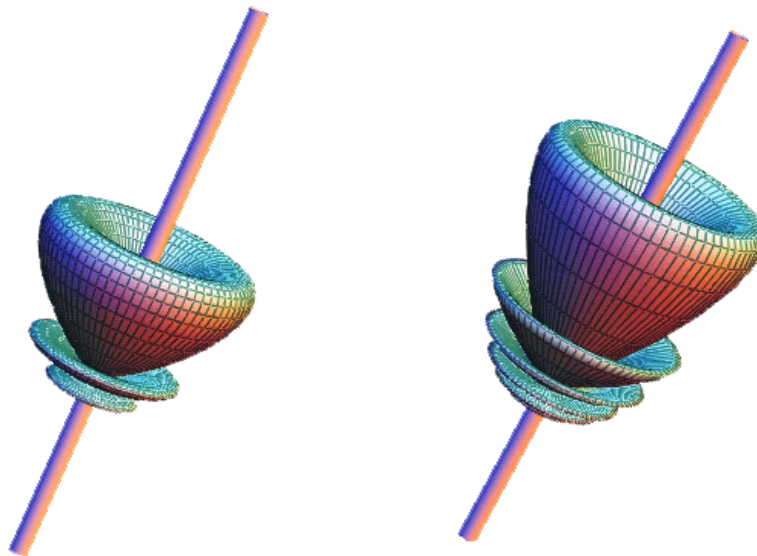
Diagramas plano H

El plano H está definido por la dirección de máxima radiación y la orientación del campo magnético en dicha dirección. Es el plano XY. El diagrama en dicho plano es omnidireccional



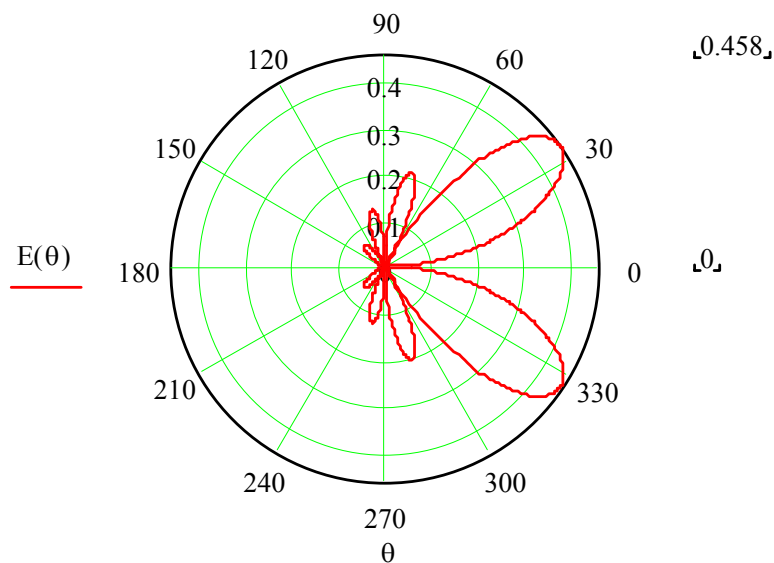
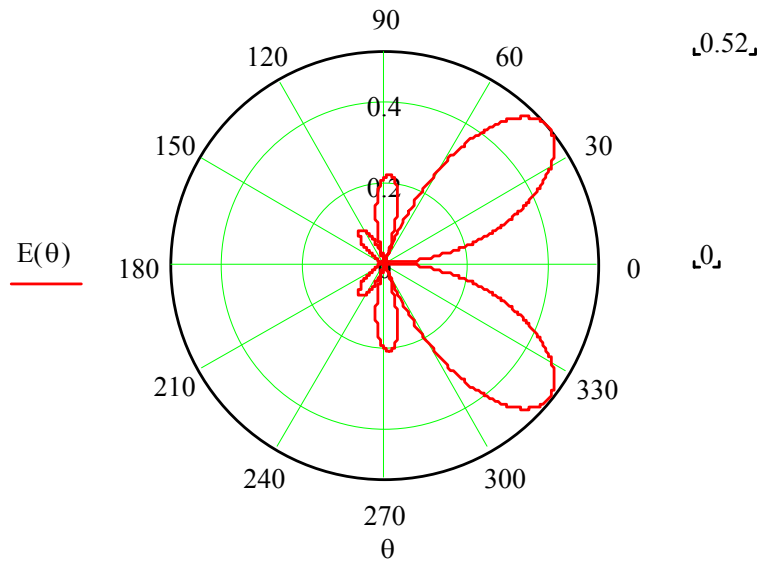
Diagramas de radiación de hilos de onda progresiva

En este caso el máximo no se encuentra en la dirección perpendicular al hilo, sino que aparece un efecto de inclinación del haz, tal y como se observa en las siguientes figuras, correspondientes a los diagramas de hilos de longitudes 1.5λ y 2λ .



Diagramas plano E (fase progresiva)

Los cortes de los diagramas anteriores en el plano E son



Ancho de haz

El ancho de haz a -3 dB para el hilo uniforme de corriente se encuentra resolviendo la ecuación trascendente.

$$\frac{\sin u_{-3}}{u_{-3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La solución es

$$u_{-3} = \pm 1.39$$

Se ha despreciado el efecto del diagrama de radiación del dipolo elemental, ya que se supone que el vector de radiación varía mucho más rápidamente con el ángulo.

Los puntos a -3 dB correspondientes en el diagrama de radiación se obtienen a partir de

$$u_{-3} = \frac{kh}{2} (\cos \theta_{-3} - \cos \theta_{\max})$$

$$\theta_{-3} = \cos^{-1} \left(\pm 0.443 \frac{\lambda}{h} + \cos \theta_{\max} \right)$$

El ancho de haz a -3 dB, en el caso de los dos puntos de caída a -3 dB estén dentro del margen visible será la diferencia entre ambos puntos, es decir.

$$A_{-3} = \left| \cos^{-1} \left(-0.443 \frac{\lambda}{h} + \cos \theta_{\max} \right) - \cos^{-1} \left(0.443 \frac{\lambda}{h} + \cos \theta_{\max} \right) \right|$$

En el caso de que la fuente lineal de corriente tenga fase uniforme, el máximo se producirá en la dirección perpendicular al hilo (dirección broadside).

$$u_{-3} = \frac{kh \cos \theta_{-3}}{2} = \frac{kh}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \Delta \theta_{-3} \right)$$

El ancho de haz se obtendrá como

$$A_{-3} = 2 \sin^{-1} \left(0.443 \frac{\lambda}{h} \right)$$

$$A_{-3} = 0.886 \frac{\lambda}{h}$$

Relación de lóbulo principal a secundario

La posición de los lóbulos secundarios se obtiene a partir de los máximos del diagrama. Como valor aproximado se puede tomar un valor intermedio entre dos nulos. El máximo se obtiene en $u=0$, el primer nulo en $u=\pi$, y el segundo en $u=2\pi$. Entre ambos se obtendrá un máximo secundario. El valor es

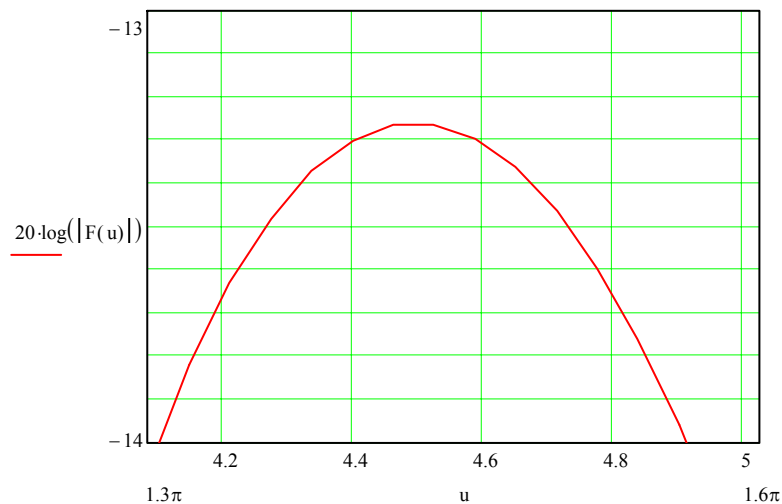
$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{2}{3\pi}$$

$$NLPS = 20 \log\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 13.46 \text{ dB}$$

La posición exacta del máximo secundario se puede obtener derivando la expresión del vector de radiación y resolviendo la ecuación resultante. El valor exacto que se obtiene (despreciando el diagrama del dipolo elemental) es

$$u = 1.43\pi$$

El valor exacto del nivel de lóbulo principal a secundario es 13.26 dB.



Distribuciones arbitrarias de corrientes

Si la distribución de corrientes no es uniforme, es necesario calcular la transformada de Fourier unidimensional.

Distribución	Transformada	Ancho haz -3 dB	NLPS
I_0	$I_0 l \frac{\sin(u)}{u}$	$\frac{50.6}{\left(\frac{l}{\lambda}\right)}$	-13.2
$I_1 \left(1 - \frac{2}{l} z' \right)$	$I_1 \frac{l}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2$	$\frac{73.4}{\left(\frac{l}{\lambda}\right)}$	-26.4
$I_2 \cos\left(\frac{\pi}{l}z'\right)$	$I_2 l \frac{\pi}{2} \frac{\cos(u)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - u^2}$	$\frac{68.8}{\left(\frac{l}{\lambda}\right)}$	-23.2
$I_3 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}z'\right)$	$I_3 \frac{l}{2} \frac{\sin(u)}{u} \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - u^2}\right)$	$\frac{83.2}{\left(\frac{l}{\lambda}\right)}$	-31.5

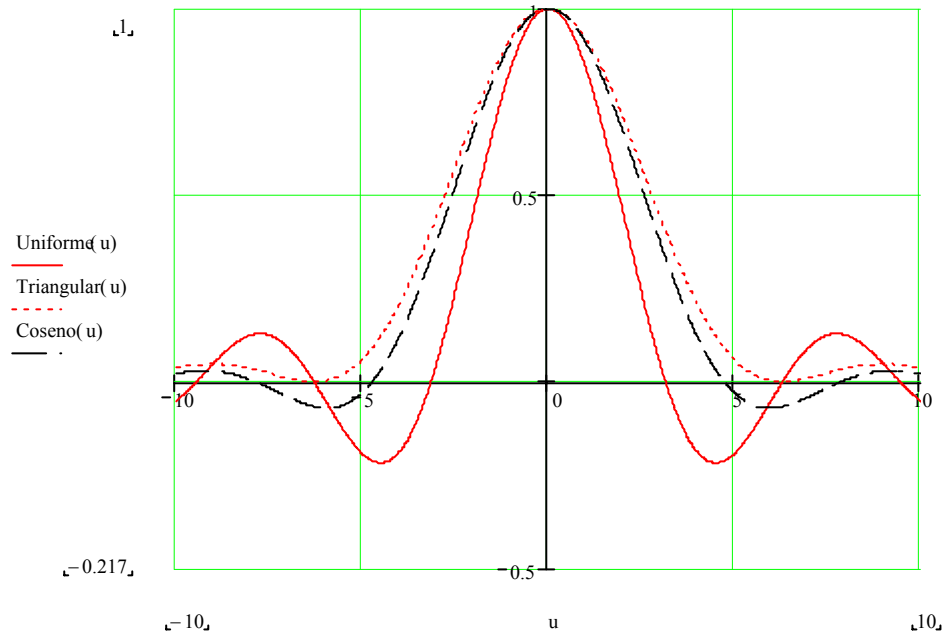
Se puede observar que si $I(z)$ es una función continua (triangular, coseno), mejora el nivel de lóbulo principal a secundario.

Si además hay continuidad de la derivada (función \cos^2) se mejora aún más dicho valor.

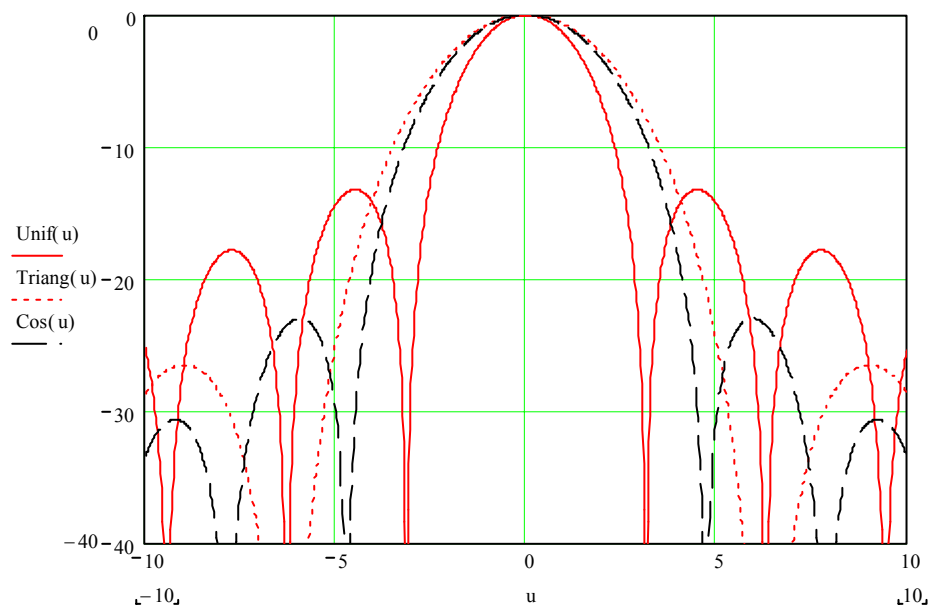
En cambio, el ancho de haz a -3dB va aumentando. Se puede ver que un empeoramiento del ancho de haz supone una mejora del nivel de lóbulo principal a secundario, y viceversa.

Transformadas de Fourier

Escala lineal

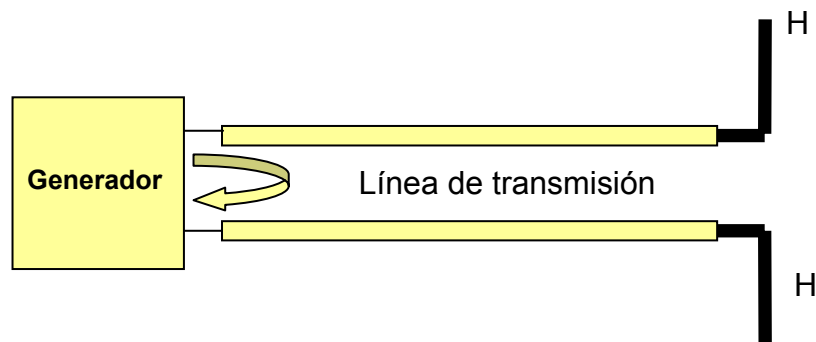


Escala logarítmica

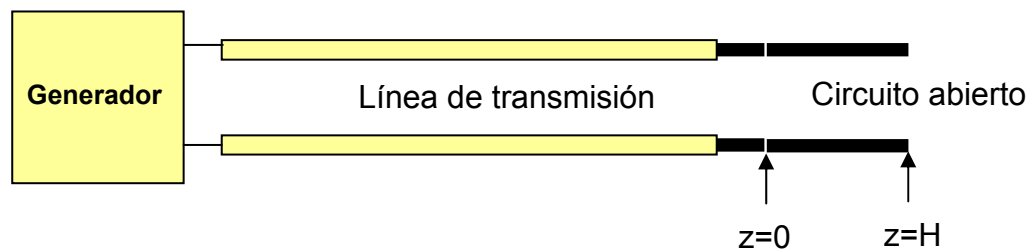


Radiación de dipolos

Distribución de corrientes



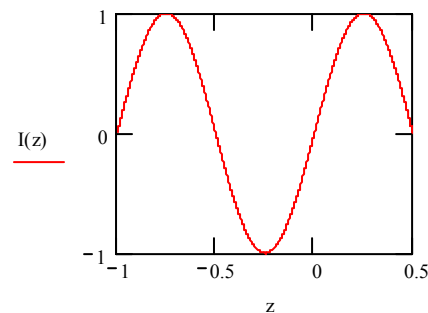
Supongamos un hilo de corriente situado sobre el eje z . Una antena se puede considerar como una línea de transmisión en circuito abierto. La distribución de corrientes se puede estudiar a partir de las ondas estacionarias que se forman en la línea. En el extremo abierto la condición de contorno es que la corriente sea nula, con lo que expresión de las corrientes será.



$$I(z') = I_m \sin(k(H - |z'|))$$

La corriente en el origen toma el valor

$$I(0) = I_m \sin(kH)$$



Vector de radiación

El vector de radiación se puede calcular a partir de la transformada de Fourier de la distribución de corrientes.

$$\vec{N} = \hat{z} \int_{-H}^H I(z') e^{jk_z z'} dz'$$

La distribución de corrientes es par, por lo que la transformada de Fourier de una función par se puede calcular como.

$$\vec{N} = 2\hat{z} \int_0^H I(z') \cos(k_z z') dz'$$

Sustituyendo la corriente por su expresión, resulta

$$\begin{aligned} \vec{N} &= 2\hat{z} I_m \int_0^H \sin(k(H-z')) \cos(k_z z') dz' \\ \vec{N} &= 2\hat{z} I_m \int_0^H (\sin(kH - kz' + k_z z') + \sin(kH - kz' - k_z z')) dz' \end{aligned}$$

Efectuando las integrales indicadas, se obtiene el vector de radiación

$$\vec{N} = -\hat{z} I_m \left(\frac{\cos k_z H - \cos kH}{-k + k_z} + \frac{\cos k_z H - \cos kH}{-k - k_z} \right)$$

La expresión final es

$$\vec{N} = \hat{z} 2k I_m \left(\frac{\cos k_z H - \cos kH}{k^2 - k_z^2} \right)$$

Si el dipolo estuviera orientado según el eje x, los resultados serían totalmente similares.

$$\vec{N} = \hat{x} 2k I_m \left(\frac{\cos k_x H - \cos kH}{k^2 - k_x^2} \right)$$

Para una orientación del dipolo sobre el eje y

$$\vec{N} = \hat{y} 2kI_m \left(\frac{\cos k_y H - \cos kH}{k^2 - k_y^2} \right)$$

Campos radiados

La relación entre la frecuencia espacial k_z y la dirección angular es

$$k_z = k \cos \theta$$

Por lo tanto el vector de radiación, para un dipolo orientado en la dirección del eje z es

$$N_z = 2I_m \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos kH}{k \sin^2 \theta}$$

El potencial vector se obtiene multiplicando el vector de radiación por un término de onda esférica

$$A_z = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} 2I_m \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos kH}{k \sin^2 \theta}$$

Los campos radiados se obtienen a partir de las componentes esféricas del potencial vector

$$A_\theta = -A_z \sin \theta$$

$$A_\phi = 0$$

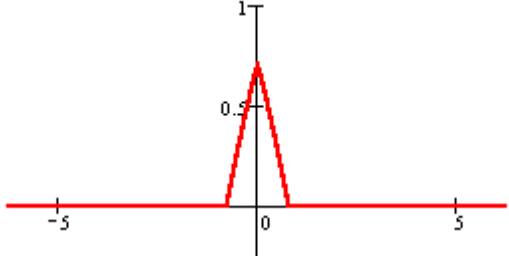
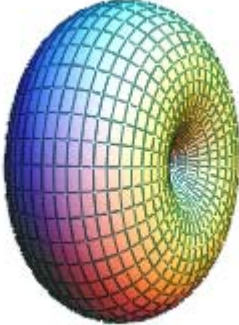
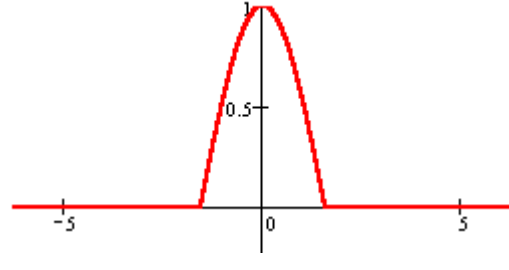
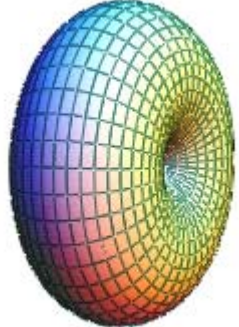
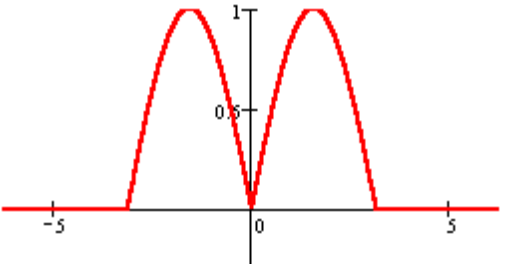
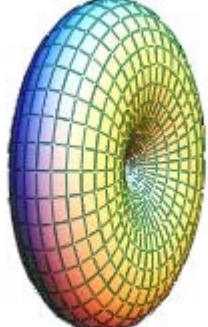
Los campos radiados lejanos, en la región de Fraunhofer serán

$$\vec{E} = -j\omega A_\theta \hat{\theta} = j\omega A_z \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{H} = \frac{E_\theta}{\eta} \hat{\phi}$$

La polarización de la antena es lineal, como en el dipolo elemental. El plano H es perpendicular al dipolo, y el plano E es un plano que contiene al dipolo.

Diagramas de radiación

	
<p>$H = \lambda/8$</p>	
	
<p>$H = \lambda/4$</p>	
	
<p>$H = \lambda/2$</p>	
<p>Corrientes</p>	<p>Diagrama 3D</p>

<p>$H=5\lambda/8$</p>	
<p>$H=3\lambda/2$</p>	
<p>$H=\lambda$</p>	
<p>Corrientes</p>	<p>Diagrama 3D</p>

Longitud efectiva

La longitud efectiva de un dipolo se puede calcular a partir del vector de radiación.

$$\vec{l}_{ef} = \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{N})}{I(0)} = \frac{\vec{N} - \vec{N} \cdot \hat{r} - \hat{r}}{I(0)} = \frac{\vec{N}_{rad}}{I(0)} = \frac{N_{\theta} \hat{\theta} + N_{\phi} \hat{\phi}}{I(0)}$$

$$\vec{l}_{ef} = -2 \frac{I_m}{I(0)} \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos kH}{k \sin \theta} \hat{\theta} = -2 \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos kH}{k \sin kH \sin \theta} \hat{\theta}$$

En la dirección normal al dipolo, la longitud efectiva se puede calcular como

$$\vec{l}_{ef} = -\frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{1 - \cos kH}{\sin kH} \right) \hat{\theta}$$

O bien directamente a partir del vector de radiación particularizado en dicha dirección

$$\vec{N} = \hat{z} \int_{-H}^H I(z') e^{jk_z z'} dz' = \hat{z} \int_{-H}^H I(z') dz'$$

$$\vec{l}_{ef} = \hat{z} \frac{1}{I(0)} \int_{-H}^H I(z') dz'$$

En un dipolo elemental, de longitud l , en su dirección normal

$$\vec{l}_{ef} = l \hat{z}$$

Si el dipolo tuviese distribución triangular

$$\vec{l}_{ef} = \frac{l}{2} \hat{z}$$

Para un dipolo de semibrazo $H = \lambda/4$

$$\vec{l}_{ef} = \frac{\lambda}{\pi} \hat{z}$$

Potencia radiada. Resistencia de radiación.

La densidad de potencia radiada es

$$P(\theta, \phi) = \frac{|E_\theta|^2}{\eta} = \frac{\eta I_m^2}{4\pi^2 r^2} \left(\frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos kH}{\sin \theta} \right)^2$$

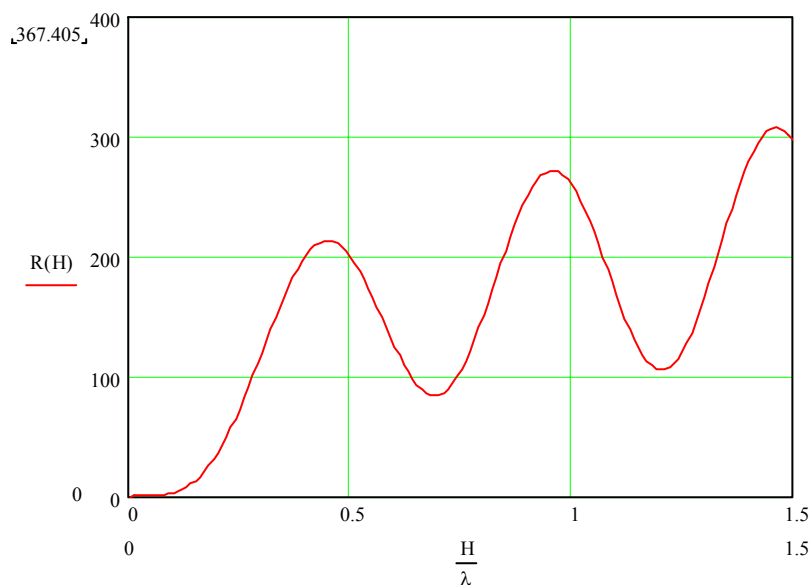
La potencia total radiada se obtiene integrando la expresión anterior en una esfera que encierre al dipolo

$$W_t = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P(\theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = I_m^2 \frac{\eta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\cos(kH \cos \theta) - \cos kH)^2}{\sin \theta} d\theta$$

La resistencia de radiación, referida al máximo de la distribución de corriente será.

$$R_r = \frac{W_t}{I_m^2} = 60 \int_0^\pi \frac{(\cos(kH \cos \theta) - \cos kH)^2}{\sin \theta} d\theta$$

La integral se puede calcular utilizando técnicas numéricas. Una gráfica de dicha Resistencia de Radiación es



La resistencia de radiación referida a la entrada es

$$R(0) = \frac{W_t}{I^2(0)}$$

La relación entre la corriente a la entrada y la corriente máxima se obtiene a partir de la expresión para la distribución de corrientes

$$I(0) = I_m \sin(kH)$$

La resistencia a la entrada será

$$R(0) = R_r \frac{I_m^2}{I^2(0)} = \frac{R_r}{\sin^2 kH}$$

Para los valores en los que se producen resonancias, la resistencia de entrada tomaría valores que según el modelo indicado debería ser infinito. En la práctica estos valores son altos ($k\Omega$), dado que el modelo utilizado para la distribución de corrientes no es totalmente correcto. Para calcular la distribución de corrientes habría que recurrir a procedimientos numéricos, como el método de los momentos.

Directividad

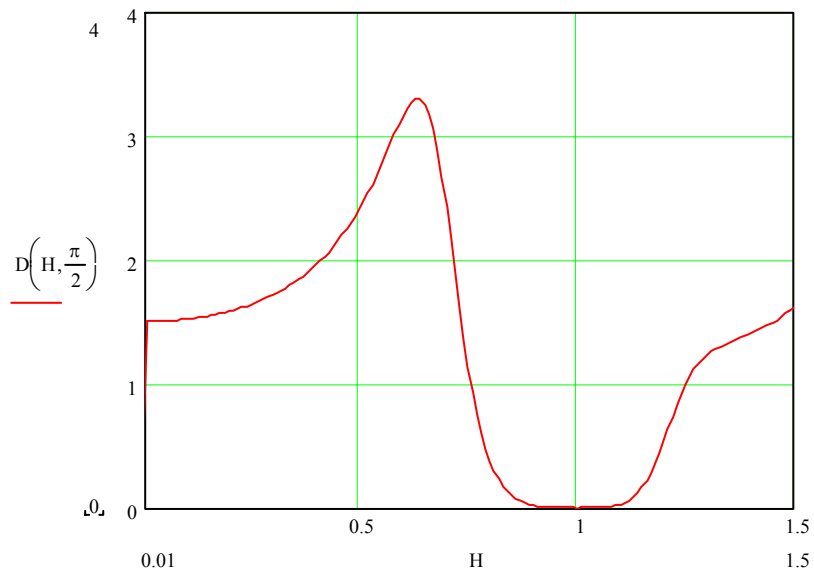
La directividad se puede calcular como

$$D(\theta) = \frac{P(\theta)}{\frac{W_t}{4\pi r^2}} = \frac{4\pi r^2 E^2(\theta)}{\eta I_m^2 R_r} = 120 \frac{(\cos(kH \cos \theta) - \cos kH)^2}{R_r \cdot \sin^2 \theta}$$

La Directividad en la dirección perpendicular al hilo de corriente es

$$D\left(\frac{\pi}{2}\right) = 120 \frac{(1 - \cos kH)^2}{R_r}$$

La directividad toma valores comprendidos entre 1.5 (dipolo corto, hasta valores máximos de 3.3 (dipolo de semibrazo $5\lambda/8$).



La Directividad máxima en dipolos largos se produce en la dirección donde el diagrama es máximo. Los saltos en la curva de Directividad están relacionados con la aparición de nuevos lóbulos de difracción.

El dipolo resonante

El dipolo de longitud total $2H = \frac{\lambda}{2}$ es un caso especial que merece ser estudiado por separado.

La distribución de corrientes, para un dipolo resonante alineado según el eje z es

$$I(z') = I_m \sin(k(H - |z'|)) = I_m \cos kz'$$

El vector de radiación se puede escribir como

$$\vec{N} = \hat{z} 2kI_m \left(\frac{\cos k_z H - \cos kH}{k^2 - k_z^2} \right) = \hat{z} 2I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{k \sin^2 \theta}$$

El campo eléctrico radiado es

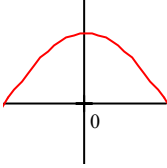
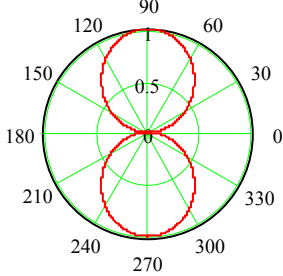

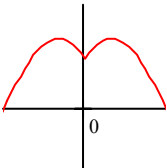
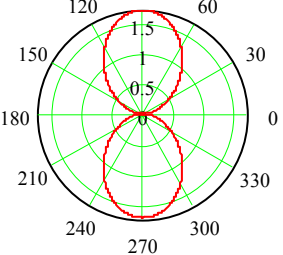

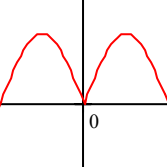
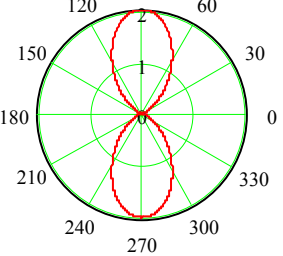

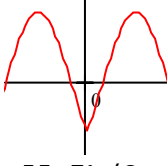
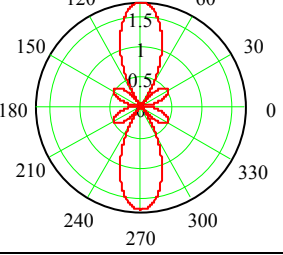

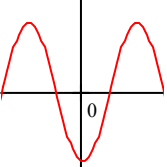
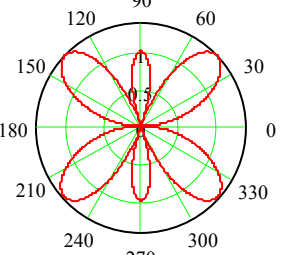
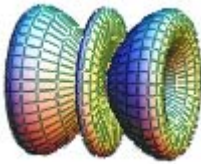
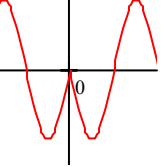
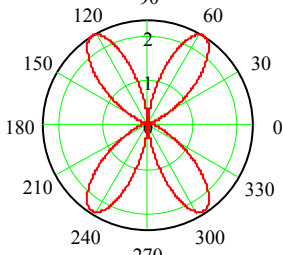

$$E_\theta = j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} 2I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{k \sin \theta} = j60I_m \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}$$

El campo máximo se produce en la dirección perpendicular al dipolo el valor de su módulo es

$$|E_\theta| = 60 \frac{I_m}{r}$$

La resistencia de radiación vale 73 ohmios y la directividad 1.64. Su longitud efectiva máxima es

$$l_{ef} = \frac{\lambda}{\pi}$$

TABLA COMPARATIVA DE DIPOLOS					
Corrientes	Corte Plano E	Diagrama	ancho	D	R _r
 <p>$H=\lambda/4$</p>			78°	1.64	73Ω
 <p>$H=3\lambda/8$</p>			62°	1.94	180Ω
 <p>$H=\lambda/2$</p>			47°	2.41	199Ω
 <p>$H=5\lambda/8$</p>			31°	3.33	105Ω
 <p>$H=3\lambda/4$</p>			32°	2.17	99.5Ω
 <p>$H=\lambda$</p>			27°	2.52	260Ω

Teoría de las imágenes

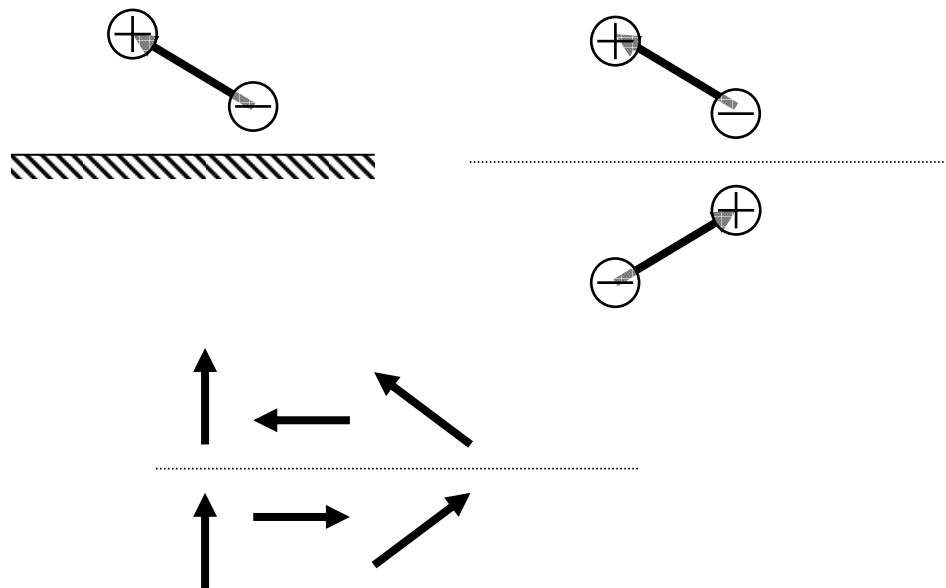
El efecto de las corrientes y cargas inducidas en planos de masa se puede analizar sustituyendo el plano de masa por las cargas y corrientes equivalentes, utilizando los resultados de estática, válidos asimismo en campos variables con el tiempo.

La imagen de una carga positiva frente a un plano de masa es una carga negativa situada simétricamente.

Utilizando la ecuación de continuidad, las corrientes están relacionadas con las cargas mediante

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega\rho = 0,$$

Una corriente elemental se puede sustituir por dos cargas en los extremos. En la gráfica se pueden ver diversos casos de corrientes y cargas



Las condiciones de contorno que se tienen que cumplir en el plano metálico son

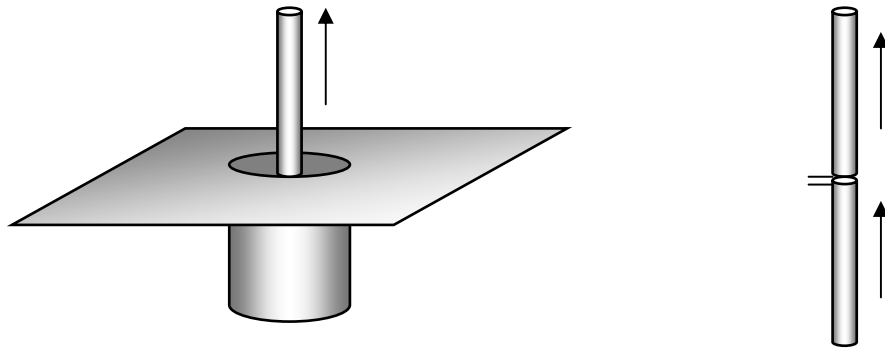
$$\vec{n} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H} = 0$$

Se puede comprobar que las imágenes de las corrientes y cargas se verifican dichas condiciones.

Monopolos

Los monopolos son antenas por hilos y planos de masa, alimentadas por una línea de transmisión. Utilizando la teoría de imágenes se demuestra que equivale a un dipolo.



Los monopolos tienen la misma corriente que los dipolos, los campos radiados son los mismos en el semiplano superior, mientras que el campo es cero en el semiplano inferior del monopolo.

La comparación entre los diversos parámetros de radiación es

Parámetro	Monopolo	Dipolo
Corriente	I	I
Tensión	V	$2V$
Potencia radiada	W	$2W$
Resistencia de radiación	$R_r / 2$	R_r
Impedancia	$Z/2$	Z
Directividad	$2D$	D
Área efectiva	$A/2$	A
Longitud efectiva	$l/2$	l

Otros ejemplos de monopolos, con cargas capacitivas son

