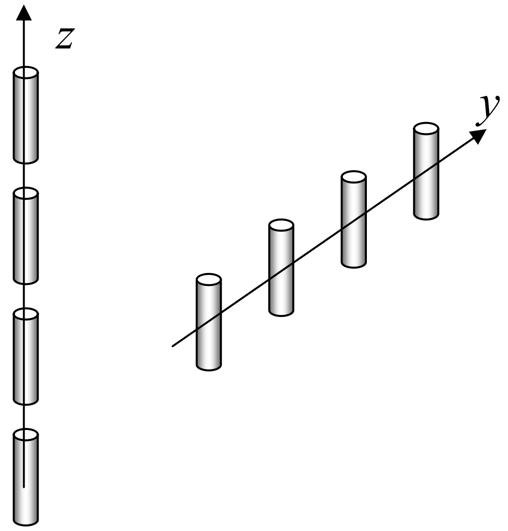
Agrupaciones de antenas

Un array es una antena compuesta por un número de radiadores idénticos ordenados regularmente y alimentados para obtener un diagrama de radiación predefinido.



Hay diferentes tipos de arrays. Los arrays lineales tienen los elementos dispuestos sobre una línea. Los arrays planos son agrupaciones bidimensionales cuyos elementos están sobre un plano. Los arrays conformados tienen las antenas sobre una superficie curva, como por ejemplo el fuselaje de un avión.

Los arrays tienen la ventaja de que se puede controlar la amplitud de las corrientes y la fase de cada elemento, modificando la forma del diagrama de radiación. Además se puede conseguir que los parámetros de antena dependan de la señal recibida a través de circuitos asociados a los elementos radiantes, como en el caso de las agrupaciones adaptativas.

Factor de array

El factor de array es el diagrama de radiación de una agrupación de elementos isotrópicos.

Cuando los diagramas de radiación de cada elemento del array son iguales y los elementos están orientados en la misma dirección del espacio, el diagrama de radiación de la agrupación se puede obtener como el producto del factor de array por el diagrama de radiación del elemento.

Interferencia de ondas

El array más simple es el de dos radiadores iguales, alimentados con la misma amplitud y la misma fase.

Ambos radiadores producen ondas esféricas que se sumarán de forma constructiva en determinadas direcciones, y se producirá cancelación en otras.

La amplitud total de la onda será proporcional a

$$\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}+\frac{e^{-jkR_2}}{R_2}$$

En el caso de que estemos suficientemente lejos de las fuentes, y suponiendo que el primer radiador se encuentra en el origen de coordenadas, la diferencia de caminos recorrida por ambas ondas será.

$$R_1 - R_2 = d\cos\theta$$

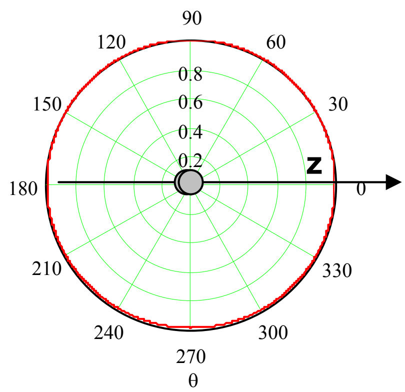
Se podrá escribir la amplitud total de la señal como el producto de una onda esférica por un factor de interferencia.

$$\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left(1+e^{jkd\cos\theta}\right)$$

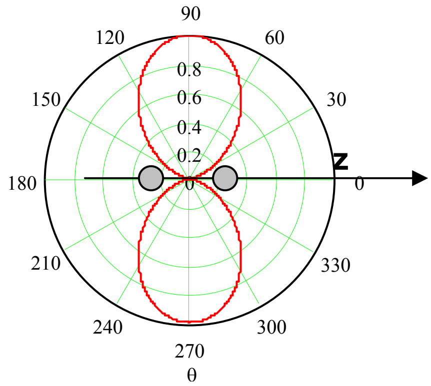
Se producirá interferencia constructiva cuando la diferencia de caminos sea un múltiplo entero de longitudes de onda, siendo la amplitud de la señal el doble.

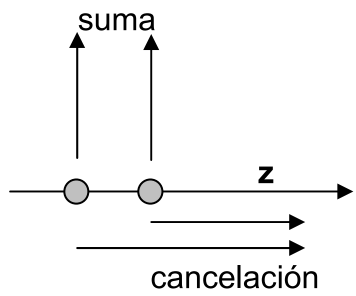
Cuando la diferencia de fase sea un múltiplo impar de π, la interferencia será destructiva.

Si la separación entre los dos radiadores es cero, no existirá ningún tipo de desfase, por lo que la señal se radiará isotrópicamente en todas las direcciones del espacio.

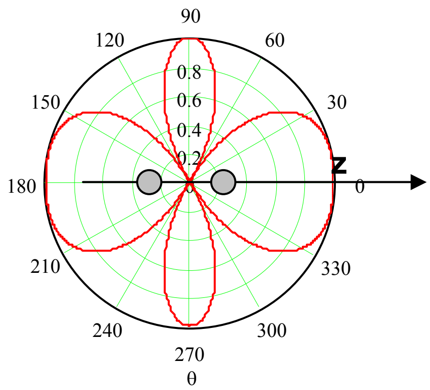


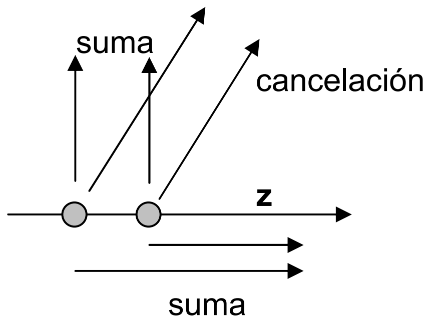
Si los dos elementos están separados una semilongitud de onda, se producirá un máximo en la dirección perpendicular a la recta que une sus posiciones, obteniendo un nulo de radiación en la dirección de dicho eje, ya que las señales se sumarán en oposición de fase.



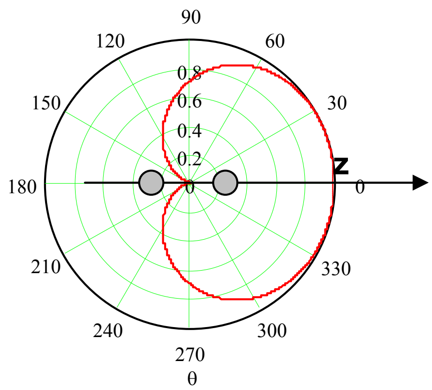


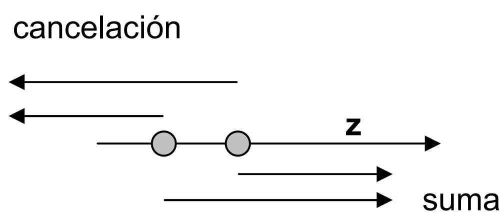
Si la separación entre los dos radiadores es de una longitud de onda se producirán máximos de radiación en las direcciones del eje y perpendiculares a él, produciéndose cancelación para un ángulo en el que ambas señales esté en oposición de fase, lo que sucede para la dirección que forma un ángulo de 60° con el eje de la agrupación.





Cuando la diferencia de fases es de $-\pi/4$ y la separación es $\lambda/4$, las ondas se suman en la dirección del eje z en fase, y en –z en oposición de fase.





Array de dos antenas

El vector de radiación de una antena se puede escribir como

$$\vec{N} = \iiint_{v'} \vec{J}\left(\vec{r}\,'\right) e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv'$$

Si la antena se desplaza a un nuevo punto, manteniendo su orientación, el vector de radiación vendrá dado por.

$$\vec{N}_1 = \iiint_{v'} \vec{J}\left(\vec{r}\,'-\vec{r}_1\right) e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv' = \vec{N}_0 e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}_1}$$

El vector de radiación es el mismo, con un término de fase adicional. Para una agrupación de dos antenas iguales, estando una de ellas situada en el origen, el vector de radiación del conjunto será.

$$\vec{N} = \vec{N}_0 \left(1 + e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}_1}\right)$$

El vector de radiación del conjunto es el producto del vector de radiación de la antena por el factor de array.

Si las corrientes son diferentes, con una relación de amplitudes A y una diferencia de fases

$$\frac{I_1}{I_0} = Ae^{j\alpha}$$

Las antenas están separadas una distancia d, el factor de array es

$$FA = 1 + e^{j\alpha} e^{jkd\cos\theta}$$

Podemos definir un nuevo ángulo eléctrico Ψ como la diferencia de fase entre las ondas producidas por los radiadores, debida a la diferencia de caminos y a la diferencia de fase de la alimentación.

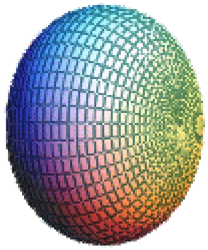
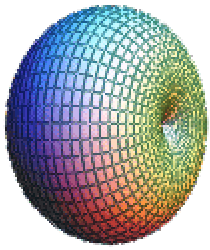
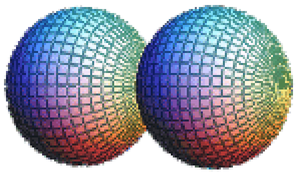
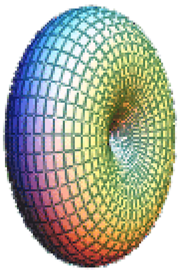
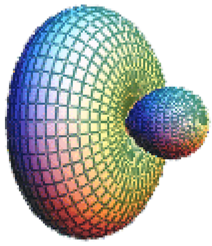
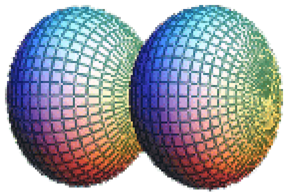
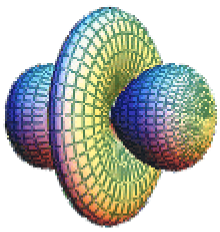
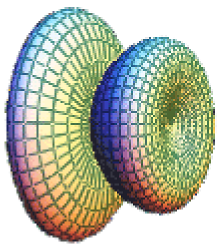
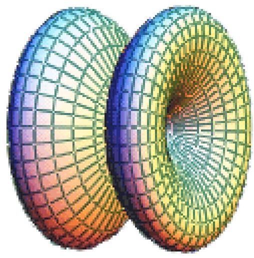
$$\psi_z = k_z d + \alpha$$

En el caso tener las corrientes iguales A=1, resulta que el módulo del factor de array es

$$\left|FA\right| = \left|1 + e^{j\Psi_z}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\Psi_z}{2}\right)\right|$$

Tabla comparativa de agrupaciones de 2 antenas

En la siguiente gráfica se comparan los diagramas tridimensionales de dos radiadores isotrópicos de la misma amplitud, en función de la separación d y de la diferencia de fases α.

d	$\alpha=0$	$\alpha=\pi/2$	$\alpha=\pi$
$\lambda/4$			
$\lambda/2$			
λ			

Agrupaciones lineales

En los arrays lineales las antenas están situadas sobre una misma línea. El factor de la agrupación se puede obtener como la suma de las corrientes multiplicadas por sus términos de retardo. Para una agrupación de N antenas equiespaciadas, con la primera de ellas situada en el origen de coordenadas se tiene el vector de radiación

$$\vec{N} = \vec{N}_0 \frac{1}{I_0}\left(I_0 + I_1 e^{jk_z d} + I_2 e^{jk_z 2d} + I_3 e^{jk_z 3d} + \ldots\right)$$

Las corrientes en general serán complejas, y las podemos escribir como el producto de un número complejo por un factor de desfase progresivo

$$I_n = a_n e^{jn\alpha} I_0$$

El vector de radiación se puede calcular como

$$\vec{N} = \vec{N}_0 \left(a_0 + a_1 e^{j(k_z d+\alpha)} + a_2 e^{j2(k_z d+\alpha)} + a_3 e^{j3(k_z d+\alpha)} + \ldots\right)$$

Se puede definir un ángulo eléctrico que tenga en cuenta el desfase progresivo y la diferencia de camino recorrido por las ondas

$$\psi_z = k_z d + \alpha$$

También se puede definir la variable compleja z, cuyo módulo es 1 y cuya fase corresponde a la fase de la señal (diferencia de caminos y red de alimentación). El factor de la agrupación se puede expresar como un polinomio complejo.

$$e^{j\psi_z} = z$$

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots.$$

$$p(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

Agrupaciones de tres antenas

El polinomio de la agrupación de tres antenas simétrica es de la forma

$$p(z)=1+az+z^2$$

o tomando como referencia el elemento central

$$p(z)=z^{-1}+a+z$$

Los ceros de la agrupación son

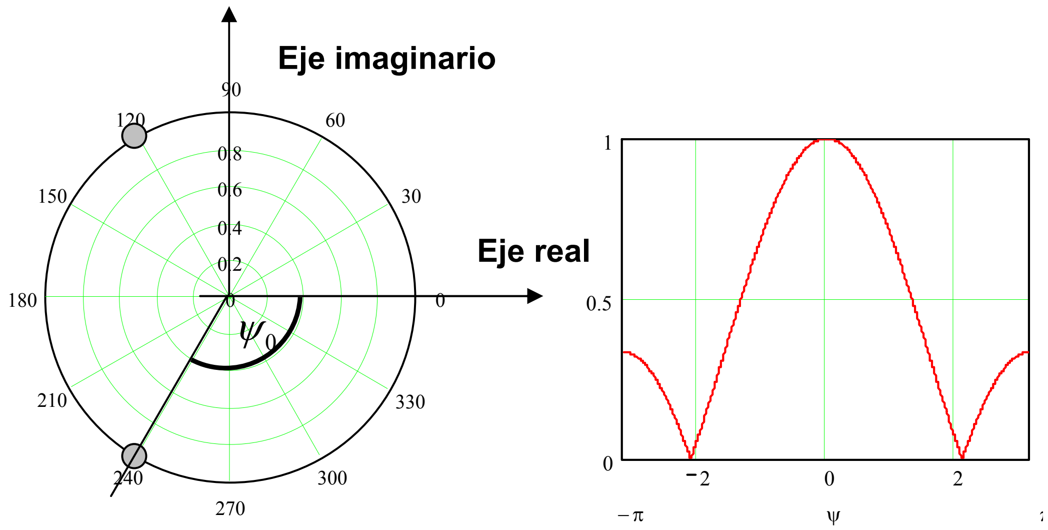
$$z_0=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

Las raíces serán reales si a≥2, y complejas si a<2, en este caso las raíces están sobre el círculo unidad. Las dos raíces son complejas conjugadas, y están situadas sobre el círculo unidad.

$$p(z)=1+az+z^2=\left(z-e^{j\psi_0}\right)\left(z-e^{-j\psi_0}\right)=1-2\cos\psi_0 z+z^2$$
$$a=-2\cos\psi_0$$

El factor de la agrupación es

$$FA(\psi)=e^{-j\psi}+a+e^{j\psi}=a+2\cos\psi$$

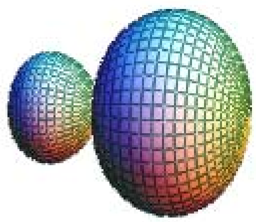
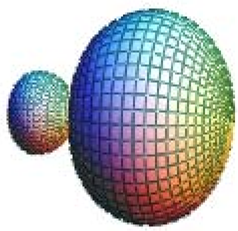
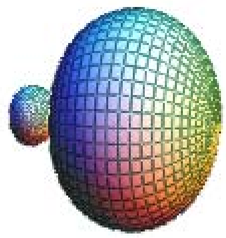
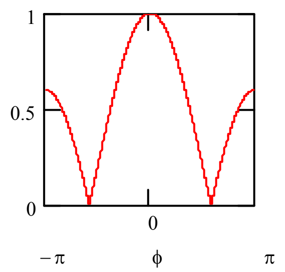
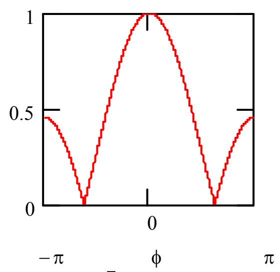
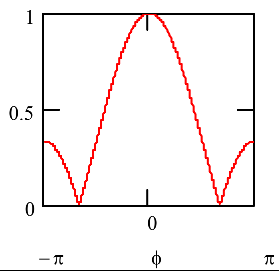


Se puede observar que el máximo se encuentra en z=0, ψ=0, mientras que el lóbulo secundario se encuentra en z=-1, $\psi=\pi$.

El nivel de lóbulo principal a secundario es $NLPS = \dfrac{2+a}{2-a}$

El valor de a permite ajustar tanto el ancho de haz entre ceros como el NLPS.

En la gráfica se muestran tres diagramas de radiación con tres antenas espaciadas d=λ/4 y con una diferencia de fase $\alpha=-\pi/2$. Los valores del parámetro a son 0.5,0.75 y 1.

a=0.5	a=0.75	a=1
		
		

Distribuciones de corriente

A continuación se va a estudiar con un cierto detalle las distribuciones de corrientes para una agrupación lineal de N elementos, de forma uniforme, triangular y binómica.

En las agrupaciones uniformes todas las antenas tienen la misma amplitud de corriente. El polinomio de la agrupación será

$$p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots.$$
$$p(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n$$

Ejemplos de distribuciones uniformes.

$$p(z) = 1 + z + z^2$$
$$p(z) = 1 + z + z^2 + z^3$$
$$p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$$
$$p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$$
$$p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$$

En una distribución de forma triangular los elementos crecen desde amplitud 1 hasta el máximo y luego decrecen. El número de antenas debe ser impar. Un polinomio de array triangular se puede escribir siempre como el cuadrado de un polinomio uniforme.

$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + 2z^{N-2} + z^{N-1} = \left(\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} z^n \right)^2$$

Ejemplos de distribuciones triangulares son las siguientes

$$p(z) = 1 + 2z + z^2 = (1 + z)^2$$
$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 2z^3 + z^4 = (1 + z + z^2)^2$$
$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 3z^4 + 2z^5 + z^6 = (1 + z + z^2 + z^3)^2$$

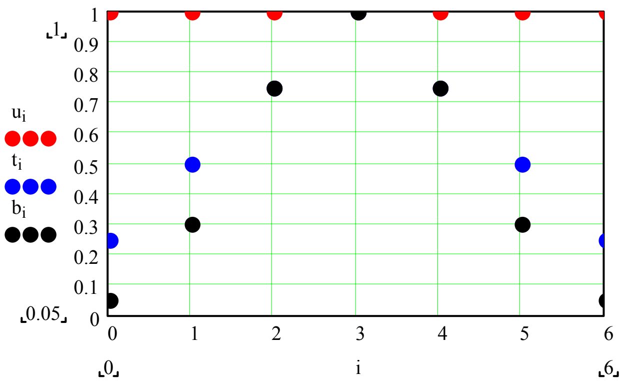
En una distribución binómica los coeficientes del polinomio siguen la fórmula del binomio de Newton.

$$p(z)=(1+z)^{N-1}=\binom{N-1}{0}+\binom{N-1}{1}z+\binom{N-1}{2}z^2+...+\binom{N-1}{N-1}z^{N-1}$$

A continuación se muestran varios ejemplos de polinomios con distribuciones binómicas.

$$p(z)=1+2z+z^2=(1+z)^2$$
$$p(z)=1+3z+3z^2+z^3=(1+z)^3$$
$$p(z)=1+4z+6z^2+4z^3+z^4=(1+z)^4$$
$$p(z)=1+5z+10z^2+10z^3+5z^4+z^5=(1+z)^5$$
$$p(z)=1+6z+15z^2+20z^3+15z^4+6z^5+z^6=(1+z)^6$$

La representación gráfica de los coeficientes de los polinomios de orden 5, N=6, normalizados al máximo de las corrientes.



Ceros del polinomio

Los ceros complejos del polinomio permiten determinar de forma muy rápida las características de radiación de la agrupación.

El polinomio de la agrupación uniforme se puede escribir de forma simplificada teniendo en cuenta que el polinomio es una serie geométrica de razón z.

$$p(z)=1+z+z^2+z^3+....$$
$$p(z)=\sum_{n=0}^{N-1}z^n=\frac{z^{N-1}z-1}{z-1}=\frac{z^N-1}{z-1}$$

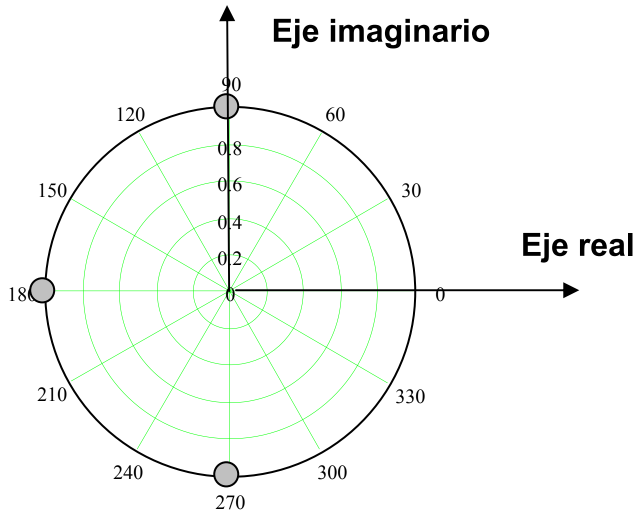
Los ceros del polinomio son los ceros del numerador, que son las raíces complejas N-ésimas de la unidad. Se exceptúa z=1 , que también se encuentra en el denominador.

Todas las raíces se encuentran en el plano complejo z sobre un círculo centrado en el origen de radio 1, que denominaremos círculo unidad.

Los ceros correspondientes a la agrupación uniforme de 4 antenas

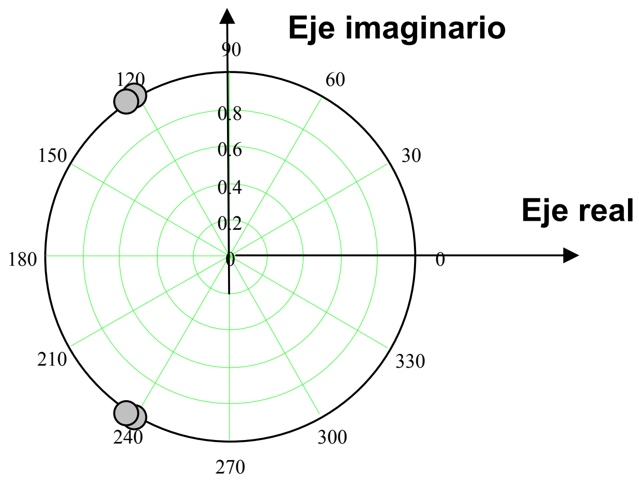
$$p(z) = 1 + z + z^2 + z^3$$
$$p(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{z^{4-1}z - 1}{z - 1} = \frac{z^4 - 1}{z - 1}$$

son las raíces cuartas de la unidad, excepto z=1.



Las agrupaciones triangulares se pueden escribir como el cuadrado de distribuciones uniformes, por lo que los ceros serán de orden 2, y corresponderán a las raíces de la distribución uniforme de la que deriven.

$$p(z) = \left(1 + z + z^2\right)^2 = 1 + 2z + 3z^2 + 2z^3 + z^4$$



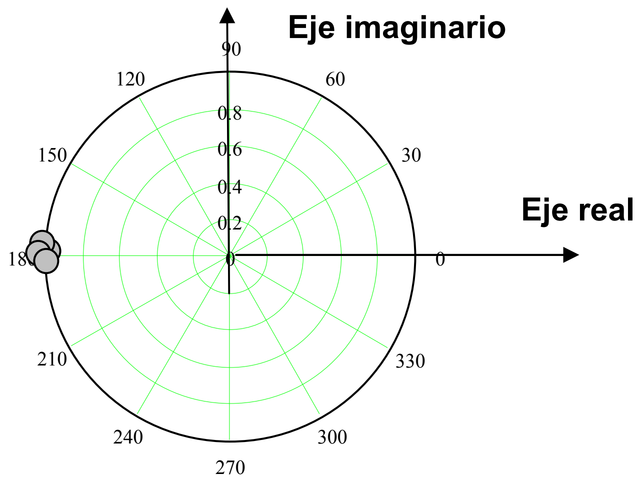
En general los polinomios con distribuciones triangulares se puede escribir como

$$p(z)=\left(\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} z^n\right)^2=\left(\frac{z^{\frac{N+1}{2}}-1}{z-1}\right)^2$$

Las distribuciones binómicas tienen un cero de multiplicidad N situado en z=-1.

La distribución binómica de 5 antenas, tiene los 4 ceros en z=-1

$$p(z)=1+4z+6z^2+4z^3+z^4=(1+z)^4$$



En general para una distribución binómica de N antenas, el cero tiene multiplicidad N-1

$$p(z)=(1+z)^{N-1}$$

Factor de la agrupación

El factor de array de una agrupación se calcula a partir del polinomio p(z), sustituyendo la variable z por su valor complejo. Normalmente interesa conocer el módulo , que se puede obtener de una forma más simple a partir de la fórmula reducida de los polinomios.

La agrupación uniforme, alineada a lo largo del eje z tiene el siguiente Factor de la agrupación.

$$FA(\psi_z) = \frac{e^{jN\psi_z} - 1}{e^{j\psi_z} - 1}$$

$$FA(\psi_z) = \frac{e^{jN\psi_z} - 1}{e^{j\psi_z} - 1} = \frac{e^{j\frac{N\psi_z}{2}}}{e^{j\frac{\psi_z}{2}}} \frac{e^{j\frac{N\psi_z}{2}} - e^{-j\frac{N\psi_z}{2}}}{e^{j\frac{\psi_z}{2}} - e^{-j\frac{\psi_z}{2}}} = e^{j\frac{(N-1)\psi_z}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\psi_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_z}{2}\right)}$$

De igual forma se pueden obtener los factores de array para la agrupación triangular

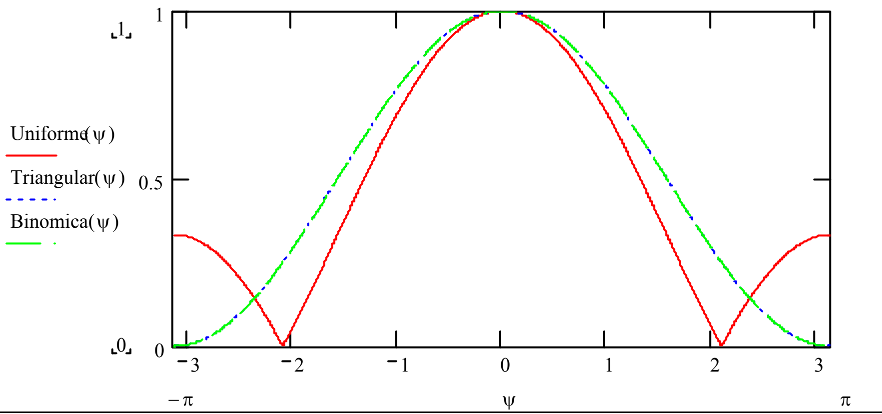
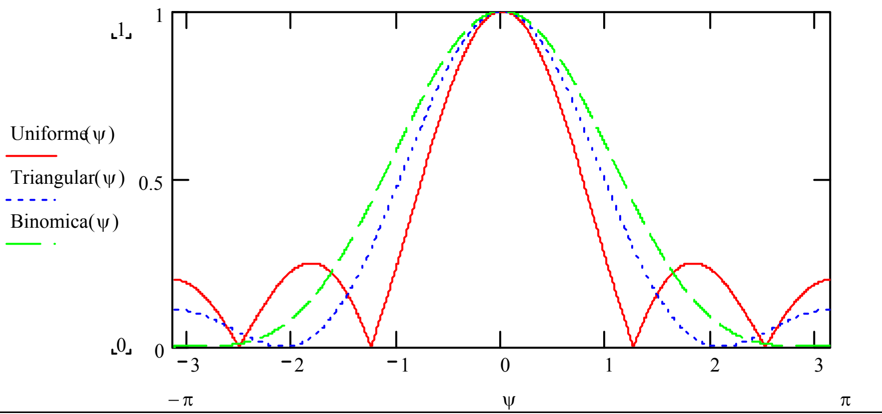
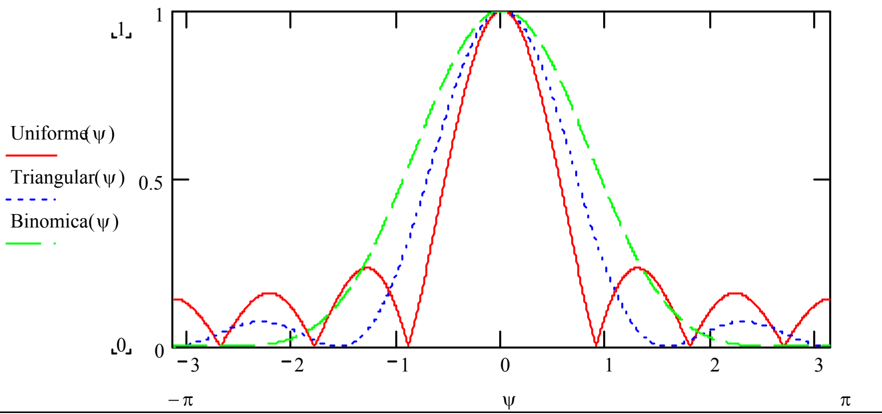
$$FA(\psi_z) = \left(\frac{e^{j\frac{N+1}{2}\psi_z} - 1}{e^{j\psi_z} - 1} \right)^2$$

$$FA(\psi_z) = \left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{4}\psi_z\right)}{\sin\left(\frac{\psi_z}{2}\right)} \right)^2$$

El factor de array de la distribución binómica será

$$\left|FA(\psi)\right| = \left|e^{j\psi} + 1\right|^{N-1} = \left(2\cos\frac{\psi}{2}\right)^{N-1}$$

Gráficas del factor de la Agrupación

N	Gráficas del Factor de Array
3	
5	
7	

Anchos de hay entre ceros del factor de array

Los anchos de haz entre ceros del factor de array está directamente relacionados con la posición de los ceros en el plano complejo.

En la agrupación uniforme el primer cero se encuentra situado a una distancia angular con respecto al máximo de

$$\psi_c = \frac{2\pi}{N}$$

En la agrupación triangular todos los ceros son dobles, el primer cero se encuentra a

$$\psi_c = 2\frac{2\pi}{N+1}$$

En la distribución binómica, todos los ceros están situados en el punto z=-1, por lo que

$$\psi_c = \pi$$

Nivel de lóbulo principal a secundario

En la agrupación uniforme el máximo principal tiene una amplitud N, igual al número de elementos de la agrupación. El primer lóbulo secundario se produce aproximadamente para el primer máximo del numerador de la expresión.

$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right|$$

El máximo se encuentra en

$$N\frac{\psi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Por lo tanto la relación de lóbulo principal a secundario será, aproximando la función seno por su argumento.

$$NLPS = \frac{N}{\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)}} \simeq \frac{3\pi}{2} = 13.4dB$$

En una agrupación triangular el factor de array viene dado por

$$FA(\psi) = \left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)}{2} \frac{\psi}{2} \right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2} \right)} \right)^2$$

El primer lóbulo secundario se produce aproximadamente para

$$\frac{N+1}{4}\psi = \frac{3\pi}{2}$$

La relación de lóbulo principal a secundario sera por tanto el doble que para la uniforme, es decir 26.8 dB.

En una distribución binómica el factor de la agrupación no tiene lóbulos secundarios.

Tabla comparativa de las distribuciones

Distribución	Transformada	Primer cero	NLPS
$\sum_{n=0}^{N-1} z^n$	$\frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$	$\frac{2\pi}{N}$	13.4
$\left(\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} z^n\right)^2$	$\left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)}{2}\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right)^2$	$2\frac{2\pi}{N+1}$	26.8
$(1+z)^{N-1}$	$\left(2\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)^{N-1}$	π	-

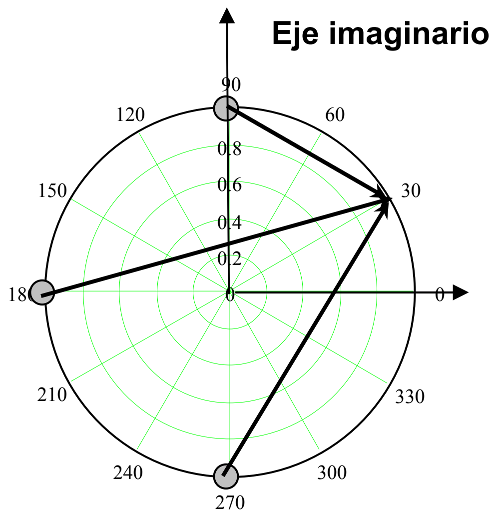
Representación gráfica del Factor de la Agrupación

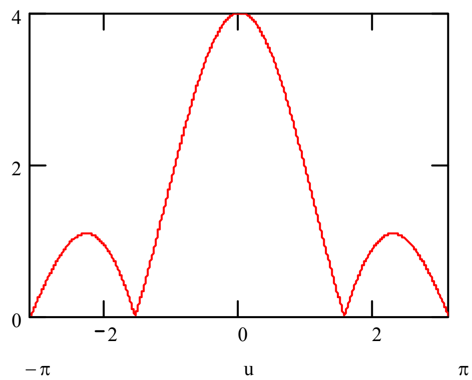
El factor de array se puede evaluar asignando valores a la variable compleja z, y calculando el valor del polinomio. Otra posibilidad es descomponer el polinomio a partir del conocimiento de sus ceros.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = a_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} \left(z - z_n \right)$$

El factor de array se puede calcular como el producto de las distancias en el plano complejo de cada uno de los ceros al punto z, correspondientes a

$$z = e^{j\psi}$$





El factor de array es una función periódica, de período 2π, que define completamente las características de la agrupación.

La curva que representa al FA es la misma para todos los arrays que tengan los mismos coeficientes del polinomio, con independencia de la separación, frecuencia o fase progresiva.

Diagrama de radiación

Se define como margen visible el conjunto de valores del ángulo eléctrico ψ que se corresponden con direcciones del espacio real tridimensional.

El margen visible se corresponde con los valores que toma la variable angular θ. Teniendo en cuenta la relación

$$\psi = kd\cos\theta + \alpha$$

Se obtiene el margen visible

$$\psi \in [\alpha - kd, \alpha + kd]$$

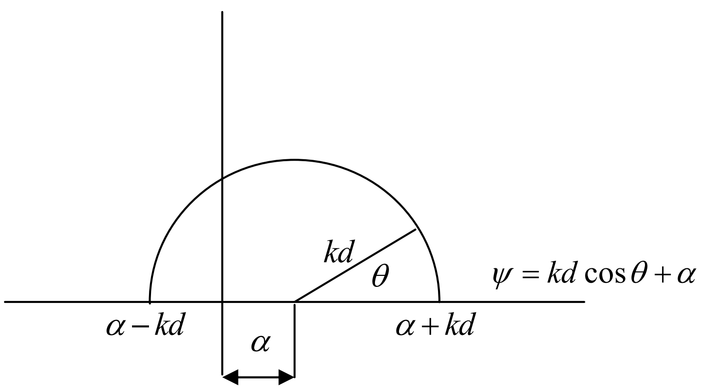
Si los coeficientes del polinomio de array son reales y positivos, el máximo del factor de array se produce para $\psi = 0$, que corresponde con aquella dirección del espacio real que cumple la condición

$$kd\cos\theta_m + \alpha = 0$$
$$\theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{kd}\right)$$

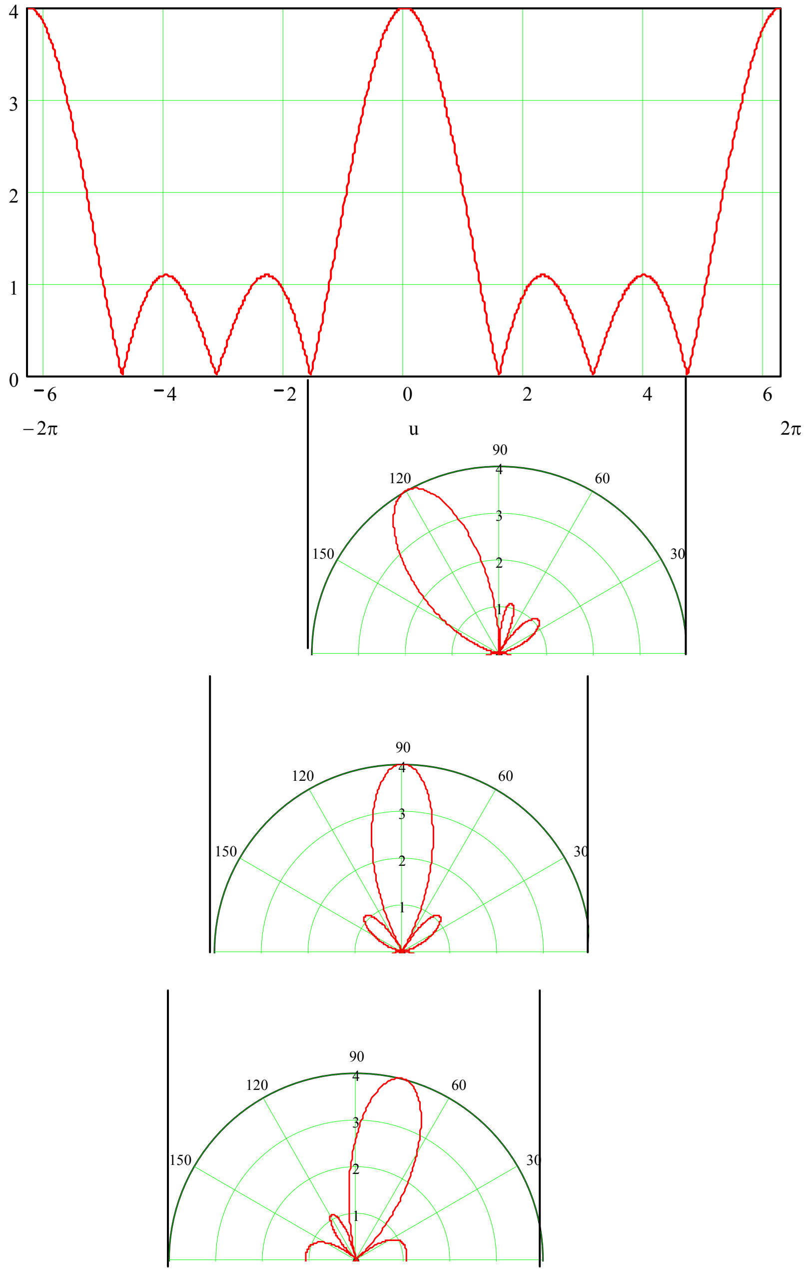
Si la fase progresiva es cero, el máximo del diagrama de radiación es perpendicular al eje de la agrupación (dirección broadside).

Si la fase progresiva es $\alpha = -kd$, el máximo está en la dirección del eje de la agrupación (dirección endfire).

En general variando el valor de α se puede controlar la dirección del máximo de radiación. Gráficamente se puede estudiar la variación del margen visible y su relación con la posición de los máximos y nulos del diagrama de radiación.



Relación entre el factor de la agrupación y el diagrama



Representación gráfica de los diagramas de radiación para una agrupación de 4 antenas. El espaciado es λ/2 y los desfases son π/2,0 y -π/4

Influencia de los parámetros en el diseño de antenas

Efecto del espaciado

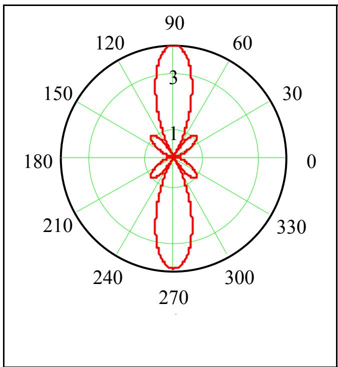
El número de máximos de radiación en el espacio real depende de la separación entre las antenas. Si dicha separación es menor que λ/2, tan sólo aparece un máximo principal.

Si el espaciado entre las antenas d>λ, el diagrama de radiación tendrá más de un máximo principal. Estos máximos adicionales se denominan lóbulos de difracción o grating lobes.

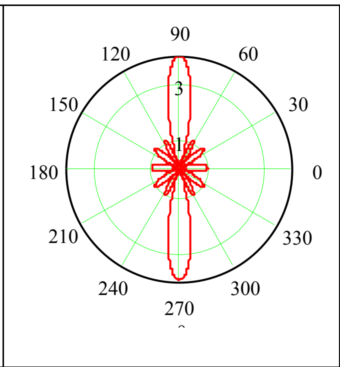
En el caso intermedio, la aparición de lóbulos de difracción depende del desfasaje progresivo. El espaciado máximo será

$$d \leq \frac{\lambda}{1+\cos\theta_m}$$

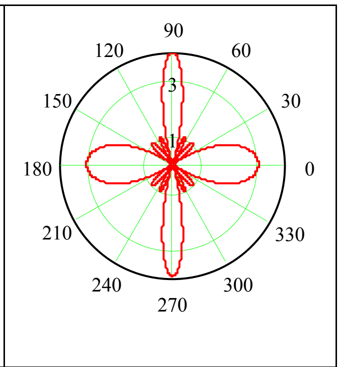
En la gráfica se muestran varios ejemplos de diagramas de una agrupación uniforme de 4 antenas, en fase, con espaciados variando entre d=λ/2 y d=2λ



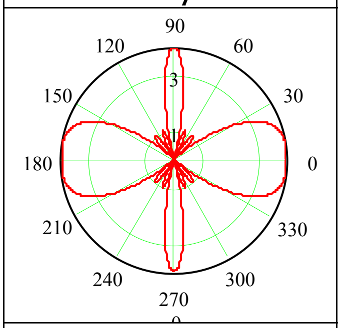
d=λ/2



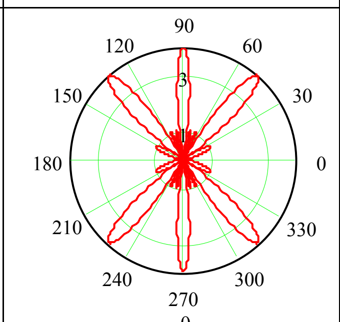
d=0.8λ



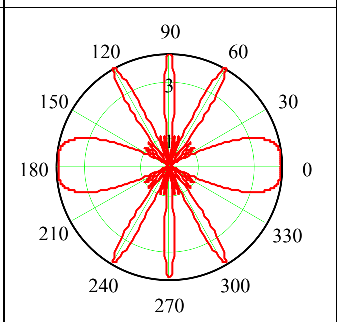
d=0.9λ



d=λ



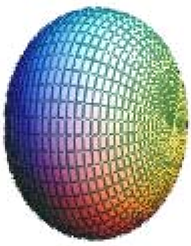
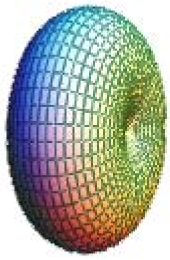
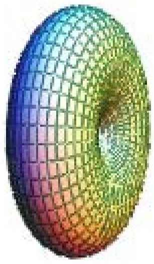
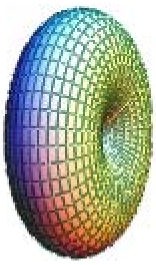
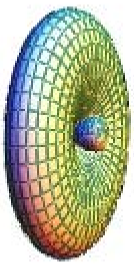
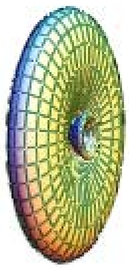
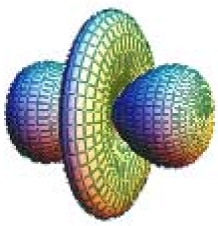
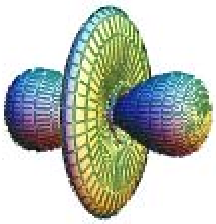
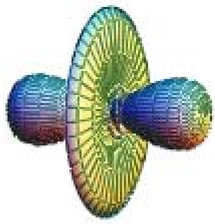
d=3λ/2



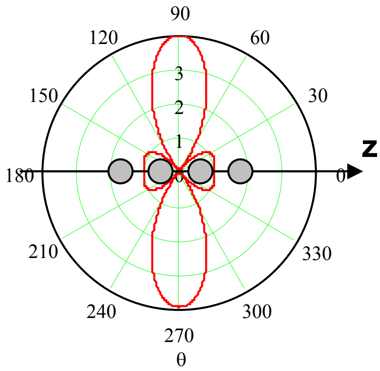
d=2λ

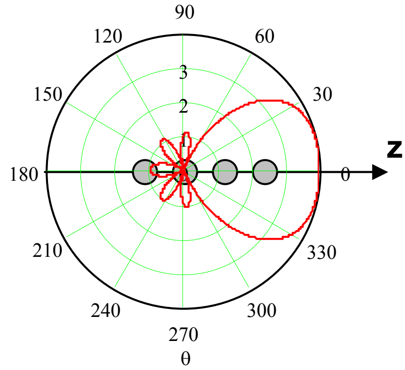
Efecto del número de elementos

Para un espaciado constante, un aumento del número de elementos de la agrupación supone unas mayores dimensiones, y por lo tanto un aumento de la directividad o disminución de los respectivos anchos de haz.

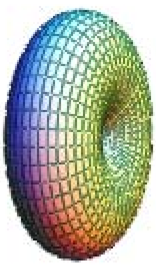
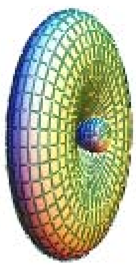
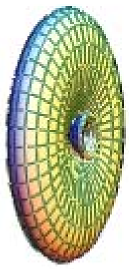
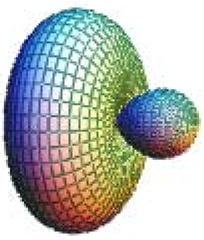
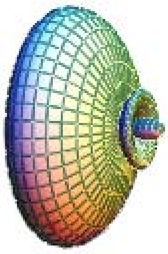
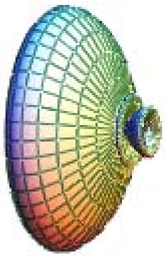
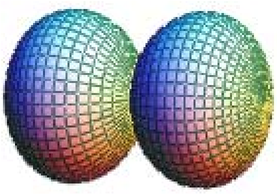
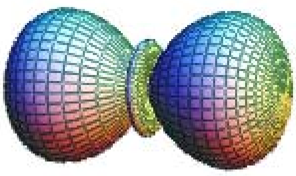
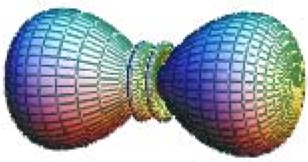
d	N=2	N=3	N=4
$\lambda/4$			
$\lambda/2$			
λ			

Efecto del desfase





Las agrupaciones uniformes con fase variable pueden variar desde el caso broadside al endfire.

α	N=2	N=3	N=4
0			
π/2			
π			

Estudio de casos particulares

Agrupación uniforme broadside

El máximo se encuentra en la dirección perpendicular a la agrupación, La fase progresiva es α=0 ,el primer cero con respecto al máximo será

$$\psi_c = \pm\frac{2\pi}{N} = kd\cos\theta + \alpha$$

Normalmente interesa la distancia angular entre el máximo de radiación y el primer cero, que estará relacionada con la posición de los ceros a través de

$$\theta_c = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\Delta\theta_c}{2}$$

$$kd\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\Delta\theta_c}{2}\right) = \pm kd\sin\left(\frac{\Delta\theta_c}{2}\right) = \pm\frac{2\pi}{N}$$

Si el número N de elementos de la agrupación es suficientemente grande se puede aproximar el seno por su argumento.

$$\Delta\theta_c \simeq \frac{4\pi}{kNd} = 2\frac{\lambda}{Nd}$$

El ancho de haz entre ceros es el doble de dicha cantidad. Para calcular el ancho de haz a –3dB se puede utilizar la expresión del factor de array, en el caso de un número de antenas elevado, la función seno del denominador se puede sustituir por su argumento.

$$\frac{\sin\left(\frac{N\psi_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_z}{2}\right)} \simeq \frac{\sin\left(\frac{N\psi_z}{2}\right)}{\frac{\psi_z}{2}}$$

El punto para el cual la función toma un valor 3 dB por debajo del máximo y el ancho de haz a –3dB se calculan como

$$N\frac{\psi}{2} = 1.39 = \frac{Nkd}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\Delta\theta_{-3dB}}{2}\right)$$

$$kd\sin\left(\frac{\Delta\theta_{-3dB}}{2}\right) = 2\frac{1.39}{N}$$

$$\Delta\theta_{-3dB} = 0.88\frac{\lambda}{Nd}$$

Agrupación uniforme endfire

En una agrupación endfire el máximo se encuentra en la dirección del eje de la agrupación. El desfase progresivo deberá ser

$$\alpha = -kd$$
$$\psi = kd\cos\theta + \alpha = kd\left(\cos\theta - 1\right)$$

La posición del primer cero corresponderá al ángulo para el que

$$kd\left(\cos\theta_c - 1\right) = -\frac{2\pi}{N}$$

El primer cero se encuentra en

$$\theta_c = \sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}}$$

El ancho de haz entre ceros es el doble del valor anterior.

$$\Delta\theta_c = 2\sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}}$$

Para calcular el ancho de haz a –3dB se pueden realizar las mismas aproximaciones que para el caso broadside, obteniendo

$$\Delta\theta_{-3dB} = 2\sqrt{0.88\frac{\lambda}{Nd}}$$

Agrupaciones uniformes superdirectivas

La condición de desfasaje progresivo tan sólo asegura que el campo se máximo, pero utilizando un nuevo desfasaje progresivo, conocido como la condición de Hansen-Woodward, se consigue optimizar la directividad.

$$\alpha = -kd - \frac{\pi}{N}$$

El aumento de la directividad se hace a costa de aumentar la relación de lóbulo principal a secundario y radiar menor potencia en la dirección del máximo, ya que todas las antenas no se suman en fase. El margen visible no contiene al máximo del factor de array.

Directividad de las agrupaciones

La Directividad de una agrupación de radiadores isotrópicos se puede calcular como

$$D = \frac{4\pi}{\Omega}$$

$$\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(\theta,\phi)\right|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \left|f(\theta)\right|^2 \sin\theta d\theta$$

$$\Omega = 2\pi \int_{kd+\alpha}^{-kd+\alpha} \left|f(\psi)\right|^2 \left(-\frac{1}{kd}\right) d\psi = \frac{\lambda}{d}\int_{-kd+\alpha}^{kd+\alpha} \left|f(\psi)\right|^2 d\psi$$

Si la agrupación es uniforme, el cuadrado del factor de la agrupación se puede calcular de forma simple a partir del desarrollo en serie de Fourier del cuadrado del polinomio de la agrupación.

$$\left|p(z)\right|^2 = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z^n\right|^2 = \frac{1}{N^2}\left(N + \sum_{n=1}^{N-1}(N-n)\left(z+z^{-n}\right)\right)$$

$$\left|f(\psi)\right|^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^{N-1}(N-n)\cos n\psi$$

Realizando las integraciones resulta que el ángulo sólido equivalente es

$$\Omega = \frac{\lambda}{d}\int_{-kd+\alpha}^{kd+\alpha} \left|f(\psi)\right|^2 d\psi$$

$$\Omega = \frac{4\pi}{N} + \frac{4\pi}{N^2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(N-n)}{nkd} 2\cos n\alpha \sin nkd$$

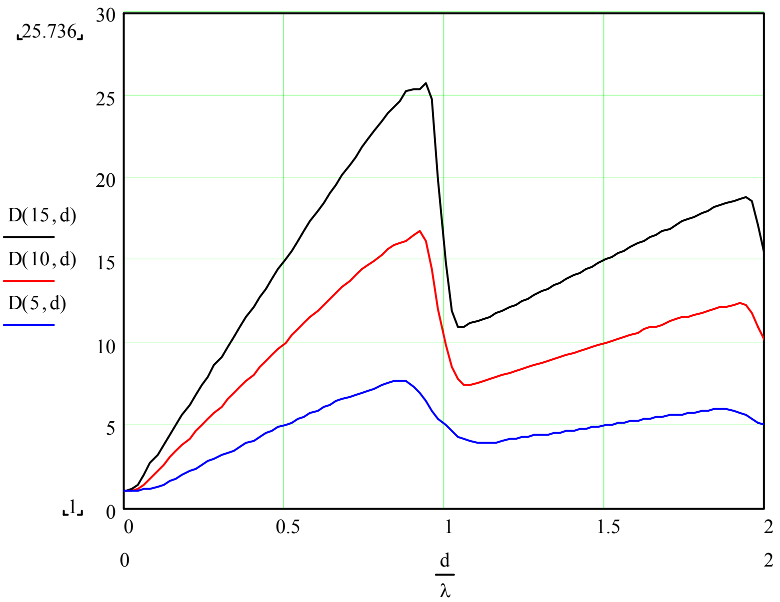
y la Directividad

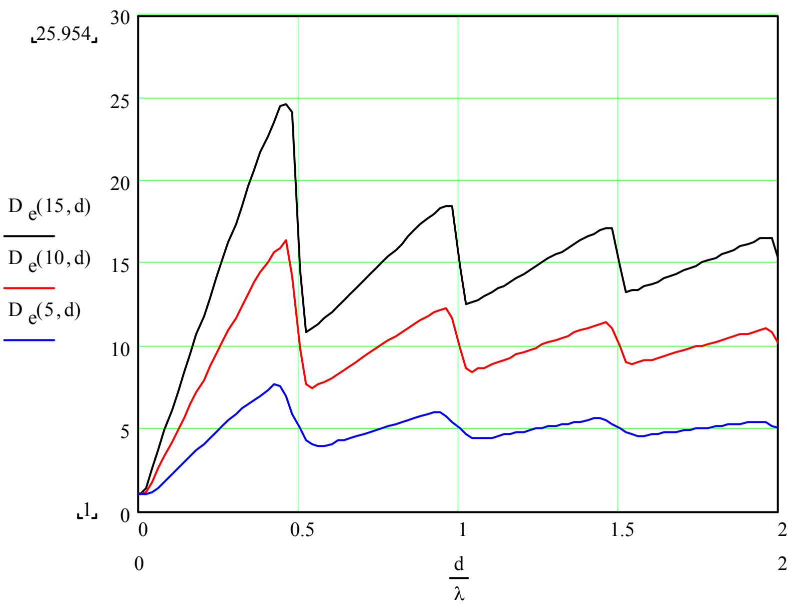
$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(N-n)}{nkd} 2\cos n\alpha \sin nkd}$$

La expresión se puede simplificar en el caso broadside y espaciado múltiplo de semilongitudes de onda. En este caso

$$\sin nkd = \sin n\frac{2\pi}{\lambda}d = \sin n\pi = 0$$

La Directividad valdrá D=N, para valores de espaciado múltiplos de λ/2 y para valores de espaciado muy grandes. En la siguientes gráfica se puede observar el valor de la Directividad para tres agrupaciones uniformes broadside y endfire, de 5,10 y 15 antenas, en función del espaciado entre los elementos.





Para los dos casos broadside y endfire, con espaciados inferiores a 0.8λ, la directividad se puede aproximar por una recta

$$D_{broadside} \approx 2\frac{d}{\lambda}N = 2\frac{L}{\lambda} \qquad D_{endfire} \approx 4\frac{d}{\lambda}N = 4\frac{L}{\lambda}$$

Síntesis de agrupaciones

Para diseñar un sistema con un determinadas características de radiación (anchos de haz, nivel de lóbulo principal a secundario, posición de los ceros,...) se pueden utilizar diversos métodos.

Entre ellos cabe destacar el método de las series de Fourier, el basado en los polinomios de Chebichev y el método de Schelkunoff.

Síntesis de Fourier

El Factor de la agrupación es una función periódica que se puede desarrollar en forma de serie de Fourier

$$FA(\psi) = \sum_{-N}^{N} a_n e^{jn\psi} = a_0 + \sum_{1}^{N} \left(a_n e^{jn\psi} + a_{-n} e^{-jn\psi} \right)$$

$$FA(\psi) = a_0 + \sum_{1}^{N} \left(a_n \left(\cos n\psi + j \sin n\psi \right) + a_{-n} \left(\cos n\psi + j \sin n\psi \right) \right)$$

$$FA(\psi) = a_0 + \sum_{1}^{N} \left(\left(a_n + a_{-n} \right) \cos n\psi + j \left(a_n - a_{-n} \right) \sin n\psi \right)$$

$$FA(\psi) = a_0 + \sum_{1}^{N} \left(b_n \cos n\psi + c_n \sin n\psi \right)$$

Como se puede observar existe una relación directa entre los coeficientes de la serie de Fourier y las amplitudes de los coeficientes del polinomio de la agrupación

$$p(z) = \sum_{-N}^{N} a_n z^n$$

El procedimiento de síntesis consiste en obtener el factor de la agrupación a partir del diagrama de radiación, en cuyo caso pueden aparecer tres casos:

- Espaciado d=λ/2, hay una relación biunívoca entre factor de array y diagrama.
- Espaciado d<λ/2, es necesario completar el factor de array en los puntos que se encuentren fuera del margen visible.
- Espaciado d>λ/2, no siempre se podrá realizar el diseño.

Por ejemplo, si se desea un diagrama de radiación constante en un intervalo y cero en las demás direcciones, de la forma

$$F(\theta)=\begin{cases}1 & \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}\\ 0 & 0\le\theta<\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}<\theta\le\pi\end{cases}$$

Se elige un espaciado de λ/2, y desfase 0, el factor de array es una función periódica de período 2π, sólo es diferente de 0 en el intervalo

$$FA(\psi)=\begin{cases}1 & -\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\le\psi\le\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\pi\le\psi<-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}<\psi\le\pi\end{cases}$$

El desarrollo en serie de Fourier del factor de array es

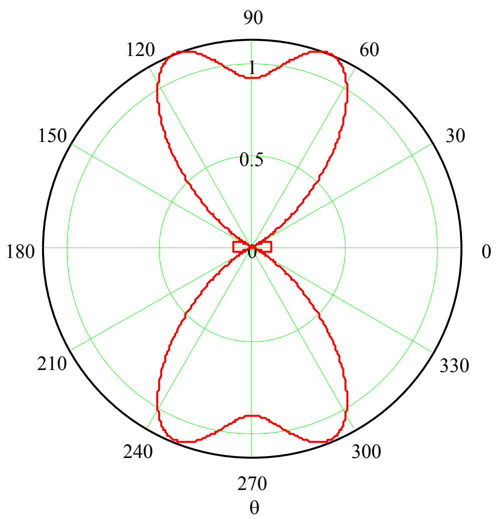
$$FA(\psi)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{2}}\right)\cos(n\psi)$$

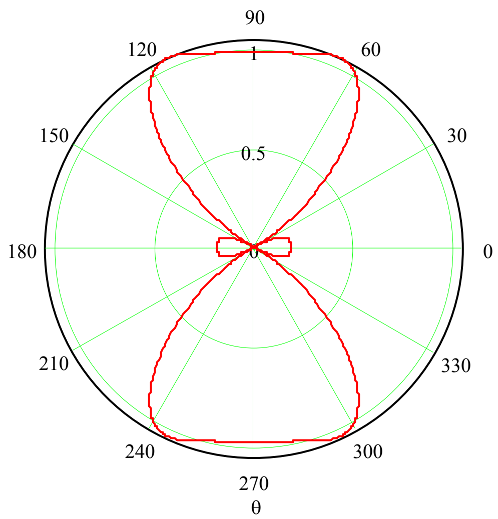
$$FA(\psi)=\frac{1}{\sqrt{2}}+0.508\cos(\psi)-0.308\cos(2\psi)+0.079\cos(3\psi)$$

El polinomio correspondiente a una agrupación de 7 antenas es

$$p_1(z)=0.039z^{-3}-0.153z^{-2}+0.253z^{-1}+0.707+0.253z-0.153z^{2}+0.039z^{3}$$

Los diagramas de radiación aproximado para 5 y 7 antenas son



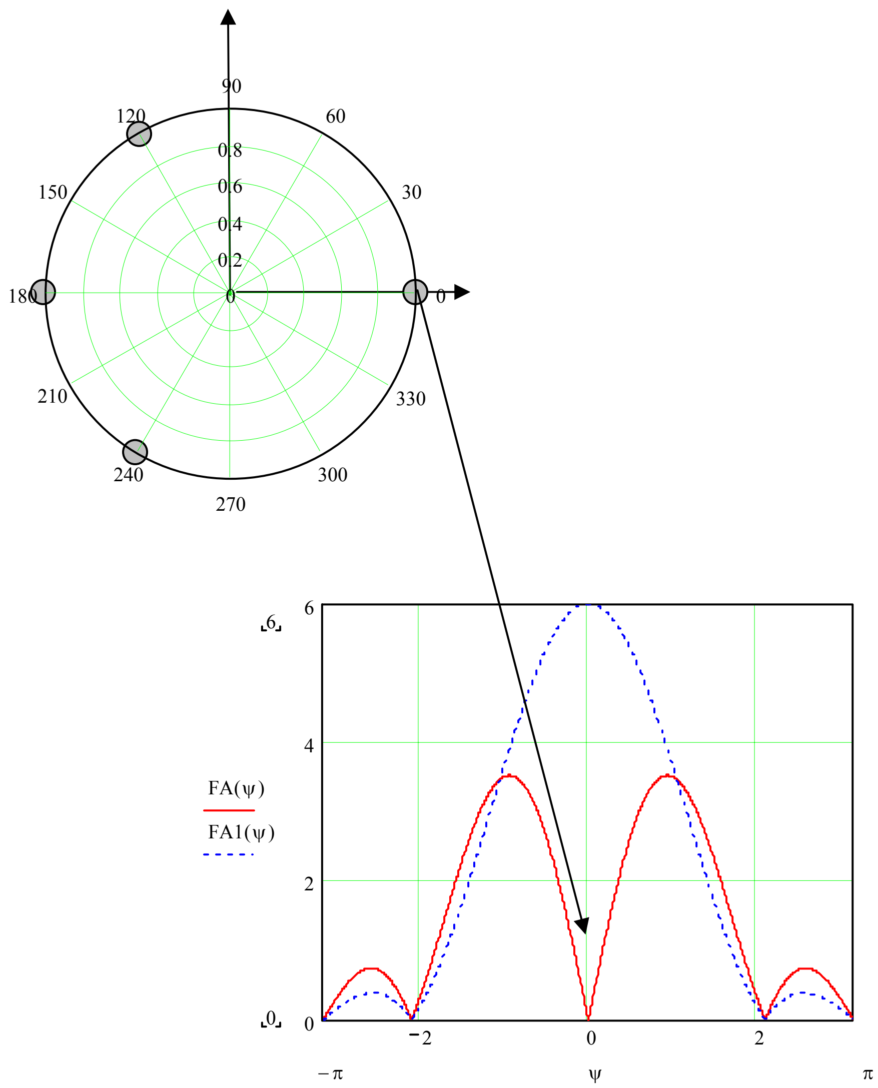


Síntesis de Schelkunoff

El Factor de la Agrupación está relacionado con la posición de los ceros en el plano complejo.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = a_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} (z - z_n)$$

El método de síntesis consiste en situar los ceros en distintos puntos, según los ceros del diagrama. También es posible disminuir el ancho de haz, o modificar la amplitud de un determinado lóbulo secundario.



En la gráfica se ve el efecto de adición de un nuevo cero en el polinomio sobre el factor de la agrupación.

Síntesis de Tschebyscheff

El Factor de Array se expresa en función de los polinomios de Tschebyscheff como

$$FA(\psi) = T_n\left(x_o \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)$$

La característica de este tipo de diseño es que se puede elegir la relación de lóbulo principal a secundario y además todos los lóbulos secundarios tienen la misma amplitud.

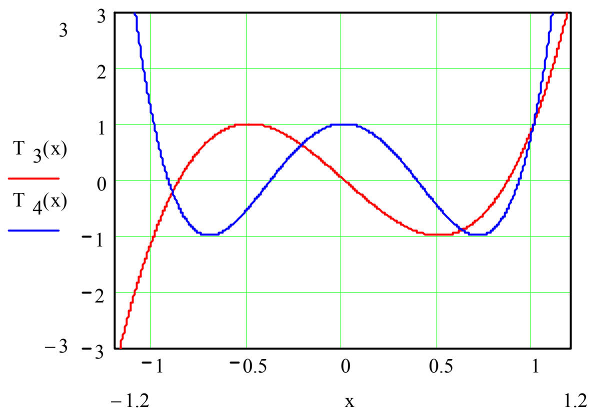
Los polinomios de Tschebyscheff de los órdenes más bajos son

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

La relación de recurrencia es

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Estos polinomios tiene todos los ceros en el intervalo –1<x<1 y crecen fuera del intervalo. En la gráfica se muestran los de orden T_3 y T_4.



En el intervalo –1<x<1 los polinomios están acotados a los valores $-1 \le T_n(x) \le 1$.

La transformación trigonométrica indicada permite tener una serie de funciones FA(ψ) en las que se puede elegir el valor máximo y el número de ceros.

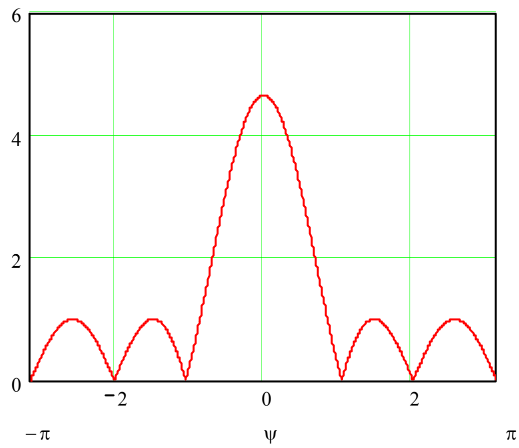
El máximo principal del FA se obtiene para

$$FA(0) = T_n\left(x_o \cos\left(\frac{0}{2}\right)\right) = T_n(x_o)$$

El nivel del lóbulo principal a secundario es precisamente $T_n(x_o)$
El polinomio p(z) se puede obtener como

$$p(z) = T_n\left(x_0 \frac{z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$$

En la figura se muestra un diseño realizado utilizando el polinomio T_5, junto con un valor x_0=1.1, con todos los lóbulos secundarios de la misma amplitud. El polinomio p(z) correspondiente tiene 5 ceros.



Con otros valores de x_0 variando entre 1 y 1.5 se puede elegir la relación de lóbulo principal a secundario deseada